F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV NUMĂRUL 1 ANUL 1973,
IANUARIE – FEBRUARIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVITEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в пе очередь научную деятельность преподавательского состав Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адреску:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVITEI 132
(С указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVITEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXV — NUMĂRUL 1

IANUARIE — FEBRUARIE

1 9 7 3

COMITETUL DE REDACŢIE

Prof. dr. ing. *Petru Baltă*; Prof.dr. docent ing. *George Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua*; Conf. dr. *Ion Grădişteanu*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar ştiinţific); Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu*; Prof. ing. *Ştefan Mantea*; Prof. dr. ing. *Marius Preda*; Prof. ing. *Mihai Renert*; Conf. dr. ing. *Mircea Soare*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*.

Redactor responsabil

Rector

Prof. dr. docent *Radu Voinea*

membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICĂ

D. Filipescu

Măsura unor mulțimi aleatoare din spațiile Riemanniene cu curbura constantă 21

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. Teoreanu, Marcela Muntean

Influența electroliților asupra întăririi cimentului portland și a constituienților săi silicatici 29

Viorica Cimpu

Semiporțelan din materii prime românești 39

MECANICĂ

D. Voiculescu

O metodă de determinare a deformațiilor într-o bară dreaptă acționată de sarcini transversale discontinui 51

AVIAȚIE

R. Patraulea

Asupra scurgerii supersonice în jurul aripii delta subțiri cu viteze finite la borduri 61

REZISTENȚA MATERIALELOR

I. Constantinescu, Lucia Fetcu, Oltea Bogdan

Determinarea experimentală a eforturilor unitare la intersecția dintre un înveliș cilindric și un înveliș elipsoidal, solicitați cu presiune interioară 71

HIDRAULICĂ

Șt. Zarea, N. Vasiliu

Analysis of the Pressure Waves Propagation within a Buffer Reservoir Tapped on a Pipe System 85

ELECTROTEHNICĂ

M. Preda, H. Gavrilă, M. Iordache

Aplicarea metodei secționării la rezolvarea grafelor de fluență și deducerea unor noi formule topologice 95

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

V. Tabără

Contribuții la studiul lagărelor hidrostatice pentru mașini unelte de precizie 113

Z. Duca, C. Minciu

Precizia geometrică a roților morteză pentru prelucrarea prin rulare a roților dințate 133

TRANSPORTURI

Al. Neagu

Contribuții la stabilirea variantei de sarcină pe osiile locomotivelor de totală aderență, cu motoare semisuspendate, la demarare 149

Sumar

MATEMATICĂ

D. Filipescu

Măsura unor mulțimi aleatoare din spațiile Hilemanniene cu curbura constantă 21

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. Teoreanu, Marcela Munteanu

Influența electroliților asupra întăririi elementului portland și a constituiților săi silicatici 29

Viorica Cîmpu

Semiporțelan din materii prime românești 39

MECANICĂ

D. Voiculescu

O metodă de determinare a deformațiilor într-o bară dreaptă acționată de sarcini transversale discontinui 51

AVIAȚIE

R. Patranica

Asupra sburgerii supersonice în jurul aripii delta subțiri cu viteze finite la bordurî 61

REZISTENȚA MATERIALELOR

I. Constantinescu, Lucia Petcu, Olga Bogdan

Determinarea experimentală a eforturilor unitare la intersecția dintre un inveliș cilindric și un inveliș elipsoidal, solicitați cu presiune interioară 71

HIDRAULICĂ

Șt. Zarea, N. Vasiliu

Analysis of the Pressure Waves Propagation within a Buffer Reservoir Tapped on a Pipe System 85

ELECTROTEHNICĂ

M. Preda, H. Gavrilă, M. Iordache

Aplicarea metodei secționării la rezolvarea grafelor de fluență și deducerea unor noi formule topologice 95

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MASINI

V. Tabără

Contribuții la studiul lagărelor hidrostatice pentru mașini unelte de precizie 113

Z. Duca, C. Mincu

Precizia geometrică a roților morteză pentru prelucrarea prin rulare a roților dințate 133

TRANSPORTURI

A. L. Nicu

Contribuții la stabilirea variației de sarcină pe osiile locomotivelor de totală aderență, cu motoare semisuspendate, la demarare 139

Резюме

Д.К. 517

Д. Филипеску

Размер возможных множеств пространств Римана с постоянной кривизной.

Работа содержит интегральные формулы, касающиеся элементов возможных множеств из пространств с постоянной кривизной Римана. По сравнению с другими подобными работами (7), учитывая вероятный характер соответствующих применений, геометрические формулы возможны не только как положение в связи с кинематическим размером пространства, но и как число. Был принят во внимание и случай, когда вероятная вариация, которая дает число геометрических фигур, имеет распределение типа Пуассона.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 691.324.54

И. Теоряну, М. Мунтяну,

Влияние электролитов на затвердение портландского цемента и на его силикатные компоненты.

Электролиты могут ускорять процессы гидратации — гидролиза и развития структуры сопротивления как силикатов кальция, так и портландского цемента. Существует прямое соотношениемежду ускоряющим действием и между натурой и количеством используемых электролитов.

Эффекты, установленные в условиях нормального затвердевания находим и в случае затвердевания при пониженной температуре.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 666.59

В. Кымпу

Приготовление полуфарфора из местного сырья.

На основе опытных данных предложено несколько рецептов для приготовления полуфарфора из сырья.

Особенности полученных материалов сравниваются с теми, которые имеются у подобных изделий, упомянутых в литературе.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Summary

D.C. 517

D. Filipescu

The measure of Some Aleatory Sets Within the Riemann Spaces With Constant Courvature

This paper includes some integral formulas concerning the elements of certain aleatory sets within the Riemann spaces of constant curvature.

With respect to other similar works (7), taking into account the probabilistic characteristics, of the respective applications, the geometrical figures are aleatory, not only according to their position as against the space kinematic measure, but also as number.

The case when the aleatory variable giving the number of the geometrical figures has a Poisson-type distribution, was also considered.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 629.324.54

I. Teoreanu, Marcela Muntean

The Influence of Electrolytes upon the Hardening of Portland Cement and its Silicatic Constituents

Electrolytes can accelerate the hydration-hydrolysis processes as well as the processes of development of the resistance structures both of calcium silicate and of cement. There is a direct correlation between the accelerating effect and the quantity and the nature of the used electrolyte.

The effects found in normal conditions are found also in the case of the hardening at low temperatures.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 666.59

Viorica Cimpu

Halfporcelains from Roumanian Raw Materials

On the basis of the experimental data, in the present note there is established the possibility to obtain halfporcelains from the rumanian raw materials.

The properties of the products are compared with those of the similar products known from the literature.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 531.32

Д. Войкулеску.

Метод определения деформаций у прямой балки, получающей прерывистую поперечную нагрузку.

В работе представлен общий метод определения деформаций у прямой балки, получающей прерывистую поперечную нагрузку, на основании дифференциального уравнения опредней фибры деформированной функции Хивисайда. Так как этот случай считается в высшей степени общим и в условиях предела появляются прерывности в форме стрелы, кручения, момента и сконцентрированной силы, главное решение дифференциального уравнения выражают с помощью функций „Y", которые имеют нелинейные физические значения.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 629.13

Р. Патрауля

О сверхзвуковом обтекании тонкого крыла дельта с конечной скоростью на бордюрах.

В работе кратко указано применение метода гидродинамической аналогии с целью получения распределения давлений на тонком крыле которые бы позволили избежания особенностей на бордюре стока. Рассматривается сдучай распределения пары концентрированных источников и случай распределения элементарных источников на крыле. В дополнении, даются несколько примеров вычислений распределения давлений с избежанием отвода потока на бордюрах, выполненных посредством вычислительной машины ИБМ—360.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 620.1

И. Константинеску, Лючия Фетку, Олтя Богдан.

Определение опытным путем единичных усилий в пересечении между цилиндрической и эллипсоидальной оболочкой получающих давление изнутри.

В работе представлены в форме таблиу и графиков результаты изме рений сделанных на основании электрической тензометрии с сопротивлением в пересечении между цилиндром и элипсоидом, подвергаемым внутренним давлениям.

Определенные опытным путем значения, были обработаны статистически, определив в дальнейшем коэффициент соотношений.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 531.32

D. Voiculescu

Method for Determining Deformation in a Straight bar Undergoing Discontinuous Transverse Loads

In this paper a general method for determining the deformations of a straight beam undergoing discontinuous transverse loads is presented, namely by writing the general solution of the differential equation of the distorted mean fibre with the help of the Heaviside's function.

Considering the very general case wherein — in limit conditions — deflection, rotation, moment and concentrated force discontinuities are appearing, the differential equation's general solution is expressed through some Y functions, having an immediate physical significance.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 629.13

R. Patraulea

On the Supersonic flow Around the thin Delta wing with Board Finite Velocities

The paper briefly shows an application of the hydrodynamic analogy method with a view to obtaining the pressure distribution on the thin wing, avoiding the singularities from the leading edge. The case of the disposition of a pair of concentrated sources and the case of the distribution of elementary sources on the wing are dealt with. Some examples of the calculation of the pressure distribution by avoiding the board current detachment, carried out on the computer IBM-360 are further given.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 620.1

I. Constantinescu, Lucia Fetcu, Oltea Bogdan

Experimental Determination of Unit Loads at the Intersection Between a Cylindrical Cover and an Ellipsoidal Cover Stressed by Internal Pressure

In this paper, the results of measurements carried out by resistive electric extensometry at the intersection of a cylinder and an ellipsoid stressed by internal pressure are given under the form tables and diagrams. The experimentally determined values were statistically processed, and subsequently the correlation coefficient was determined.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 621.2

Ст. Заря, Н. Василиу

Анализ распространения волн давления в гидрофоре с жидкостью, установленном справа последовательно с трубой.

В работе представлен способ применения метода ассоциированных волн расхода и давления для расчета эффективности гидрофора с жидкостью. Были установлены общие выражения отраженных и преломленных волн, учитывая влияние в условиях предела и геометрических и эластичных характеристик гидравлической системы на значение избыточного давления у протежируемого чугуна.

Распространение волн давления в гидрофоре и в смежных трубах было представлено графически.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 621.3

М. Преда, А. Гаврилэ, М. Иордаке.

Применение метода разделения на разрешение графов и вывод новых топологических формул.

В настоящей работе предложен метод расчета коэффициентов равноценных направленние графу в функции коэффициентов перехода графа, полученного разделением узлов в узлы схождения и узлы расхождения. Равным образом будут введены тополгические формулы пасчета равноценных коэффициентов перехода, которые будут комбинированы с формулой Месона, что синтетизирует и упрощает расчет сложных графов. Применяя, в частности, этот метод расчета коэффициентов перехода равноценных на направленние графы сложных электрических цепей, можно добиться значительного упрощения расечта этих цепей.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 621.9:621.82

В. Табэре

Вклад в изучение гидростатических подшипников для станков большой точности.

Цель работы — определение функциональных и конструктивных параметров гидростатических подшипников в специфических условиях станков большой точности.

На основе выполненного анализа определены наилучшие характеристики этого типа подшипников с указанием необходимого числа выемок, а также необходимость реализовать соотношение между их размерами и шириной осевых и тангенциальных порогов.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 621.2

Şt. Zarea, N. Vasiliu

Die Analyse der verbreitung der Druckwellen in einem Tank dessen flüssigkeit sich in einem Rohrnetz befindet

Die Arbeit beschreibt die Weise, in welcher die Methode der Durchflusswellen verbunden mit den Druckwellen für die Bestimmung der Wirksamkeit eines Flüssigkeitstanks, angewendet wird. Es wurden die allgemeinen Ausdrücke der Intensitäten der gebrochenen und zurückgeworfenen Wellen bestimmt, und dadurch die Einflüsse der Randbedingungen und der geometrischen und elastischen Eigenschaften des hydraulischen Systems auf den Wert des Überdrucks in den Röhren hervorgehoben.

Die Verbreitung der Druckwellen im Tank und in den nebenliegenden Röhren wurde graphische dargestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K.621.3

M. Preda, H. Gavrilă, M. Iordache

Anwendung der Zerlegungsmethode für das Lösen des Fliessgraphes und Herleiten einer neuen topologischen Formel

Im vorliegenden Aufsatz wird eine neue Rechenmethode der äquivalenten Umwandlungen eines Fliessgraphs, in Abhängigkeit von der Graphumwandlungen die durch Spaltung eines Anschlusspunktes in konvergenten und divegrenten erhaltenen Anschlusspunkte, dargestellt.

Desgleichen werden einige topologische Berechnungsformel der äquivalenten Umwandlungen hergeleitet die im Zusammenhang mit Masson's-Formel, die Berechnung der komplizierten Graphen zusammenfasst und vereinfacht. Durch Anwenden dieser Rechenmethode der äquivalenten Umwandlungen an Fliessgraphen der komplizierten elektrischen Kreislaufe kann man eine sehr vereinfachte Berechnungsmethode dieser Kreislaufe erhalten.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 621.9:621.82

V. Tabără

Beiträge zum Studium der hydrostatischen Lager für Präzisions Werkzeugmaschinen

In der Schrift wird die Bestimmung der optimalen Betriebs- und Konstruktionsparameter hydrostatischer Lager unter Berücksichtigung der spezifischen für Präzisions-Werkzeugmaschinen verlangten Bedingungen gesucht.

Auf Grund der durchgeführten Analyse werden die patimalen Charakteristiken dieser Lagertype festgestellt, wobei die optimale Anzahl der Aussparungen sowie die Notwendigkeit einer Korrelation zwischen deren Abmessungen und der Breite der axialen und tangentialen Schwellen hervorgehoben wird.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 621.9

З. Дука, К. Минчу.

Геометрическая точность дольежного колеса для обработки путем качетния зубчатых колес.

От точности работы функционального реального профиля грани долбежного колеса зависит непосредственно точность обработки зубчатых колес, изготовленнц этими инструментами.

Известно много способов шлифовки грани долбежного колеса но специальная литература не поясняет связи между геометрической точностью этих инструментов и способом шлифовки.

В работе будут освещены эти проблемы, указывая связь, существующую между способом шлифовки граней и геометрической точностью долбежных колес. Выводы, вытекающие в результате проделанных аналитических расчетов, показывают, что изготовление посредством шлифовки граней долбежного колеса, имея цилиндрическую — геликоидальную направляющую, является наиболее правильным способом. Оригинальность работы состоит в том, что указаны геометрические параметры ,,эвольвенты замены'' для уменьшения отклонений от теоретической эвольвенты, как таковой в осуществлении сил освобождения и расположения инструмента долбежного колеса.

Bul. Inst. politehnic ,,Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Д.К. 625.2

Ал. Няну.

Вклад в стабилизацию изменения нагрузки при пуске в ход на осях локомотивов полной силы сцепления, с полуподвесными двигателями.

В работе рассматривается вопрос распределения на осях веса локомотивов полной силы сцепления во время пуска их в ход.

Установленные расчетные соотношения принимают во внимание кроме конструктивных параметров и силы тяги локомотивов и вес прицепленных вагонов, скорость движения, уклон профиля при пуске в ход и ускорение поезда при отправлении.

Bul. Inst. politehnic ,,Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 621.9

Z. Duca, C. Minciu

Geometrical Accuracy of Vertical Shaper-wheel for Gears Machining by Rolling

The accuarcy of gears machining with these tools depends on the operating precision of the real functional profile of the ventical shaper — wheel edge.

Many procedurea of vertical shaper-wheel flanks grinding are known but the speciality literature it is not at all establishing the relation between the geometrical accuracy of these tools and the final machining procedures.

These problemes are clarified in this paper, by the fact that the relation between the flanks grinding procedure and the geometrical accuracy of the vertical shaper-wheels is shown. The conclusions drawn following the carried out analytical computations show that the best procedure is the grinding of vertical shaper-wheel having a helicaldirectrix cylindric. This work is also original by the fact that the geometrical parameters of a ,,substituing evolvent'' are indicated thus minimizing the deviation from the theoretical evolvent at the achievement of the rake — out and setting forces of the vertical shaper-wheel tool.

Bul. Inst. politehnic ,,Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 625.2

Al. Neagu

Contributions to the Stating of the Starting Load Variation on the Full-adherence Locomotive Axles, with Semi-susspended Engines

The problem of the weight distribution on axles of full-adherence locomotive during start-up is discurssed in this paper.

The established computing relations are considered, besides the designing parameters and the locomotive tractive force — the vehicles weight, traffic speed, the profile gradient where the starting-up is taking place, and the train starting-up acceleration.

Bul. Inst. politehnic ,,Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Résumé

C.D. 517

D. Filipescu

La mesure de certaines ensembler aléatoires des éspaces riemanniens à courbe constante

L'ouvrage comprend certaines formules intégrales concernants les éléments de certaines ensembles aléatoires des espaces riemanniens à courbure constante.

Par rapport aux autres ouvrages similaires (7), en tenant compte du caractère de probabilité des applications respectives, les figures géométriques sont aléatoires, non seulement comme position par rapport à la mesure cinématique de l'espace, mais aussi comme nombre.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 691.324.54

I. Teoreanu, Marcela Muntean

L'influence des électrolytes sur le durcissement du ciment Portland et de ses constituents de silicates

Les électrolytes peuvent accélérer les proces de hydratation-hydrolyse et de développement de la structure de résistance tant des silicates de calcium que de ceux du ciment Portland. Il y a une corrélation directe entre l'effet accelérateur et la nature et la quantité d'électrolyte utilisée.

Les effets constatés dans les conditions de durcissement normal se retrouvent dans le cas du durcissement aux température basses.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 666.59

Viorica Cimpu

Demi-porcelaines de materiaux roumains

Fondé sur les données experimentalles cet ouvrage établit quelques recettes pour obtenir le demi-porcelaine en utilisant exclusivement des matières prémieres roumaines.

On indique les proprietés des masses obtenues en comparaison avec celles connues dans la littearture.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

Zusammenfassung

D.K. 517

D. Filipescu

Die Abmessung einiger aleatorischen Mengen aus den Riemann schen Räume mit konstanten Wölbungen

Der Aufsatz enthält Integralformel hinsichtlich der Elemente aleatorischer Mengen aus der Riemann'schen Räume mit konstanten Wölbungen.

Im Gegensatz ähnlicher Arbeiten (7) und mit Berücksichtigung auf den Wahrscheinlichkeitscharakter der betreffenden Anwendungen sind die geometrischen Figuren nicht nur als Stellung im Verhältnis zur kinematischen Abmessung des Raumes, sonderen auch als Zahl aleatorisch.

Es wurde auch der Fall in Betracht genommen wo die aleatorische Variable die den Zahl der geometrischen Figuren angibt eine Vertielung des Type Poisson besitzt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 691.324.54

I. Teoreanu, Marcela Muntean

Einfluss der Elektrolyten auf die Erhärtung des Portland-Zementes und dessen silikatisierten Bestandteile

Die Elektrolytem können die Hydratisierungs-und Hydrolisierungsprozesse sowie das Entwickeln der Widerstandsgefüge von Kalziumsilikate und des Portland-Zementes beschleunigen. Es gibt eine direkte Wechselbeziehung zwischen der Beschleunigungs wirkung und die Art und Menge des verwendeten Elektrolytes.

Die unter Normalbedingungen festgestellten Erhärtungswirkungen sind auch im Falle der Erhärtung bei niedrigen Temperaturen wiederzufinden.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 666.59

Viorica Cimpu

Halbporzellane aus rumänischen Rohmaterialien

In dieser Arbeit wird die Moglichkeit angegeben, Halbporzelanmassen, ausschliesslich aus rumänischen Materialien herzustellen.

Es werden die Eigenschaften der neuen Massen, im Vergleich mit denen in der Fachliteratur, beschrieben.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 531.32

D. Voiculescu

Une méthode pour la détermination des déformations dans une barre droite actionnée par de charges transversales discontinues

Dans cet ouvrage on présente une méthode générale pour la détermination des déformations d'une poutre droite actionnée par des charges transversales discontinues, en écrivant la solution générale de l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée à l'aide de la fonction de Heaviside.

En considérant le cas fort général où, meme dans les conditions limite, surgissent des discontinuités de flèche, rotation, moment et force concentrée, la solution générale de l'équation différentielle est exprimée à l'aide de quelques fonctions Y, qui ont une signification physique immédiate.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 629.13

R. Patraulea

Au sujet des écoulements supersoniques autour de l'aile delta mince à vitesses finites aux bordures

On présente, succintement, dans l'ouvrage une application de la méthode de l'analogie hydrodynamique dans le but d'obtenir des distributions de pressions sur l'aile delta mince, pour éviter les singularités des bordures d'attaque. On traite le cas de la disposition d'une paire de sources concentrées et le cas de la distribution de sources élémentaires sur l'aile. Pour compléter, on donne quelque exemples de calcul de la distribution des pression en évitant les détachements de courants aux bordures, effectués sur le calculateur IMB-360.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 620.1

I. Constantinescu, Lucia Fetcu, Oltea Bogdan

La détermination expérimentale des efforts unitaires à l'intersection entre une enveloppe cylindrique et une enveloppe ellipsoidale, sollicitées avec pression intérieure

Dans cet ouvrage en présente, sous forme de tableaux et de graphiques, les résultats des mesures effectuées à l'aide de la tensométrie électrique résistive à l'intersection entre un cylindre et un ellipsoide, sollicités avec pression intérieure. Les valeurs déterminées, de manière expérimentale, ont été commentées du point de vue statistique, en déterminant ensuite le coefficient de corrélation.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 531.32

D. Voiculescu

Methode zur Bestimmung der Formänderung eines geraden Balkens der unstetigen Querkräften ausgesetzt ist

Der Artikel zeigt ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Formänderung eines geraden Balkens der unstetigen Querkräften ausgesetzt ist. Dazu wird die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung der verformten Mittellinie mit Hilfe der Heaviside-Funktion geschrieben.

Im ganz allgemeinen Fall, wo Unstetigkeiten in Biegungspfeil, Drehung, Kräfte und Kräftemomente auch bei den Randbedingungen vorkommen, wird die allgemeine Lösung der differenzialgleichung mit Hilfe Y-Funktionen, die eine sofortige physische Interpretation zulassen, gefunden.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 629.13

R. Patraulea

Uber die Uberschallanströmung um den dünnen Delta-Flügel, mit finiten Geschwindigkeiten an den Flügelkanten

In der Veröffentlichung wird eine Applikation des kydrodinamischen Analogieverfahrens zwecks Erzielung von Druckvertielungen am dünnen Delta-Flügel kurz dargestellt; dadurch werden Singilaritäten an den Angriffskanten vermieden, werden. Es wird der Fall der Anordnung eines Paares von konzentrierten Quellen und der der Verteilung von elementaren Quellen am Flügel beschrieben. Ergänzend, werden einige an dem IBM-360-Rechner durchgeführte Berechnungsbeispiele der Druckverteilung mit Vermeidung der Strömungsabtrennungen an den Kanten angeführt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 620.1

I. Constantinescu, Lucia Fetcu, Oltea Bogdan

Erfahrungsmässige Bestimmung der einheitlichen Spannkraft bei Kreuzung eines Zylindrischen Mantels und eines ellipsoidischen Mantels die einer inneren Druck ausgesetzt sind

Im Form von Tafeln und Schaubilder werden in hervorstehenden Aufsatz die Messereignisse die durch spezifischer Widerstand elektrischer Tensometrie bei Kreuzung eines zylindrischen Mantels und einen ellipsoidischen Mantels die einer innerren Druck ausgesetzt festgestellt wurden dargestellt.

Die erfahrungsmässig nachgeprüften Werten wurden statisch verarbeitet und damit der Wechselbeziehungsfaktor bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 621.2

Şt. Zarea, N. Vasiliu

L'analyse de la propagation des ondes de pression dans un hydrophore à liquide, placé sur une conduite

Le travail décrit le mode d'application de la méthode des ondes associées de débit et de pression pour déterminer l'efficacité d'un hydrophore à liquide. On a établi les expressions générales des intensités des ondes réfléchies et réfractées en mettant en évidence les conditions à limite et les caractéristiques géométriques et élastiques du système hydraulique sur la valeur de la supression dans les conduites. On a représenté graphiquement la propagation des ondes de pression dans le hydrophore et dans les conduites adjacentes.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 621.3

M. Preda, H. Gavrilă, M. Iordache

L'application de la méthode de la séction pour la solution des graphes de fluence et la déduction de nouvelle formules topologique

Dans le présent ouvrage on propose une méthode de calcul des transmittances équivalentes d'un graphe de fluence en fonction des transmittances du graphe obtenu par le fondage des noeuds en noeuds de convergence et noeuds de divergence.

On doit aussi déduire certaines formules topologiques de calcul des transmittances équivalentes qui, combinées avec la formule de Mason synthétisent et simplifient le calcul des graphes compliqués. En appliquant, en particulier, cette méthode de calcul des transmittances équivalentes dans les graphes de fluence des circuits électriques compliqués on peut obtenir une simplification considérable du calcul de ces circuits.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 621.9:621.82

V. Tabără

Contributions à l'étude des paliers hydrostatiques pour les machines outils de précision

L'ouvrage élaboré a pour but la détermination des paramètres fonctionnels et constructifs optimes des paliers hydrostatiques, dans les conditions spécifiques des machines-outils de précision.

Sur la base de l'analyse effectuée sont précisées les caractéristiques optimes de ces types de paliers, en mettant en évidence, le nombre optime de dégagements, ainsi que la nécessité de réaliser une corrélation entre les dimensions de ceux-ci et la largeur des seuils axiaux et tangentiels

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 621.2

St. Zarea, N. Vasiliu

Analysis of the Pressure Vaves Propagation within a Buffer Reservoir Tapped on a Pipe System

The paper displays the way to apply the associated flow and pressure waves method to calculate the efficiency of a buffer reservoir, The general expressions of the reflected and refracted waves, have been established, pointing out the influence of boundary conditions and of the hydraulic system geometrical and elastic characteristics upon the value of the superpressure in the pipes. The pressure wave variation inside the reservoir and the adjoining pipes, has been also plotted.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 621.3

M. Preda, H. Gavrilă, M. Iordache

Aplication of Splitting Method for Flow-graphs-problems and the Deduction of New Topological Relation

In the present paper, the authors propose a method of the computation of the equivalent transmittances of a flow graph, depending on the transmittances of the graph obtained through the splitting of same nodes in the convergent and divergent nodes.

Some topological formulas of the computation of the equivalent transmittances combined with the Mason's formula, synthezise and simplify the complecated graphs calculus, will be deduced.

Applying this method of the computation of equivalent transmittances to the complicated electric circuits flow graphs, a consideraible simplification of the calculus of these circuits can be obtained.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.C. 621.9:621.82

V. Tabără

Contributions to the Study of Hydrostatic Bearings for Precision Machine-tools

The drawn — up paper aims at determining the optimal functional and constructive parameters of hydrostatic bearings in the specific conditions of precision machine-tools.

The optimal charcteristics of these types of bearings are defined on basis of the carried-out analysis, the optimal number of releasings, as well as the need to achieve the correlation between their dimensions and the width of axial and tangential thresholds being emphasized.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 621.9

Z. Duca, C. Minciu

La précision géométrique des roues mortaise pour l'usinage par roulage des roues dentées

De la précision de fonctionnement du profil fonctionnel réel du tranchant de la roue mortaise dépend, sans aucun doute, la précision d'usinage des roues dentées réalisées à l'aide de ces outils.

On connait plusieurs modalités d'usinage final (rectification) des flancs de la roue mortaise, mais la littérature de spécialitée ne clarifie d'aucune manière la liaison entre la précision géométrique de ces outils et les procédés d'usinage final.

Dans cet ouvrage on clarifie ces problèmes en démontrant la liaison qui existe entre le procédé de rectification des flancs et la précision geométrique des roues mortaise. Les conclusions qui resortent, à la suite des calculs analytiques effectués, démontre que la réalisation par rectification des flancs de la roue mortaise avec directrice hélicoidale cylindrique est le procédé le plus indiqué. L'originalité de l'ouvrage consiste aussi dans le fait qu'il indique les paramètres géométriques d'une „développante de substitution" pour diminuer les écarts de la développante théorique qui apparait à la réalisation des forces de dégagement et d'emplacement de l'outil roue mortaise.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

C.D. 625.2

Al. Neagu

Contributions à l'établisement de la variation de la charge au démarrage sur les essieux des locomotives d'adhérence totale avec des moteurs semi-suspendus

Dans cet ouvrage on traite le problème de la répartition sur les essieux du poids des locomotives d'adhérence totale, durant le démarrage.

Les relations de calcul établies prennent en considération, tant les paramètres constructifs, que la force de traction de la locomotive et le poids du convoi des véhicules remorqués, la vitesse de circulation, la déclivité du profil sur lequel on démarre et l'accéleration du train de démarrage.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 621.9

Z. Duca, C. Minciu

Uber die geometrische Genauigkeit der Stossräder für das Walz stossen

Die Betriebsgenauigkeit des reelen funktionellen Profils der Stossräderkante hängt von der Bearbeitungsgenauigkeit der Zahnräder die durch diese Werkzeuge hergestellt werden, ab.

Es sind mehrere Arten von Feinbearbeitungen (Schleifen) der Stossradflanke bekannt, aber die Fachliteratur erklärt in keiner Weise das Verhältniss zwischen die geometrische Genauigkeit dieser Werkzeuge und die Feinbearbeitungsmethode.

In vorliegenden Aufsatz werden diese Problemen klargemacht indem man die Beziehungen zwischen die Flankenschleifmethoden und die geometrische Genauigkeit der Stossräder hervorgehoben sind. Die Schlussfolgerungen der durchgeführten analitischen Berechnungen zeigen dass durch die Schleifmethode der Stossräderflanken mit schraubenförmiger, zylindrischer Richtung die geeigneteste Bearbeitungsmethode darstellt. Die Originalität dieser Probleme besteht auch darin dass auch geometrische Parameter einer „Ersatz-Evolvente", um die Verminderung der Abweichung von der theoretischen Evolvente zu verwriklichen, dargestellt werden und somit auch die Verwircklichung der Aussparungskräfte und das Auflegen des Stossrades.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

D.K. 625.2

Al. Neagu

Beiträge zur Feststellung der Belastungsvariationen auf die Lokomotivenachse mit totalen Haftung, mit Halbaufhängungs-Motoren, bei Anlass

Im vorliegenden Aufsatz wird das Problem der Verteilung des Lokomotivgewichtes mit totaler Haftung, bei Anlass, besprochen.

Die Berechnungsverhältnisse nehmen in Bezug, aussers Gekonstruktiven Parameter auch die Ziehkraft der Lokomotive, da die wicht der geschleppten Fahrzeuge, die Verkehrsgeschwindigkeit, die Neigungsverhältnisse des Geländes auf das der Anlass stattfindet sowie die Anlassbeschleunigung des Zuges.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 1/1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

MATEMATICĂ

C. Z.: 517

MĂSURA UNOR MULȚIMI ALEATOARE DIN SPAȚIILE RIEMANNIENE CU CURBURA CONSTANTĂ *

DUMITRU FILIPESCU

Introducere

I. Într-un spațiu rimannian V_2 cu curbură constantă măsura cinematică elementară are expresia

$$dK = [dPd\psi] \tag{1}$$

unde

$$dP = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{k}\, \rho [\mathrm{d}\rho d\theta] \tag{2}$$

reprezintă elementul de arie pe spațiul V_2 iar ψ este un unghi de rotație, metrica spațiului avînd expresia

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}\, \rho d\theta^2 \tag{3}$$

A. Fie în acest spațiu un sistem de figuri convexe $K_1, K_2, \ldots K_m$, aleatoare ca poziție în raport cu măsura (1), independente [3], egale între ele de arie S și lungimea frontierei L, iar K_0 o figură convexă de poziție fixă de arie S_0 și lungimea frontierei L_0.

Notăm cu K_m^r figura formată cu punctele comune *a r* dintre figurile convexe $K_1, K_2, \ldots, K_m$, iar cu S_m^r, L_m^r aria respectiv lungimea configurației geometrice $K_0 \cap K_m^r$. Din lucrarea [7] avem următoarele formule pentru valorile medii :

$$E(S_m^r) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} S_0 \tag{4}$$

---

*Manuscris predat la data de 10 martie 1971

$$(5)\qquad E(L_m^r)=\binom{m}{r}p^r q^{m-r}[L_0+rS^{-1}S_0L+(m-r)(2\pi S_0+$$

$$+L_0L-kS_0S)^{-1}-2\pi SL]$$

unde

$$(6)\qquad p=\frac{2\pi S}{2\pi(S_0+S)+L_0L-kS_0S}$$

$$q=\frac{2\pi S_0+L_0L-kS_0S}{2\pi(S_0+S)+L_0L-kS_0S}$$

Dacă presupunem că numărul m al figurilor convexe este aleator, dat de valorile variabilei aleatoare $\xi(K_0)$, cu distribuția

$$(7)\qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \ldots & m & \ldots\\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_m & \ldots\end{pmatrix}$$

atunci (4), (5), reprezintă valori medii condiționate pentru cazul cînd $\xi(K_0)=m$

Notăm cu $E(S^r)$, $E(L^r)$ valorile medii corespunzătoare mulțimii aleatoare $K^{(r)}$ formată cu punctele comune *a r* figuri convexe cînd numărul acestora este aleator, atunci [2].

$$(8)\qquad E(S_m^r)=E(S^r/\xi(K_0)=m)$$

$$(9)\qquad E(L_m^r)=E(L^r/\xi(K_0)=m)$$

De aici, [2], avem

$$(10)\qquad E(S^r)=\sum_{m=0}^{\infty}E(S_m^r)p_m$$

$$(11)\qquad E(L^r)=\sum_{m=0}^{\infty}E(L_m^r)p_m$$

În anumite condiții [8], se poate presupune

$$(12)\qquad p_m=e^{-\lambda S_0}\frac{(\lambda S_0)^m}{m!}$$

de unde (10), (11), devin , ținînd seama de (4) și (5)

$$(13)\qquad E(S^r)=\frac{(p\lambda S_0)^r}{r!}e^{-\lambda pS_0}S_0$$

$$E(L^r)=\frac{(p\lambda S_0)^r}{r!}e^{-\lambda pS_0}[L_0+rS^{-1}S_0L+q\lambda S_0(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-1}(2\pi S_0L)] \tag{14}$$

Dacă notăm cu N_m^r numărul de domenii simplu conexe din care este formată mulțimea aleatoare $K_0\cap K_m^r$, din [7], avem valoarea medie:

$$E(N_m^r)=\binom{m}{r}p^rq^{m-r}\{1+[(m-r)(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-1}+$$

$$+r(2\pi S)^{-1}]2\pi S_0+r(r-1)(2\pi S)^{-2}\pi S_0KL^2+(m-r)(m- \tag{15}$$

$$-r-1)(\pi S_0L^2)(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-2}+r(m-r)S^{-1}S_0L^2(2\pi S_0+$$

$$+L_0L-kS_0S)^{-1}+rL_0L(2\pi S)^{-1}+L_0L(m-r)(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-1}\}$$

Notînd cu N^r numărul de domenii simplu conexe din care este formată mulțimea aleatoare $K_0\cap K^{(r)}$, avem valoarea medie

$$E(N^r)=\sum_{m=0}^{\infty}E(N_m^r)p_m \tag{16}$$

Presupunînd că p_m are expresia (12), obținem formula

$$E(N^r)=\frac{(p\lambda S_0)^r}{r!}e^{-\lambda pS_0}\{1+[q\lambda S_0)(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-1}+$$

$$+r(2\pi S)^{-1}]2\pi S_0+r(r-1)(2\pi S)^{-2}\pi S_0L^2+(q\lambda S_0)^2\pi S_0L^2(2\pi S_0+ \tag{16'}$$

$$+L_0L-kS_0S)^{-2}+r(q\lambda S_0)S^{-1}(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-1}S_0L^2+$$

$$+rL_0L(2\pi S)^{-1}+L_0L(q\lambda S_0)(2\pi S_0+L_0L-kS_0S)^{-1}\}$$

II. Presupunem acum că avem în V_2 s grupe de figuri convexe aleatoare în raport cu măsura (1), independente [3], două figuri fiind egale numai dacă aparțin aceleași grupe. Figurile egale din grupa i în număr de m_i, $\sum_{i=1}^{s}m_i=m$ având aria S_i, lungimea frontierei $L_i(i=1,2,\ldots s)$. Fie de asemenea, K_0 o figură convexă de poziția fixă de arie S_0 și lungimea frontierei L_0.

Notăm cu $K_{m_1m_2\ldots m_s}^{r_1r_2\ldots r_s}$ figura formată cu punctele comune ar_1 din cele m_1, r_2 din cele $m_2,\ldots,r_s$ din cele m_s, iar cu $S_{m_1m_2\ldots m_s}^{r_1r_2\ldots r_s}L_{m_1m_2\ldots m_s}^{r_1r_2\ldots r_s}$ aria (măsura Lebesgue) respectiv lungimea frontierei configurației geometrice $K_0\cap\cap K_{m_1m_2\ldots m_s}^{r_1r_2\ldots r_s}$.

Din [2] avem valorile medii

$$E(S^{r_1r_2\dots r_s}_{m_1m_2\dots m_s}) = \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}p_i^{r_i}q_i^{m_i-r_i}S_0 \tag{17}$$

$$E(L^{r_1r_2\dots r_s}_{m_1m_2\dots m_s}) = \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}p_i^{r_i}q_i^{m_i-r_i}\Big[L_0 + \tag{18}$$

$$+\sum_{h=1}^{s} r_hS_h^{-1}S_0L_h + (m_h - r_h)(2\pi S_0 + L_0L_h - kS_0S_h)\,2\pi S_0L_h\Big]$$

Dacă notăm cu $N^{r_1r_2\dots r_s}_{m_1m_2\dots m_s}$ numărul de domenii simplu conexe din care este formată configurația geometrică $K_0 \cap K^{r_1r_2r_s}_{m_1m_2m_s}$ atunci avem valoarea medie

$$E(N^{r_1r_2\dots r_s}_{m_1m_2\dots m_s}) = \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}p_i^{r_i}q_i^{m_i-r_i}\Big\{1 + \tag{19}$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\{[(m_i-r_i)(2\pi S_0+ L_0L_i - kS_0S_i)^{-1} + r_i(2\pi S_i)^{-1}]2\pi S_0 +$$

$$+ r_i(r_i - 1)(2\pi S_i)^{-2}\pi S_0L_i^2+(m_i - r_i)(m_i - r_i - 1)(2\pi S_0 + L_0L_i-$$

$$- kS_0S_i)^{-2}\pi S_0L_i^2 + r_i(m_i - r_i)S_i^{-2}(2\pi S_0+L_0L_i - kS_0S_i)^{-1}S_0L_i^2 +$$

$$+ r_iL_0L_i(2\pi S_i)^{-1} + L_0L_i(m_i - r_i)(2\pi S_0 + L_0L_i - kS_0S_i)^{-1}\} +$$

$$+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\Big[\frac{r_ir_j}{2}(2\pi S_i)^{-1}(2\pi S_j)^{-1} + r_i(m_j-r_j)(2\pi S_i)^{-1}(2\pi S_0+L_0I_j-kS_0S_j)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{2}(m_i - r_i)(m_j - r_j)(2\pi S_0 + L_0L_i - kS_0S_i)^{-1}(2\pi S_0 +$$

$$+ L_0L_j - kS_0S_j)^{-1}\Big]2\pi S_0L_iL_j\Big\}$$

Dacă presupunem că m_i sînt valorile variabilelor aleatoare de repartiție

$$\xi^i(K_0):\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots & m_i & \dots\\ p_{0_i} & p_{1_i} & p_{2_i} & \dots & p_{m_i} & \dots\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\text{cu}\sum_{m=0}^{\infty}p_{m_i} = 1,\ (i = 1, 2, \dots, s)$$

atunci [1], notînd cu $E(S^{r_1r_2\dots r_s})$, $E(L^{r_1r_2\dots r_s}s)$ $E(N^{r_1r_2\dots r_s}$, valorile medii respective corespunzătoare configurației $K_0 \cap K^{r_1r_2\dots r_s}$, unde $K^{r_1r_2\dots r_s}$ reprezintă

mulțimea formată cu punctele comune ar_1 din figurile convexe din grupa 1. r_2 din grupa 2,... r_s din grupa s, cînd numărul acestora este aleator, avem valorile medii

$$E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m_1, m_2, \dots, m_s} E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}) p_{m_1} p_{m_2} \dots p_{m_s} \tag{21}$$

$$E(L^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m_1, m_2, \dots, m_s} E(L^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}) p_{m_1} p_{m_2} \dots p_{m_s} \tag{22}$$

$$E(N^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m_1, m_2, \dots, m_s} E(N^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}) p_{m_1} p_{m_2} \dots p_{m_s} \tag{23}$$

Dacă ne situăm în condițiile indicate în lucrarea [8] se poate presupune

$$p_{m_i} = e^{-\lambda_i S_0} \frac{(\lambda_i S_0)^{m_i}}{m_i!} \quad (i = 1, 2, \dots s) \tag{23'}$$

și atunci (21), (22), (23), devin

$$E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}) = S_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{(p_i \lambda_i S_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda_i p_i S_0} \tag{24}$$

$$E(L^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \prod_{i=1}^{s} \frac{(p_i \lambda_i S_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda_i p_i S_0} \Big[L_0 + \tag{25}$$

$$+ \sum_{h=1}^{s} r_h (S_h)^{-1} S_0 L_h + (q_h \lambda_h S_0)(2\pi S_0 + L_0 L_h - k S_0 S_h)^{-1} (2\pi S_0 L_h) \Big]$$

$$E(N^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \prod_{i=1}^{s} \frac{(p_i \lambda_i S_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda_i p_i S_0} \Big\{ 1 + \tag{26}$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \{ [(q_i \lambda_i S_0)(2\pi S_0 + L_0 L_i - k S_0 S_i)^{-1} + r_i (2\pi S_i)^{-1}] 2\pi S_0 +$$

$$+ r_i (r_i - 1) \pi S_0 L_i^2 (2\pi S_i^{-2}) + (q_i \lambda_i S_0)^2 (2\pi S_0 + L_0 L_i - k S_0 S_i)^{-2} \pi S_0 L_i^2 +$$

$$+ r_i (q_i \lambda_i S_0) S_i^{-2} S_0 L_i^2 (2\pi S_0 + L_0 L_i - k S_0 S_i)^{-1} + r_i L_0 L_i (2\pi S_i)^{-1} +$$

$$+ L_0 L_i (q_i \lambda_i S_0)(2\pi S_0 + L_0 L_i - k S_0 S_i)^{-1} \} +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{s} \Big[\frac{r_i r_j}{2} (2\pi S_i)^{-1} (2\pi S_j)^{-1} + r_i (q_j \lambda_j S_0)(2\pi S_i)^{-1} (2\pi S_0 + L_0 L_j - k S_0 S_j)^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} (q_i \lambda_i S_0) \ (q_j \lambda_j S_0)(2\pi S_0 + L_0 L_i - k S_0 S_i)^{-1} (2\pi S_0 +$$

$$L_0 L_i - k S_0 S_i)]^{-1} 2\pi S_0 L_i L_i \}$$

unde s-a notat

$$p_i = \frac{2\pi S_i}{2\pi(S_0 + S_i) + L_0 L_i - kS_0 S_i}$$

$$q_i = \frac{2\pi S_0 + L_0 L_i - kS_0 S_i}{2\pi(S_0 + S_i) + L_0 L_i - kS_0 S_i}$$

Notăm cu $\widetilde{K}^{(r)}$ configurația geometrică formată cu punctele comune $a\,r$ figuri convexe oarecare și cu $\widetilde{E}(S^{(r)})$, $(E(L^{(r)}), \widetilde{E}(N^{(r)})$, valorile medii corespunzătoare configurației geometrice $K \cdot \bigcap \widetilde{K}^{(r)}$ Rezultă formulele :

$$\widetilde{E}(S^{(r)}) = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} E(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}) \tag{27}$$

$$\widetilde{E}(L^{(r)}) = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} E(L^{r_1 r_2 \ldots r_s}) \tag{28}$$

$$\widetilde{E}(N^{(r)}) = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} E(N^{r_1 r_2 \ldots r_s}) \tag{29}$$

Dacă în (27), (28), (29) presupunem că figurile convexe sînt egale, obținem formulele (13), (14), (16′) cu

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$$

III. În spațiul rimannian V_n cu curbură constantă măsura cinematică elementară are expresia

$$dK = [dV dO_{n-1} dO_{n-2} \ldots dO_2 dO_1] \tag{30}$$

unde dV este elementul de volum din V_n iar dO_s reprezintă elementul de arie pe sfera unitate s-dimensională.

Păstrînd notațiile din V_2, avem valorile medii

$$E(V_m^r) = \binom{m}{r} P^r Q^{m-r} V_0 \tag{31}$$

$$E(V_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{m_i - r_i} \tag{32}$$

$$P_i = \frac{V_i}{E_i} \tag{33}$$

unde

$$E_i = V_0 + V_i - \frac{2\varepsilon_n}{O_n} k^{n/2} V_0 V_i + \frac{1}{nO_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-h-2}^{i} +$$

$$+ \frac{2}{O_{n-1}} \sum_{s=0}^{n-4} \frac{O_{n-s}}{O_s} M_s^{(0)} \left(\sum_{t=\frac{s-\varepsilon_n}{2}}^{\frac{n-3-\varepsilon_n}{2}} C_{stn} M_{2t+\varepsilon_n-s-1}^{(i)} \right)$$

De asemenea, notăm

$$Q_i = 1 - P_i \tag{34}$$

iar cu P și Q expresiile corespunzătoare care se obțin din (33), respectiv (34) unde se înlocuiesc V_i cu V iar $M_i^{(i)}$ cu M_i

În relațiile precedente s-au mai folosit notațiile :

$$\varepsilon_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$C_{stn} = \binom{n-1}{2t+\varepsilon_n} \binom{2t+\varepsilon_n}{s} \frac{O_{n+s-2t-\varepsilon_n+1} k^{\frac{n-2t-\varepsilon_n-1}{2}}}{O_{2t+\varepsilon_n+1-s} O_{n-2t-\varepsilon_n} O_{n-2t-\varepsilon_n-1}}$$

$$M_h^{(0)} = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} \int_{\partial K_0} \{R_1 R_2, \ldots R_{n-1}\}_h d\sigma_0$$

$$M_h = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} \int_{\partial K} \{R_1, R_2, \ldots R_{n-1}\}_h d\sigma$$

$d\sigma_0$ și $d\sigma$ fiind elementele de arie pe hipersuprafețele ∂K, respectiv ∂K_0, frontierele corpurilor convexe K și K_0 iar $\{R_1, R_2 \ldots R_{n-1}\}_h$ reprezintă funcția simetrică elementară corespunzătoare celor $(n-1)$ curburi principale ale hipersuprafețelor ∂K_0 și ∂K.

Dacă presupunem că și în V_2 că m, respectiv m_i sînt valorile variabilelor aleatoare (7), (20), cu p_{m_i} dat de (23'), obținem (păstrînd notațiile din V_2)

$$E(V_r) = \frac{(P\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda P V_0} V_0 \tag{35}$$

$$E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{(P_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda P_i V_0} \tag{36}$$

unde probabilitatea [4], ca un punct $M \in K_0$ să aparţină figurii $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ are expresia

$$\prod_{i=1}^{s} \frac{(P_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda P_i V_0}$$

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Cramer, H.* — Matehmatical Methods of Statistics — Princeton University Press 1954.
2. *Filipescu, D.* — Asupra unor formule integrale, relativ la curbe convexe dintr-un spaţiu riemannian V_2 cu curbură constantă. Lucrare publicată în Studii şi cercetări matematice nr. 4 din 1971.
3. *Kendall, M. G., Moran, P.A.P.,* — Geometrical Probability C. Griffin, London 1963
4. *Robbins, H. F.* — On the Measure of a Random Set. Ann. Math. Stat. 15. 70—74 (1944), 16, 342—347 (1945).
5. *Santalo, L. A.* — Sobre unas formulas integrales y valores medios referentes a figureas convexas moviles en el plano. Univ. de Buenos Aires Contr. Cientificas, A.1, 2, 23—45. 1950.
6. *Stoka, M. I.* — Geometrie Integrale, Mem. des Sci. Mat fasc. 165 ed. Fauthier Villars, Paris, 1968.
7. x x x — Alcune formule integrali concernenti le curve convesse in uno spazio riemanniano V_2 dellor curvatura constante. Rendiconti del Seminario Matematico di Univ. di Messina, 1969.
8. *Takacs, I.* — On the Probability Distribution of the Mesure of the Union of Random Sets Placed in a Euclidian Space. Ann. Univ. Sci. Budapest 1, 89—95 (1958).
9. *Vrănceanu, Gh.* — Lecţii de geometrice diferenţială vol. I 1962—1968.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 691.324.54

INFLUENȚA ELECTROLIȚILOR ASUPRA ÎNTĂRIRII CIMENTULUI PORTLAND ȘI A CONSTITUIENȚILOR SĂI SILICATICI*

I. TEOREANU, MARCELA MUNTEAN

1. — Numeroase studii experimentale arată că electroliții adăugați în anumite proporții în pastele de ciment portland modifică cinetica procesului de întărire, compoziția .și morfologia produșilor de hidratare-hidroliză, precum și structura pietrei de ciment întărite, cu consecințe directe asupra proprietăților acesteia din urmă.

Din punctul de vedere al influenței electroliților asupra cineticii procesului de întărire se deosebesc : întîrzietori și acceleratori ai procesului. Ghipsul — constituent indispensabil al cimentului portland, este de fapt un electrolit, cu efect întîrzietor al prizei cimentului. O gamă largă de electroliți se caracterizează printr-o acțiune acceleratoare a procesului de întărire. A fost larg studiată în acest sens, acțiunea adaosurilor de clorură de calciu. Este cunoscută, de asmenea, acțiunea acceleratoare a unor cloruri, sulfați, carbonați și azotați alcalini, aceia a unor cloruri și azotați alcalino-teroși, a unor săruri de aluminiu și fier etc. Deși studiile experimentale nu lipsesc, mecanismul acțiunii electroliților nu este lămurit ; se cunoaște puțin despre corelația efect-natura electrolitului — compoziția mineralogică a cimentului portland. Cercetarea acestei corelații nu s-a realizat în mod sistematic. O asemenea examinare sistematică ar permite folosirea mai rațională a electroliților, singuri sau asociați. În această lumină, studiul sistemelor silicați de calciu — apă — electroliți, în care electroliții folosiți să reprezinte clase diferite de substanțe caracterizate prin același cation și diverși anioni sau prin același anion, cationii făcînd parte din diverse grupe ale sistemului periodic al elementelor, prezintă un deosebit interes teoretic și practic, dat fiind și faptul că silicații reprezintă peste 70 % din constituienții mineralogici ai clincherului de ciment portland.

În literatură există relativ puține studii referitoare la sistemele silicați de calciu — apă — electroliți ; mai mult, datele privitoare la aceste sisteme sînt dispersate și uneori chiar contradictorii. Acest fapt se datorește probabil și influențelor foarte diferite pe care le pot declanșa electroliții în funcție de natura lor, de proporția în care s-au adăugat în sistem, ca și de condițiile de întărire. Cele mai aprofundate studii privitoare la pro-

* Lucrare comunicată în cadrul ciclului de conferințe CNIT, aprilie 1972.

cesele care au loc la întărirea silicaților de calciu, în prezență de electroliți, sînt — ca și în cazul cimentului portland-cele care se referă la sistemele cu adaosuri de clorură de calciu și ghips.

În ceea ce privește caracterul acțiunii adaosurilor mici (2 ... 5%) de $CaSO_4$ și $CaCl_2$ asupra proceselor care au loc la întărirea silicatului tricalcic și bicalcic, în general este acceptată și susținută de investigații experimentale [1-8] o influență a acestora manifestată pe planul modificărilor structurale, morfologice, ale suprafeței specifice, capacității de cristalizare a produșilor de hidratare și totodată ale vitezei de hidratare a silicatului anhidru, ca urmare a schimbării echilibrului ionic al sistemului. Toate acestea conduc final și la modificări în structura de rezistență a liantului întărit.

Unele cercetări [2, 4—5, 9—12], privind sistemele silicat de calciu — $CaSO_4$ — H_2O și silicat de calciu — $CaCl_2$ — H_2O, pun în evidență însă și existența unor interacții chimice ale adaosurilor de electroliți-folosiți în cantități diferite — cu produșii de hidratare existenți în sistem. Kawada și Nemoto [12] arată că, la hidratarea silicaților de calciu, în condiții de lucru normale, în prezența sulfatului de calciu, grupul $[SO_4]^{2-}$ poate substitui într-o proporție mică tetraedrii $[SiO_4]^{4-}$ din compoziția hidrosilicaților de calciu rezultați ($SO_3/SiO_2 = 0{,}05...0{,}1$). Hidratul nou format în acest caz, va avea compoziția 1,95 CaO. 0,93 $SiO_2 \cdot$ 0,07 SO_3. 2,1 H_2O. Și Kalousek [2] consideră posibilă înlocuirea tetraedrilor $[SiO_4]^{4-}$ cu grupuri $[SO_4]^{2-}$ cu formarea unor soluții solide.

În cazul sistemelor de silicat de calciu — clorură de calciu — apă, formarea unor compuși hidroclorosilcatici de calciu se pare că este posibilă numai în condiții de lucru deosebite (temperaturi scăzute, sub 0°C, și adaosuri mari de clorură de călciu, de peste 15 %).

Unii cercetători [9-11] au arătat că, în condiții de lucru normale, la anumite concentrații de $Ca(OH)_2$ și $CaCl_2$ ale fazei apoase, clorura de calciu prezentă în sistemul silicat de calciu — apă — electrolit poate interacționa cu $Ca(OH)_2$ rezultat în urma hidrolizei silicatului tricalcic sau a silicatului bicalcic, pentru a forma hidroxicloruri. Hidroxiclorurile de calciu pot fi descrise cu formula generală m CaO. $CaCl_2$. n H_2O. ($m = 1$; 3 și $n = 2$; 15) [13—14]. În acest caz efectul accelerator al clorurii de calciu este cu atît mai mare, cu cît produsul clorurat este mai solubil și se separă mai repede din soluție ca produs cristalin. Trebuie subliniat faptul că, stabilitatea hidroxiclorurilor amintite nu este posibilă la concentrații ale soluțiilor apoase mai mici ca 180 g $CaCl_2$/1 [5]. În condiții de lucru obișnuite, în prezența adaosurilor mici de clorură de calciu (2...5%), chiar dacă se admite că este posibilă formarea unei hidroxicloruri de calciu, nu trebuie neglijat faptul că, existența ei este de scurtă durată (se descopune ușor în $Ca(OH)_2$ și $CaCl_2$) [5, 15].

Cercetări recente [16—18] asupra proceselor de întărire din sistemul silicat de calciu — $CaCl_2$ — apă semnalează posibilitatea includerii („înzidirii") ionului Cl^-, adus de către clorură, în rețeaua hidrosilicaților de calciu formați; acest fenomen poate determina modificări însemnate în compoziția chimico-morfologică a hidrosilicaților de calciu rezultați.

2. — În vederea cercetării sistematice a influenței electroliților asupra proceselor care au loc la întărirea silicaților de calciu, s-a lucrat cu clo-

ruri alcaline și alcalino-teroase, precum și cu diferite săruri de calciu (clorură, azotat, sulfat și carbonat de calciu). S-a urmărit acțiunea lor asupra cineticii și a mecanismului proceselor, asupra compoziției fazelor hidratate și morfologiei lor, asupra dezvoltării structurii de rezistență, în corelare cu natura cationilor și anionilor componenți ai electroliților.

În lucrarea de față însă, se va aborda doar influența electroliților asupra gradului de hidratare, precum și asupra rezistențelor mecanice ale silicaților de calciu întăriți. Se vor face, de asemenea, unele referiri la rezultatele obținute, din punctul de vedere al rezistențelor mecanice pe un ciment alitic, precum și la posibilitatea folosirii adaosurilor de electroliți în vederea efectuării de betonări, în bune condițiuni, la temperaturi scăzute, inclusiv negative.

S-au folosit silicați de calciu sintetizați în laborator din carbonat de calciu și silicagel, chimic puri. Sinteza $3CaO.SiO_2$ s-a făcut prin arderea repetată (6 cicluri) a amestecului stoechiometric, la temperatura de 1550°C, palier 4 ore. Silicatul bicalcic, în forma β, s-a sintetizat prin arderea amestecului corespunzător de silicagel și carbonat de calciu la 1500°C (2 cicluri), palier 2,5 — 3ore; ca stabilizator s-a folosit anhidrida borică [18]. Adaosurile de electroliți s-au utilizat în proporții de 0,5, 2,0 și 5,0 % în greutate, raportat la silicatul de calciu anhidru. Prin modul în care s-au ales electroliții adăugați s-a căutat să se urmărească atît influența cationului, cînd anionul se păstrează constant (cazul clorurilor alcaline și alcalino — teroase), cît și a anionului, atunci cînd se păstrează același cation (cazul sărurilor de calciu), asupra proceselor de întărire din sistemul silicat de calciu — apă — electrolit.

Prin intermediul gradului de hidratare s-au obținut informații referitoare la cinetica proceselor de hidratare — hidroliză. Gradul de hidratare s-a determinat roentgenografic sau ca raport al apei legate chimic la diferiți termeni de întărire — 1,7 și 28 zile — și apa teoretic necesară pentru hidratarea integrală [19], pe paste de silicați de calciu, cu și fără adaos de electroliți, al căror raport $A/L = 0,5$.

Determinarea rezistențelor mecanice s-a făcut pe microprobe Kühl (cuburi cu $l = 1,41$ cm și prisme $1 \times 1 \times 3$ cm) confecționate din mortare semiuscate (raport liant /nisip = 1/3 și umiditate = 13 %). Păstrarea probelor s-a făcut în atmosferă umedă, saturată în vapori de apă.

Prezența electroliților în sistemul silicat de calciu-apă conduce la modificări importante în cinetica proceselor de hidratare. În toate sistemele cu electroliți, gradul de hidratare este mai mare față de sistemele de silicați de calciu fără adaos — v. tabel 1 și tabel 2 — (excepție face sistemul de silicat tricalcic — $CaCO_3$ — apă, la unele termene de întărire). Accelerarea proceselor de hidratare — hidroliză are loc mai ales în prima etapă. O contribuție importantă în accelerarea proceselor de hidratare este adusă de către unele săruri de calciu și anume de cele mai ușor solubile : $Ca(NO_3)_2$ și $CaCl_2$ — fig. 1.

Pentru același electrolit se observă — așa cum era de așteptat — o dependență a gradului de hidratare de proporția de adaos, care pentru termeni mici de întărire poate fi pusă pe seama influenței electroliților asupra proceselor de solvatare — fig.2; în domeniul de concentrații ale electroliților în care s-a lucrat, gradul de hidratare la o zi crește, de regulă,

Tabel 1

Gradul de hidratare al silicatului tribalcic la 1,7 şi 28 de zile de păstrare în funcţie de natura şi proporţia de electrolit folosit.

Liant	Electrolit	Adaos [%]	Grad de hidratare, [%]			Electrolit	Adaos [%]	Grad de hidratare [%]		
			1 zi	7 zile	28 zile			1 zi	7 zile	28 zile
$3\,CaO \cdot SiO_2$	$LiCl.\ H_2O$	0,0	49,0	63,0	76,0	$BaCl_2.\ 2H_2O$	0,5	49,7	56,8	75,5
		0,5	73,2	77,6	81,0		2,0	63,0	69,5	82,2
		2,0	77,0	82,4	87,0		5,0	69,0	75,4	82,6
		5,0	90,5	78,8	91,0	$Ca(NO_3) \cdot 4H_2O$	0,5	53,3	59,2	81,6
	NaCl	0,5	64,2	74,0	80,0		2,0	73,0	82,7	92,0
		2,0	68,0	83,0	87,0		5,0	68,6	82,3	87,4
		5,0	73,8	80,2	87,6		0,5	52,2	60,8	78,2
	KCl	0,5	73,5	78,5	83,0	$CaSO_4.2H_2O$	2,0	55,0	66,6	86,3
		2,0	66,0	79,2	88,8		5,0	55,9	71,8	86,5
		5,0	68,6	82,3	82,5		0,5	37,2	49,5	75,8
	$CaCl_2.6H_2O$	0,5	66,0	74,0	81,0	$CaCO_3$	2,0	49,0	58,5	78,5
		2,0	78,0	82,0	92,0		5,0	47,5	51,8	88,2
		5,0	82,0	88,0	91,0					
	$SrCl_2$	0,5	61,7	69,6	79,4					
		2,0	71,0	78,4	82,6					
		5,0	70,6	82,5	86,6					

cu cantitatea de electrolit folosită; este probabilă existenţa unui efect maxim (de altfel în cazul $SrCl_2$ se şi observă, iar pentru KCl acest maxim este probabil deplasat la valori mai mici ale concentraţiei). La termene mai mari de întărire, dat fiind interdependenţa fenomenelor care concură la realizarea întăririi liantului, corelaţia amintită este mai greu de pus în evidenţă.

Influenţa electroliţilor amintiţi asupra gradului de hidratare se poate explica prin modificările pe care le introduc aceştia în gradul de solvatare al liantului — aşa cum s-a mai arătat — precum şi în chilibrul ionic al soluţiei, aceste din urmă modificări determinînd fenomene de schimb ionic şi schimbări în suprasaturarea soluţiei cu consecinţe în procesele de formare şi stabilitate a noilor formaţiuni hidratate şi deci asupra vitezei de hidratare -hidroliză.

Tabel 2

Gradul de hidratare al silicatului tricalcic la 1,7 și 28 de zile de păstrare în funcție de natura și proporția de electrdlit folosit.

Liant	Electrolit	Adaos [%]	Grad de hidratare, [%]			Electrolit	Adaos [%]	Grad de hidratare, [%]		
			1 zi	7 zile	28 zile			1 zi	7 zile	28 zile
β-$2Ca.SiO_2$		0,0	16,1	24,3	33,0	$BaCl_2.2H_2O$	0,5	17,6	27,6	41,6
	$LiCl.H_2O$	0,5	17,3	26,3	33,1		2,0	20,2	31,9	54,2
		2,0	24,3	33,0	44,3		5,0	20,5	34,5	48,7
		5,0	29,1	40,3	46,1	$Ca(NO_3)\cdot 4H_2O$	0,5	18,0	28,6	46,2
	NaCl	0,5	18,1	27,8	35,1		2,0	20,2	34,8	61,6
		2,0	20,1	33,2	53,2		5,0	29,5	39,2	62,4
		5,0	27,5	39,4	45,0	$CaSO_4.2H_2O$	0,5	17,5	25,9	42,0
	KCl	0,5	17,0	27,7	39,4		2,0	20,1	32,3	53,3
		2,0	19,9	27,0	44,6		5,0	21,4	33,0	49,2
		5,0	28,2	37,0	46,5	$CaCO_3$	0,5	16,3	27,0	37,9
	$CaCl_2.6H_2O$	0,5	21,3	29,2	47,0		2,0	19,5	30,3	46,0
		2,0	21,6	34,1	56,1		5,0	18,3	31,4	45,1
		5,0	26,8	35,9	54,9					
	$SrCl_2$	0,5	14,5	25,8	36,8					
		2,0	18,9	28,3	46,2					
		5,0	19,2	33,0	46,4					

În ceea ce privește proprietățile mecanice ale sistemelor cercetate se poate spune că, în general, prezența electroliților în sistem conduce la îmbunătățirea acestora — tabel 3, tabel 4 și tabel 5 *. În cazul sistemelor de silicat tricalcic și ciment alitic cu electroliți, se remarcă influența pozitivă a adaosurilor folosite, încă din primele zile de întărire. În general, rezistența obținută pe sistemele cu ciment alitic urmărește îndeaproape valorile obținute pe sistemele corespunzătoare cu silicat tricalcic. Spre deosebire de acestea, în sistemele pe bază de silicat bicalcic, influența pozitivă a adaosurilor asupra rezistențelor mecanice se face simțită abia la perioade de întărire mai îndelungate (mai mari ca 28 de zile).

* Se dau rezistențele relative calculate prin raportare la rezistența probei fără adaos, întărită 1 zi.

Totuşi nu se poate spune că există o interdependenţă riguroasă între valorile gradului de hidratare şi valorile rezistenţelor mecanice pentru un anumit sistem, mai ales la termeni mici de păstrare (1—7 zile). La termeni

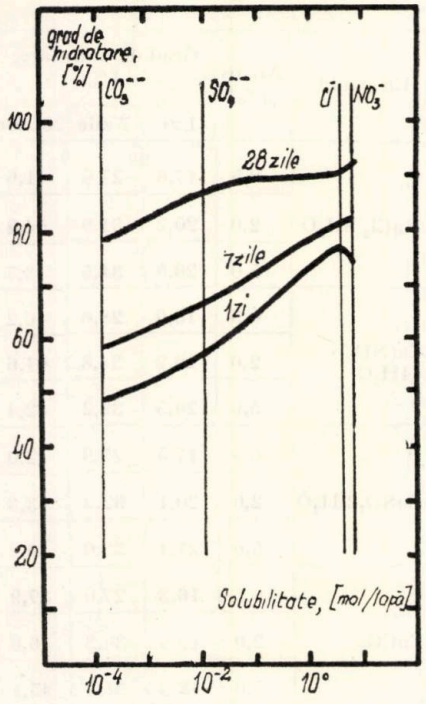


Fig. 1 — Variaţia gradului de hidratare în funcţie de solubilitatea sărurilor de calciu.

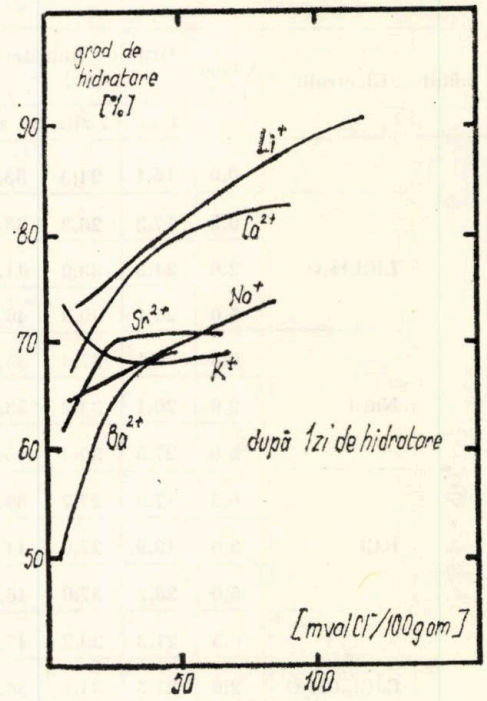


Fig. 2 — Variaţia gradului de hidratare, după o zi de păstrare, în funcţie de concentraţia electrolitului adăugat (clorură).

mai mari de întărire (28, 180 zile) însă, se poate remarca că, sistemele care prezintă cel mai mare grad de hidratare au şi cele mai bune rezistenţe mecanice; această constatare trebuie corelată atît cu natura chimico-morfologică a noilor compuşi de hidratare, cît şi cu evoluţia în timp a proceselor de coagulare-policondensare şi cristalizare (studiul acestor procese face obiectul unei alte lucrări).

3. — Scăderea temperaturii pînă la 5°C se consideră că nu acţionează dăunător asupra întăririi cimentului portland. Deşi procesele de difuzie şi reacţiile de hidratare — hidroliză sînt încetinite, ele continuă totuşi să aibă loc. Dacă temperatura scade sub 5°C şi îndeosebi sub zero, procesul de întărire este oprit cu desăvîrşire şi începe numai după dezgheţare. Dacă cimentul îngheaţă la vîrste mici, permeabilitatea lui creşte, iar rezistenţa scade ca urmare a accentuării microfisurării.

Încălzirea pastei de ciment (betonului), prin folosirea căldurii proprii a sistemului sau utilizînd surse exterioare de căldură, se impune în acest caz. Prima cale presupune fie folosirea unor cimenturi cu întărire rapidă, fie utilizarea acceleratorilor de priză şi întărire, fie şi a unora şi a altora. Ritmul susţinut al construcţiilor cere eliminarea întreruperilor în

Tabel 3

Rezistențele relative ale silicatului tricalcic, în prezența electroliților la 1,28 și 180 de zile,

	Electrolit	Adaos [%]	Rezistența relativă 1 zi	28 zile	180zile	Electrolit	Adaos [%]	Rezistența relativă 1 zi	28 zile	180zile
$3\,CaO \cdot SiO_2$		0,0	100	212	321	$SrCl_2$	0,5	114	251	338
	$LiCl.H_2O$	0,5	127	234	360		2,0	154	256	336
		2,0	179	260	380		5,0	151	250	340
		5,0	140	250	378	$BaCl_2 \cdot 2H_2O$	0,5	111	228	341
	NaCl	0,5	156	254	386		2,0	151	282	393
		2,0	178	261	390		5,0	150	280	382
		5,0	185	268	382	$Ca(NO_3)_2 \cdot 4H_2O$	2,0	145	282	406
	KCl	0,5	120	252	373	$CaSO_4.2H_2O$	2,0	121	260	386
		2,0	174	255	374	$CaCO_3$	2,0	106	228	377
		5,0	142	257	379					
	$CaCl_2 \cdot 6HO_2$	0,5	121	255	378					
		2,0	160	277	392					
		5,0	119	275	391					

Tabel 4

Rezistențele relative ale silicatului bicalcic în prezența electroliților la 1,28 și 180 de zile.

Liant	Electrolit	Adaos [%]	Rezistența relativă 1 zi	28 zile	180zile	Electrolit	Adaos [%]	Rezistența relativă 1 zi	28 zile	180zile
β-$2CaO \cdot SiO_2$		0,0	100	385	696	$SrCl_2$	0,5	103	416	962
	$LiCl.H_2O$	0,5	106	391	837		2,0	98	432	968
		2,0	103	435	915		5,0	94	410	918
		5,0	97	425	934	$BaCl_2.2H_2O$	0,5	97	432	808
	NaCl	0,5	109	437	918		2,0	103	450	1090
		2,0	112	444	980		5,0	94	437	1070
		5,0	94	435	968	$Ca(NO_3) \cdot 4H_2O$	2,0	118	462	1100
	KCl	0,5	103	425	940	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	2,0	94	435	975
		2,0	112	432	946	$CaCO_3$	2,0	97	440	843
		5,0	94	435	962					
	$CaCl_2.6H_2O$	0,5	97	428	952					
		2,0	112	457	1060					
		5,0	115	440	1040					

activitatea şantierelor, impune o muncă continuă indiferent de condiţiile de temperatură. Toate acestea determină ca şi metoda betonării în prezenţa adaosurilor chimice, metodă simplă şi eficentă, mai ales în condiţii

Tabel 5

Rezistenţele relative ale unui ciment alitic, în prezenţa a 2% electrolit, la 1,28 şi 180 de zile.

Liant	Electrolit	Adaos [%]	Rezistenţă relativă		
			1 zi	28 zile	180 zile
Ciment alitic (74,37% $3CaO.SiO_2$)		0,0	100	218	272
	$LiCl.\ H_2O$	2,0	171	272	311
	NaCl	2,0	180	276	332
	KCl	2,0	176	270	326
	$CaCl_2.\ 6H_2O$	2,0	157	295	360
	$SrCl_2$	2,0	151	266	310
	$BaCl_2\ 2H_2O$	2,0	149	301	364
	$Ca(NO_3)_2.\ 4H_2O$	2,0	153	300	373
	$CaSO_4.\ 2H_2O$	2,0	168	295	345
	$CaCO_3$	2,0	115	291	327

de temperatură neexcesiv de scăzută, să prezinte interes practic. Folosirea ei raţională solicită încă studii.

Utilizarea adaosurilor chimice (electroliţi în particular), singure sau asociate, a condus la rezultate utile din punctul de vedere abordat — acela al betonării la temperaturi scăzute. Ample cercetări în această direcţie, mai accesibile nouă, au fost desfăşurate de şcoala sovietică. Din punctul de vedere al condiţiilor noastre de climă, interesează, de pildă şi studiile realizate în Bulgaria. Dintre adaosurile care au condus la bune comportări ale cimenturilor, la întărirea în condiţii de temperaturi scăzute, sînt de amintit K_2CO_3, KNO_2, KNO_3, NaCl, $NaNO_3$, $NaNO_2$, $CaCl_2$, $Ca(NO_3)_2$, $Ca(NO_2)_2$, amestecuri ale acestor săruri, adaosuri combinate de electroliţi cu plastifianţi (aceştia din urmă determinînd scăderea raportului A/C, cu consecinţele pe care le implică). Acţiunea unora din electroliţii menţionaţi, cercetată în lucrarea de faţă pentru sistemele de silicaţi de calciu — apă — electroliţi şi ciment portland alitic — apă — electroliţi, s-a dovedit — aşa cum s-a arătat — a fi deosebit de eficientă, în cazul întăririi în condiţii normale; era deci de aşteptat ca folosirea lor în condiţiile întăririi la temperatură scăzută să fie utilă, mai ales la realizarea unei acţiuni conjugate, determinată de adăogarea unor amestecuri mixte. Pentru exemplificare se dau rezistenţele mecanice relative, obţinute pe cimenturi întărite la — 15°C în prezenţă de adaosuri chimice mixte (rezistenţele se raportează

la valorile obţinute pentru probele de ciment fără adaosuri, întărite în condiţii normale, aceiaşi perioadă) [20] — tab. 6.

Tabel 6

Rezistenţele relative obţinute pe un ciment întărit în prezenţa adaosurilor mixte la −15°C,

Liant	Natura adaosului	Cantitateade adaos [%]	Rezistenţa relativă		
			3 zile	7 zile	28 zile
Ciment Portland	Fără adaos	0,0	0,065	0,080	0,143
	$NaNO_2$	5	0,125	0,175	0,302
	K_2CO_3 + plastifiant	5+0,6	0,310	0,310	0,447
	K_2CO_3+plastifiant	10+1,2	0,425	0,400	0,532
	$CaCl_2$+plastifiant	8+0,8	0,625	0,710	0,625
	$CaCl_2$+plastifiant	3+0,4	0,065	0,091	0,182
	$NaNO_2$ +$CaCl_2$ +plastifiant	5+2+0,1	0,320	0,397	0,547
	$NaNO_2$+K_2CO_3 + plastifiant	5+3+0,4	0,230	0,240	0,435
	K_2CO_3+$CaCl_2$+plastifiant	3+3+0,8	0,420	0,350	0,637
	$CaCl_2$+NaCl+ plastifiant	3+5+0,8	0,170	0,247	0,452
	$NaNO_3$+NaCl+ plastifiant	4+1+0,2	0,130	0,182	0,372

4. — Rezultatele obţinute conduc la următoarele concluzii mai importante :

a. — adaosurile de electroliţi cercetate accelerează procesele de hidratare şi de dezvoltare a structurii de rezistenţă atît ale silicaţilor de calciu cît şi ale cimentului alitic studiat ;

b. — această influenţă se manifestă în directă corelaţie cu natura electroliţilor şi cantitatea în care acestea se folosesc în sistemele de întărire examinate ;

c. — efectele acceleratoare cele mai intense le exercită adaosurile de $Ca(NO_3)_2$ şi $CaCl_2$;

d. — efectele constatate în condiţii de întărire normală se regăsesc şi în cazul întăririi la temperaturi scăzute.

Catedra de tehnologia silicaţilor şi compuşilor oxidici.
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. — *E. P. Andréeva, E. E. Segalova* — Dokl. Akad. Nauk, SSSR 158, 1352, (1964).
2. — *G. L. Kalousek* — Mat. Res. Stand (Phyladelphia) *5* (6), 292 (1965)
3. — *P. P. Budnikov, L. A. Kroiciuk* — Dolk. Akad. Nauk, SSSR *173* (3) 630 (1967).

4. — *H. Manche* — Rev. Mat. Constr., (541), 277 (1960)
5. — *A. Celani, M. Colepardi, A. Rio* — Ind. Ital. Cemento (7), 669 (1966)
6. — *V. B. Ratinov, T. I. Rosenberg, A. I . Smirnova* — RILEM Moscova 107 (1964).
7. — *N. G. Kurczyk, H. E. Schwiete* — Tonind. Zeitung. *84* (24), 585, (1960).
8. — *O. Kallauner, M. Malouşek* — Silicatechnik (9), 401 (1961)
9. — H. *Gronow* — *Z. K. G. 2*, 113, (1949).
10. — *K. Koyonady* — Zement *23*, 705, (1934).
11. — *G. Balasz, E. Tamas* — RILEM, Moscova, 113 (1964).
12. — *N. Kawada, A. Nemoto* — *Z.K.G.20* , 65 (1967).
13. — *E. Candlot* — Ind. Belge *13*, 182 (1886).
14. — *S. Z. Makarov, I. I. Volimov.* Izvest. Fiz. Him. Akad. Nauk. SSSR, *25*, 331 (1954).
15. — *A. M. Rozenberg* — *J.* Amer. Concr. Inst. *10*, 1261, (1964).
16. — *W. Richartz* — *Z. K. G. 22* (10), 447 (1969). *
17. — *V. S. Ramachandran* — RILEM Mat. Constr. Materials. Struct. *4*, (19), 3 (1971).
18. — *I. Teoreanu, M. Muntean* — Al 39-lea Congres de Chimie Ind. vol. 3, 11/79, 1970, Bucureşti,
19. — *Iu. M. Butt.* — Practicum po tehnologhii viajuşcih veşcestv, Moscova (1953).
20. — *G. Babacev, A. Nikolova* — Al 39-lea Congres. Int. de Chimie Ind., Bucureşti. (1970)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

C.Z.: 666.59

SEMIPORȚELAN DIN MATERII PRIME ROMÂNEȘTI*

VIORICA CIMPU

Semiporțelanurile, împreună cu faianțele și porțelanurile sînt mase ceramice care se situează în sistemul $R_2^IO - (R^{II}O) - Al_2O_3 - SiO_2$ și aparțin tipului mulitic după clasificarea făcută de Solacolu și Dinescu [9, 10, 12]. Zona pe care acestea o ocupă se află în triunghiul de paragenză I care formează subsistemul: feldspat (NAS_6, KAS_6) — cuarț (SiO_2) mulit (A_3S_2) (fig 1a, 1b).

În conformitate cu studiile și concluziile unor cercetători [1 . . .8] Solacolu și Dinescu [10] au conchis că nu se poate calcula compoziția fazală a maselor ceramice în ipoteza echilibrul termic ci aplicînd relațiile stabilite de autori pe baza mecanismului topirii independente, contribuție teoretică a autorilor.

Potrivit acestei teorii delimitarea zonelor de porțelanuri respectiv faianțe și semiporțelanuri se face în funcție de proporția de fază lichidă: faianțele și semiporțelanurile conțin sub 50% fază vitroasă. În fig. 1c sînt date izohigrele (curbe de egală fază lichidă) pentru temperatura 1200°C, în sistemul $N.A.S_6 - SiO_2 - R_2O_3$ [10].

Din punct de vedere al compoziției și proprietăților semiporțelanul este intermediar faianței și porțelanului. Mai ieftin decît porțelanul, acesta îl poate înlocui în fabricarea obiectelor de menaj și chiar a unor obiecte industriale cu proprietăți aproape tot așa de bune. Costul mai redus al semiporțelanului rezultă din temperatura de ardere mai joasă (1250 — 1300°C) cît și din exigența nu prea ridicată în ceea ce privește calitatea materiilor prime. Produsul este superior faianței în privința proprietăților iar tehnologia de fabricație este asemănătoare acesteia.

Poate înlocui faianța sanitară și de menaj cu rezultate mult mai bune.

În țara noastră s-a fabricat pînă în prezent numai porțelan (care necesită unele materii prime de import) și faianță.

Înlocuirea parțială a porțelanului prin semiporțelan pe bază de materii prime indigene ar duce la realizarea unor economii. Deasemeni înlocuirea fainței prin semiporțelan ar duce la creșterea calității produselor. Actualele fabrici de faianță ar putea trece la producerea semiporțelanului prin unele adaptări simple.

* Manuscris predat la redacție la data de 16 mai 1971

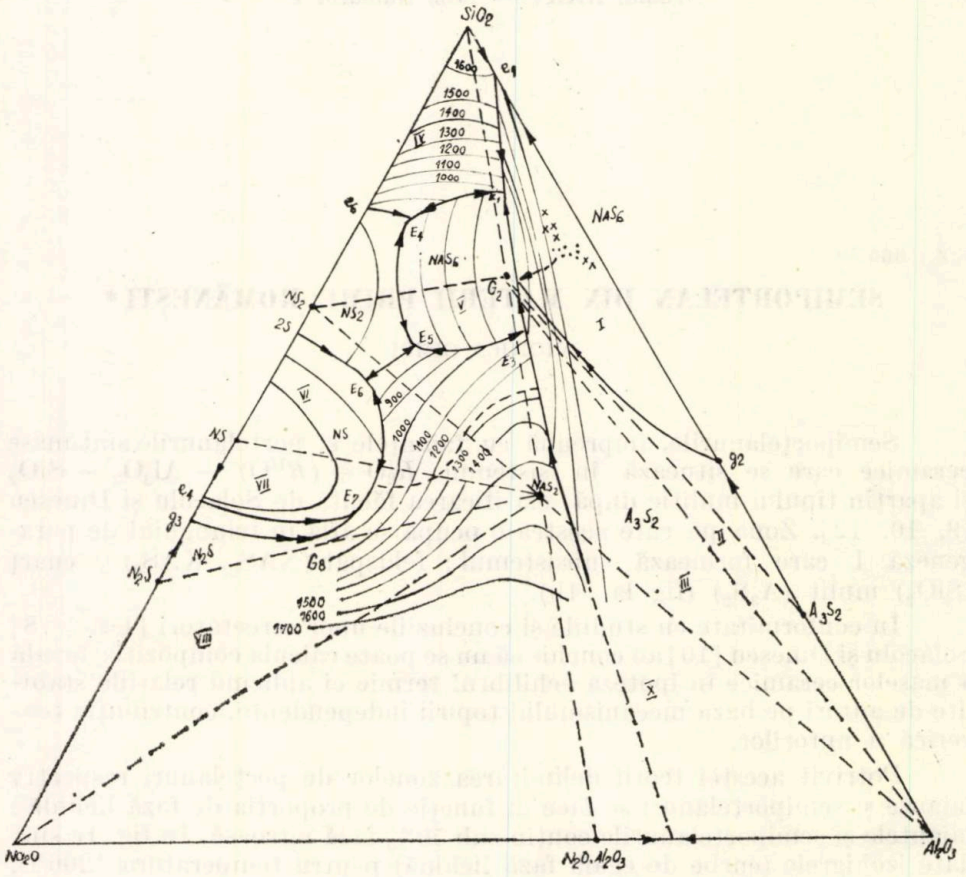


Fig. 1 a

Din aceste motive ne-am propus să studiem posibilitatea obținerii unor mase de semiporțelan din materii prime românești. În acest scop s-au alcătuit 14 amestecuri care ocupă în sistemul Na_2O — Al_2O — SiO_2 locurile indicate în fig. la și 1b. Din fig. 1c reiese că aceste amestecuri ocupă o zonă ce corespunde faianței și semiporțelanului la temperatura 1200°C. Cu ridicarea temperaturii zona pentru faianță și semiporțelan se restrînge. Astfel la 1300°C izohigra de 50% ocupă aproximativ locul celei de 40% fază vitroasă la 1200°C. Unele mase cum sînt : 6, 7, 8, și I, II, III, IV vor avea la 1300°C peste 50% fază lichidă.

Partea experimentală

Ca materii prime s-au folosit : caolin de Aghireș, argilă de Medgidia, feldspat de Muntele rece, nisip de Văleni, argilă de Suncuiuș, caolin de Hargita și caolin de Parva. Analizele acestor materii sînt date de tabela 1.

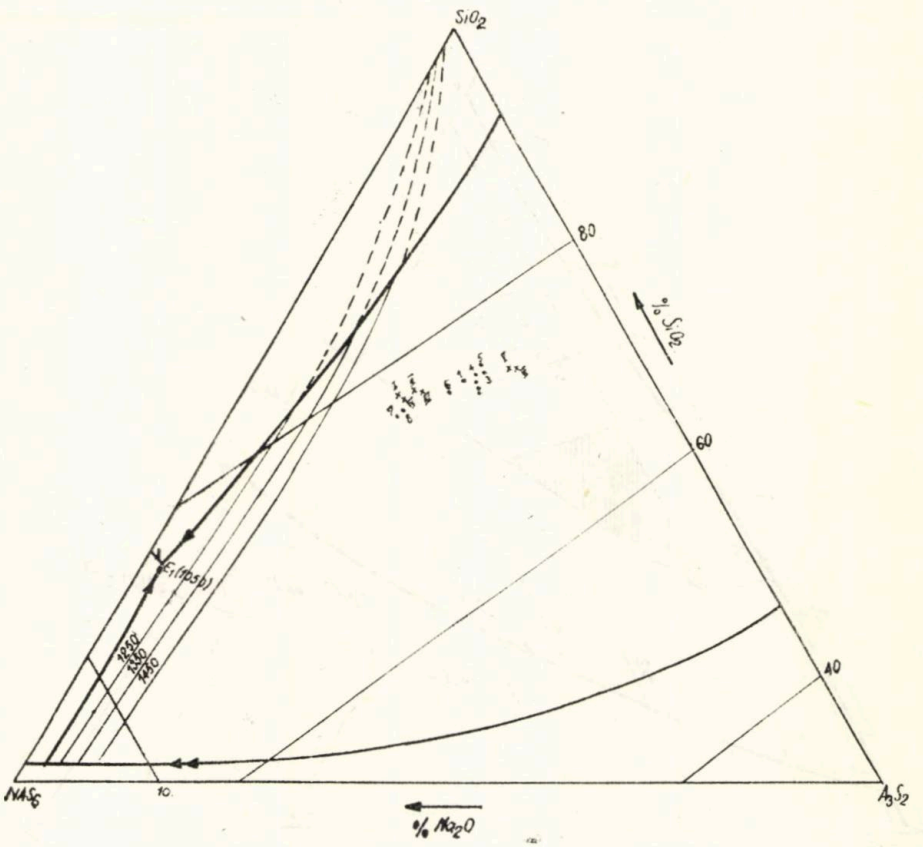


Fig. 1 b

Tabela Nr. 1

Compoziţia chimică a materialor prime

	Pc %	SiO_2 %	Al_2O_3 %	Fe_2O_3 %	3CaO %	MgO %	R_2O %
Caolin de Aghireş	12,20	53,20	33,10	0,973	0,87	0,30	1,05
Argilă de Suncuiuş	11,98	50,03	32,32	2,45	0,29	0,38	0,83
Feldspat de M. Rece	0,55	67,20	20,60	0,41	1,70	0,58	8,25
Nisip de Văleni	0,32	98,46	0,80	0,12	0,30	—	—
Caolin de Harghita	10,60	51,10	32,60	1,35	1,60	0,83	1,90
Caolin de Parva	5,31	71,96	15,69	1,53	1,99	0,17	3,60
Argilă de Medgidia	8,71	60,12	24,41	2,35	1,10	1,25	1,85

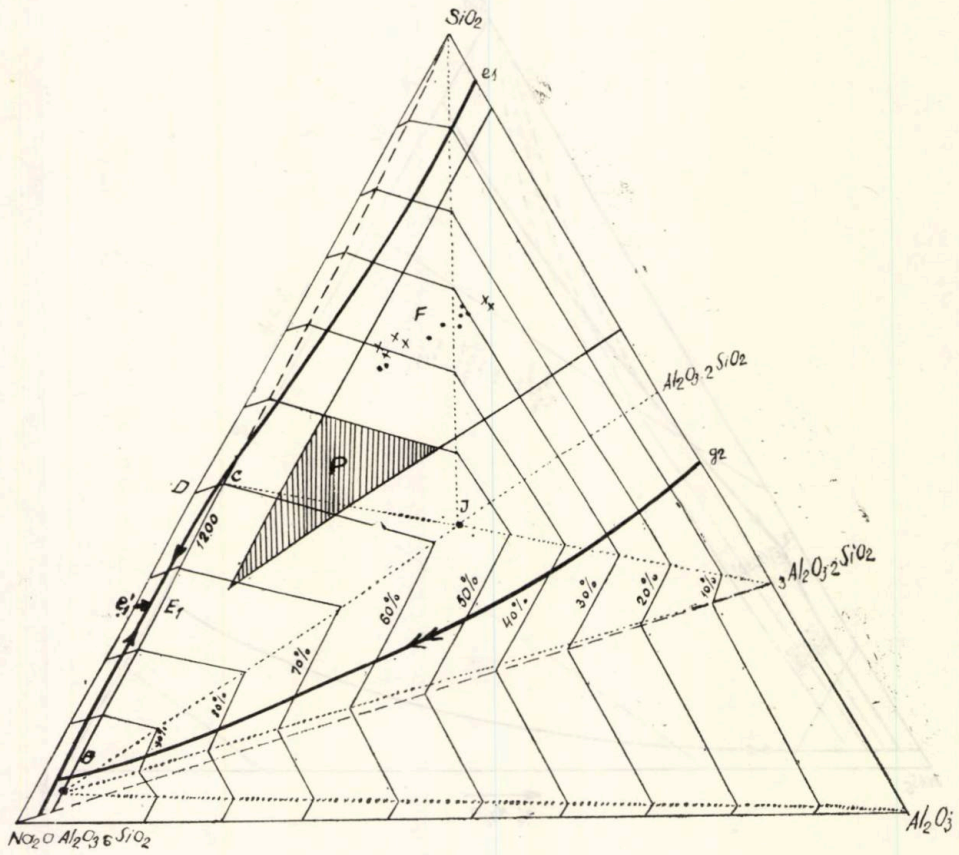


Fig. 1 c

Pentru tatonarea condiţiilor de lucru s-au alcătuit mai întîi 8 amestecuri, după cum urmează :

Masa	Caolin de Aghireş %	Argilă de Suncuiuş %	Cuarţ %	Feldespat %
1	60	—	30	40
2	42	18	30	10
3	30	30	30	10
4	18	42	30	10
5	—	60	30	10
6	25	30	30	15
7	20	30	30	20
8	10	40	30	20

Materiile prime fin măcinate, fără rezidiu pe sita de 4900 ochiuri/cm^2, au fost amestecate în proporţiile indicate şi omogenizate uscat cu ajutorul unui agitator rotativ. S-au studiat mai întîi proprietăţile pastei crude şi

anume : apa de fasonare, puterea liantă, indicele de plasticitate. Rezultatele sînt concordante cu acelea prevăzute în literatură și sînt date în tabela 2. Prin presarea semiuscată a amestecurilor s-au confecționat epruvete în formă de cub cu dimensiunile 1,41 × 1,41 × 1,41 (cm)

Tabela nr. 2

Proprietățile pastei pentru amestecurile 1, 2, ...

Incercări	Amestecuri							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Apa de fasonare %	21,923	20,77	21,30	21,30	20,39	20,94	20,88	20,24
Putere liantă (g/cm²)	134	137,8	136	135	138	136	138	137
Indicele de plasticitate după Pfep-ferkorn	22,8	22,75	22,5	21,0	20,6	21,8	21,50	20,6

După uscare epruvetele au fost arse la temperaturile de 1150, 1200, 1250 și 1280°C.

Pe epruvetele arse s-au făcut determinări de adsorbție, contracție, greutate volumetrică, rezistență la compresiune și observarea culorii ciobului. Rezultatele obținute sînt prezentate în diagramele din fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7 și în tabela 3.

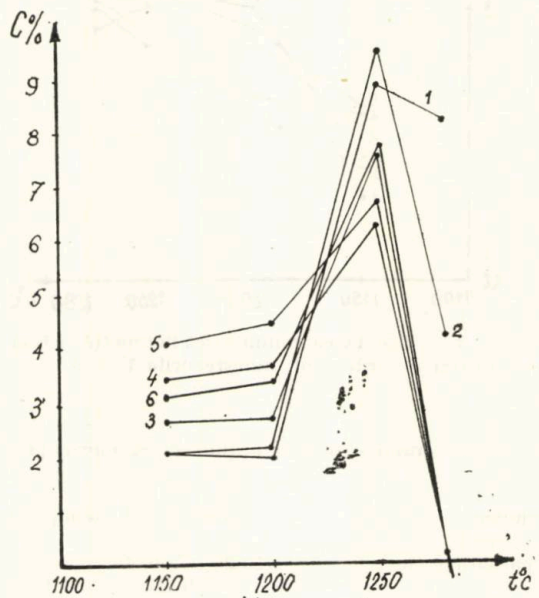


Fig. 2 — Contracție în funcție de temperatura de ardere pt. amestecurile 1, 2, 3 . . .

Din analiza comparativă cu datele din literatură (anexa 1) rezultă că amestecurile 1 și 2 corespund încă de la 1200°C semiporțelanului.

Tabela nr. 3

Aspectul şi culoarea probelor arse pentru amestecurile 1, 2 . . . .

Masa	1150C°	1200°C	1250°	1280°C
1	alb	alb	alb-gălbui	alb-cenuşiu
2	alb cu nuanţă gălbuie	alb-gălbui	alb-gălbui	cenuşiu-vitrifiat
3	slab gălbui	alb-gălbui	alb-cenuşiu	idem
4	gălbui	alb-gălbui	alb-cenuşiu	idem
5	gălbui-cenuşiu slab	alb-cenuşiu	alb-cenuşiu	idem, expandat
6	gălbui-cenuşiu	alb-cenuşiu	cenuşiu	idem
7	cenuşiu vitrifiat	cenuşiu-vitrifiat exp	alb-cenuşiu topit	topit
8	cenuşiu, vitrifiat	idem	idem	idem

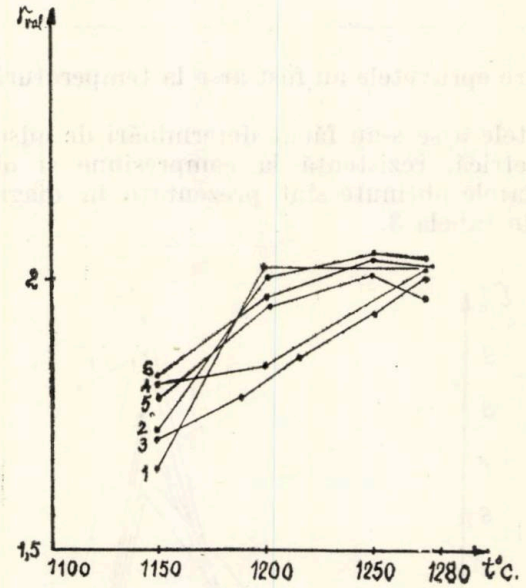


Fig. 3. — Greutatea volumetrică în funcţie de temperatura de ardere pt. amestecurile 1, 2, 3,.....

ANEXA 1*)

Proprietăţile unor mase ceramice pentru produsele de menaj [11] pag. 406 — 409

Proprietăţi fizico-tehnice	faianţă	semiporţelan	porţelan
Greutate specifică (g/cm³)	2,6	—	2,4—2,5
Greutate specifică aparentă (g/cm³)	1.925—1,96	—	2,251—2,40
Absorbţiea apei %	9—12(14)	3—8	sub 0,5
Rezistenţa la compresiune Kgf/cm²	(—)	1350—2000	4500—5500
Rezistenţa la încovoiere Kgf/cm²	130—230	380—450	700—900
Rezistenţa la şoc mecanic Kgfcm/cm²	1,5—2,0	1,1	1,8—2,2

* Produsele din ceramică fină vitrificată au proprietăţile asemănătoare cu ale porţelanului

ANEXA 2

Proprietăţile unor mase ceramice pentru produsele sanitare [11] pag. 609

Proprietăţi fizico-tehnice	Faianţă sanitară	Semiporţelan sanitar	Porţelan sanitar
Absorbţia apei %	10—12	3—5	0,2—0,5
Greutate volumetrică (g/cm³)	1,92—1,96	2,00—2,2	2,25—2,30
Rezistenţa la compresiune Kgf/cm²	1 000	1500—2000	4000—5000
Rezistenţa la încovoiere Kgf/cm²	150—300	380—450	700—800
Rezistenţa la încovoiere prin şoc mecanic kgfcm/cm²	1,5—1,8	1,5—2,0	2, —2,3

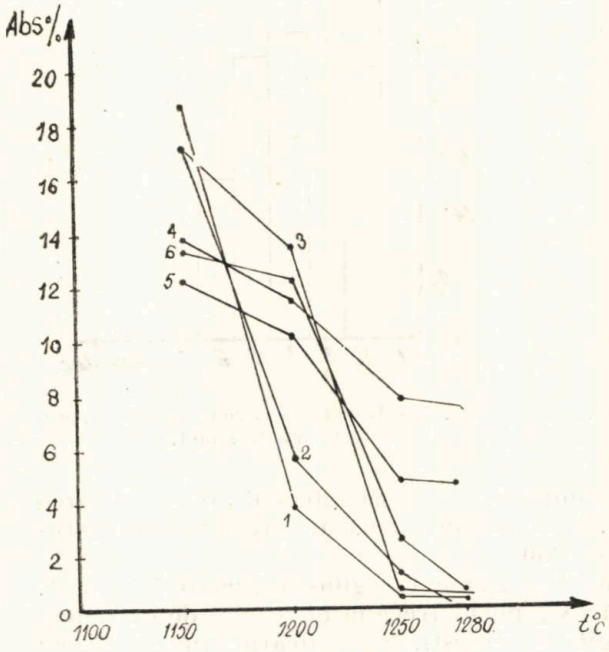


Fig. 4 — Absorbţia în funcţie de temperatura de ardere pt. amestecurile 1, 2, 3, . . .

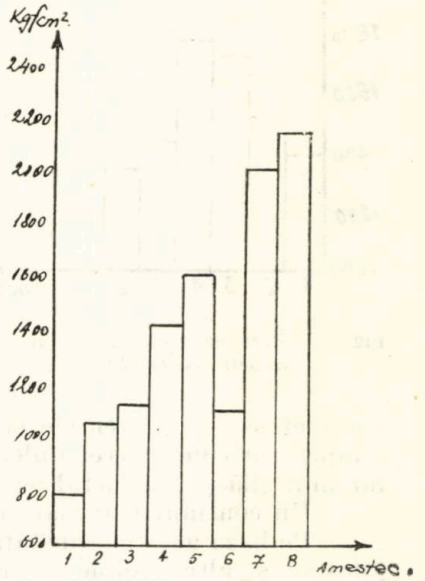


Fig. 5 — Rezistenţa la compresiune pt. probele arse la 1150°C

Se recomandă pentru ceramica de menaj. Cu ridicarea temperaturii rezistenţele mecanice cresc dar culoarea devine puţin mai închisă şi ar putea folosi ca semiporţelan tehnic.

Amestecurile 3,4 ar putea folosi ca faianţă la 1200°C, semiporţelan la 1230°C sau ceramică vitrifiată la 1280°C. Culoarea slab cenuşie impune folosirea de glazuri colorate.

Masele 5, 6, ar putea folosi ca faianţă sanitară la 1200°C, semiporţelan (5) şi respectiv ceramică vitrifiată (6) la 1250 şi 1280°C.

În ceea ce priveşte masele 7 şi 8 rezultă că ar putea fi folosite ca produse de ceramică fină vitrifiată. Cantitatea de fază lichidă fiind mare chiar la 1150—1200°C, iar greutatea volumetrică fiind destul de însemnată (2,2 — 2,65) rezistenţele mecanice ale acestora ar putea fi mărite şi deformarea înlăturată prin mărirea conţinutului de SiO_2 în amestec.

În general, se observă că odată cu creşterea conţinutului în argilă scade absorbţia de apă iar contracţia creşte. Acesta se datoreşte conţinutului mai bogat în fondanţi ai argilelor faţă de caoline. Totodată cresc greutăţile

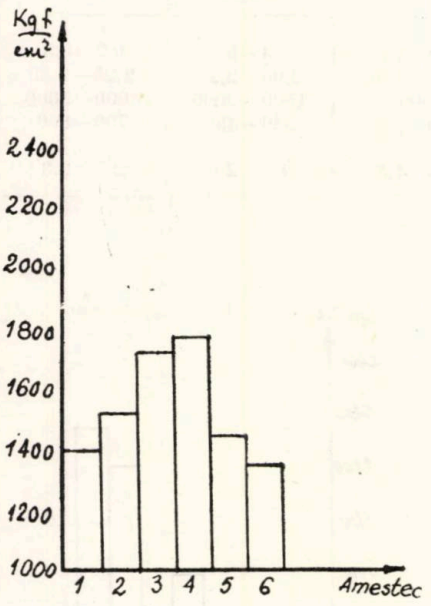


Fig. 6 — Rezistenţa la compresiune pt. probele arse la 1200°C

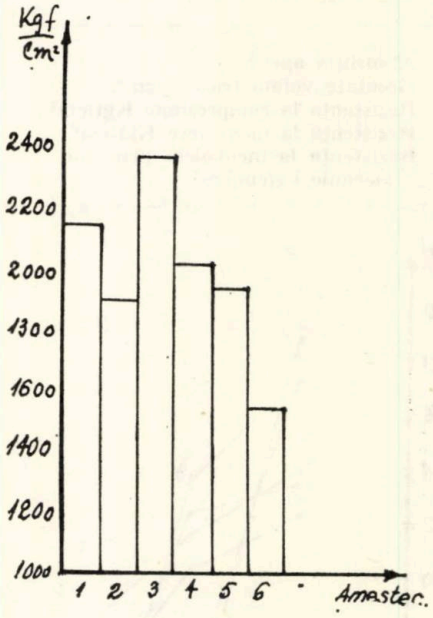


Fig. 7 — Rezistenţa la compresiune pt. probele arse la 1250°C

volumetrice şi rezistenţele la comprimare. Acelaş efect îl are şi ridicarea temperaturii de ardere. Culoarea se închide pe măsura creşterii conţinutului în argilă şi în general peste 1250° .

Un conţinut mai mare de 40% element argilos, nu poate fi tolerat.

Pe baza acestor constatări s-a putut trece la un studiu de extindere folosind şi alte caoline şi argile româneşti. S-au alcătuit amestecurile :

Masa	Cuarţ	Feldspat	Caolin de Harghita	Caolin de Aghireş	Caolin de Parva	Argilă de Suncuiuş	Argilă de Medgidia
I	30	10	—	—	30	30	—
II	30	10	—	—	20	40	—
III	30	10	—	40	—	—	20
IV	30	10	—	20	—	—	40
V	30	—	10	40	—	20	—
VI	30	—	10	20	—	40	—

Asupra acestor amestecuri s-au făcut aceleaşi determinări ca şi în cazul precedent.

Rezultatele sînt prezentate în tabelele 4 şi 5 şi în diagramele din fig. 8. 9, 10, 11, 12, 13,

Tabela nr. 4

Proprietățile pastelor pentru amestecului I, II. . . .

Incercări	Amestecuri						Valori găsite în literatură
	I	II	III	IV	V	VI	
Apa de fasnonare %	19,64	19,94	23,56	24,82	24,29	24,06	20—30 %
Putere liantă (g/cm²)	136	135	135	138	138	137	50—200 %
Indice de plasticitate	21,3	21,6	22,7	23,6	26,2	21	20—24

Tabela nr. 5

Aspectul și culoarea probelor arse din amestecurile I, II ...

Amestec	1150°C	1200°C	1250°C	1280°C
I	alb cenușiu vitrifiat	alb-cenușiu	alb-cenușiu-vitrifiat	alb-cenușiu expandat
II	idem	idem	idem	idem
III	alb-gălbui-slab	roz-gălbui	bej	gălbui maroniu topit
IV	alb-gălbui	gălbui-cărămiziu	maroniu	maroniu expandat topit
V	alb	alb	alb	alb
VI	alb cu o tentă gălbuie	alb cu o tentă slab slab crem	crem alb cu o tentă alb cu o tentă slab gălbuie	alb cu o tentă slab crem

Se constată că amestecurile I și II pot folosi ca semiporțelan tehnic la 1200°C sau ca ceramică fină vitrificată la 1250°C.

Masele III și IV se pot folosi ca faianță sanitară cu glazură colorată

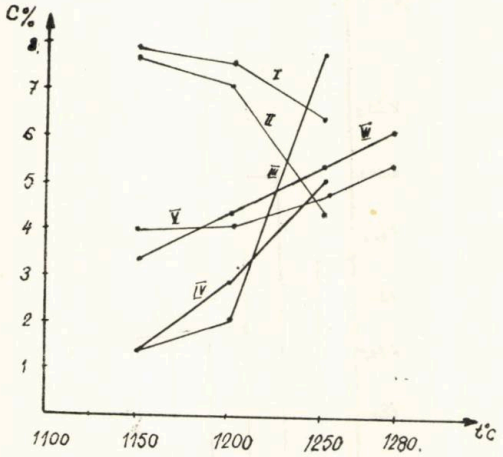


Fig. 8 — Contracția în funcție de temperatură pt. amestecurile I, II, III, IV, V, VI.

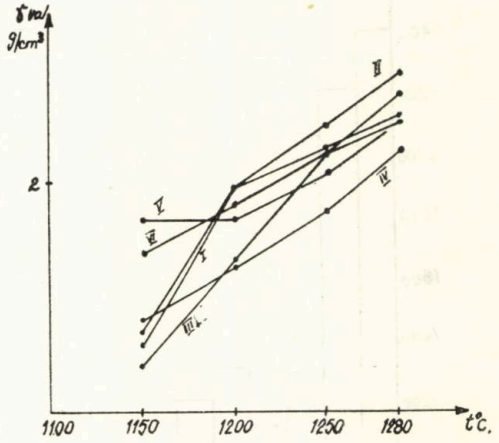


Fig. 9 — Greutatea de volum în funcție de temperatura de ardere pt. probele I, II, III,

sau ca majolică la 1200°, iar la 1250 și respectiv 1280°C, drept ceramică fină vitrifiată. Masele V și VI avînd culoare mai frumoasă ar putea folosi ca semiporțelan de menaj (1250°C).

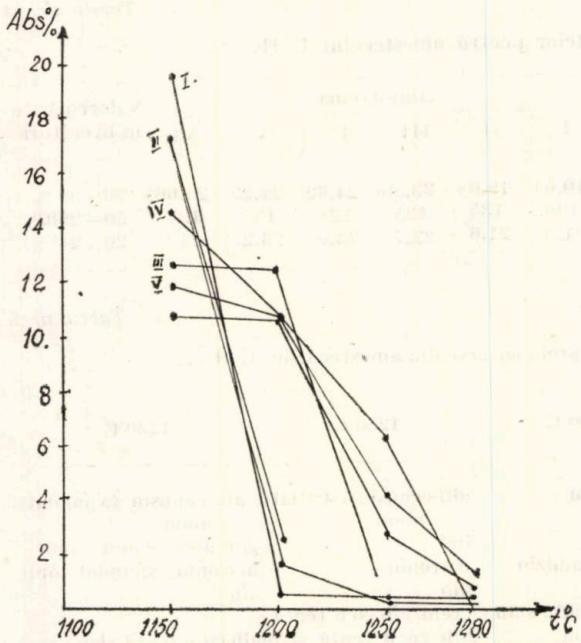


Fig. 10. Absorbția în % în funcție de temperatură de ardere pt. I, II. . . .

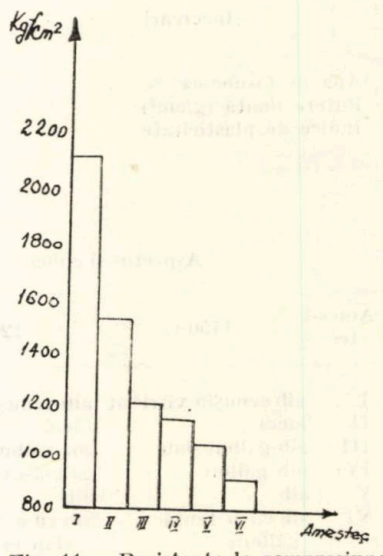


Fig. 11 — Rezistența la compresiune pt. probele arse la 1150°C

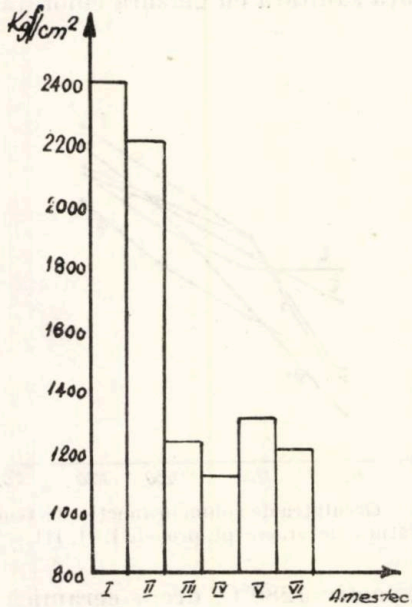


Fig. 12 — Rezistența la compresiune pt. probele arse la 1200°C

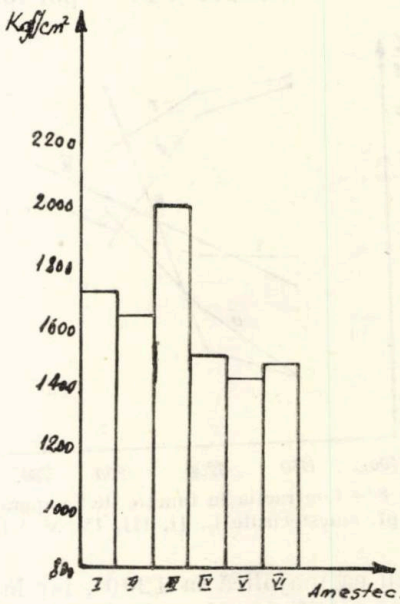


Fig. 13 — Rezistența la compresiune pt. probele arse la 1250°C

În concluzie, masele studiate pot folosi fie ca semiporţelan fie ca faianţă sau ceramică fină vitrifiată. Dacă aceştia din urmă i se aplică o glazură colorată poate folosi ca produs decorativ în construcţii şi respectiv ca produs de ceramică antiacidă în industria chimică sau ca veselă de menaj rezistentă la foc.

Pînă în prezent, la noi în ţară s-a fabricat numai ceramică fină antiacidă (la Combiantul Chimic Tîrnăveni).

Gama de produse ar putea fi lărgită foarte mult pe baza rezervelor de materii prime din ţară, realizîndu-se astfel o varietate tot mai mare de produse cerute atît în economia naţională cît şi la export.

Catedra de tehnologie chimică generală
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *J. Wolf* — Sprechsaal 1927, id. 1932.
2. *J. F. Schairev N. L. Bowen* — Journ Amer. Sci 1947.
3. *Tuttle M. A., R. L.* Cook — Journ Amer-Cer Soc. 1949.
4. *Radczewski O. E* — Tonind Ztg. 1953"
5. *Konopick J. K.* — Ber. Deutsch Ker. Ges. 1956.
6. *Freund F.* — Naturwiss 1959.
7. *Sundis N.* — Trans. Brit. Cer. Soc. 1960.
8. *Reich H. F.* — Ber. Deutsh Ker Ges 1960
9. *Solaclu Ş* — Chimia fizică a silicaţilor tehnici
10. *Solacolu S, Dinescu R.* — Bulletin de la Soc. franc. de Ceramique 1961 nr. 53
11. *Budnicov P.P.* — Tehnologia ceramicei şi materialelor refractare Ed. 1962.
12. *Dinescu R.* — Bazele tehnologiei Ceramicii şi refractarelor Ed. tehn. 1966
13. *Kukuşeva A. M.* — Factorii care influenţează procesul de vitrificare a porţelanurilor mol T. D. 1969. Inst. Polit. Buc.).
14. x x x STAS 229—1953.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

MECANICĂ

C:Z 531.32

O METODĂ DE DETERMINARE A DEFORMAȚIILOR INTR-O BARĂ DREAPTĂ ACȚIONATĂ DE SARCINI TRANSVERSALE DISCONTINUI*

DUMITRU VOICULESCU

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate a grinzilor drepte acționate de sarcini transversale este în general o ecuație diferențială liniară de ordinul patru cu coeficienți constanți sau variabili de forma :

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = p(x) \tag{1}$$

În cazul sarcinilor concentrate, $p(x)$ poate fi pus sub forma unei sume de funcții Dirac. Vom presupune că sarcina concentrată P acționează în origină ($x = 0$) ceea ce nu micșorează cu nimic generalitatea.

Soluția ecuației diferențiale pe o porțiune neîncărcată de bară, imediat în stînga unui punct de discontinuitate este de forma :

$$v = c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + c_3v_3(x) + c_4v_4(x) \tag{2}$$

în care $v_1(x)$, $v_2(x)$ v_3 (x) v_4 (x) sînt soluții particulare, liniar independente ale ecuației diferențiale omogene.

Pe diferitele porțiuni neîncărcate, datorită condițiilor-bilocale, constantele nu sînt în general aceleași. Dacă se consideră două deschideri invecinate și vrem să punem în evidență vechile constante și diferențele dintre vechile constante și noile constante, vom scrie soluția ecuației pe porțiunea învecinată sub forma :

$$v = (c_1 + \Delta c_1)v_1(x) + (c_2 + \Delta c_2)v_2(x) + (c_3 + \Delta c_3)v_3 + (c_4 + \Delta c_4)v_4(x) \tag{3}$$

Soluția pe ambele porțiuni învecinate se scrie cu ajutorul funcției $H(x)$ * a lui Heviside astfel :

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + (\Delta c_1v_1 + \Delta c_2v_2 + \Delta c_3v_3 + \Delta c_4v_4) \cdot H(x) \tag{4}$$

* Manuscris predat la data de 16 decembrie 1971

* Funcția $H(x)$ este definită astfel : pentru $x<0$ $H(x) = 0$ pentru $x \geqslant 0$ $H(x) = 1$

Trebuiesc determinate constantele Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4.

Să presupunem cazul cel mai general cînd și în condițiile la limită apar discontinuități, adică în secțiunea $x = 0$ am avea discontinuitatea de săgeată Δv, de rotire $\Delta\varphi$, de moment ΔM (moment exterior), de forță exterioară ΔT (forță exterioară concentrată).

Ținînd seama că :

$$\varphi = v' \qquad M = -EIv'' \qquad T = -EIv''' \qquad p = EIv^{IV} \tag{5}$$

se obține scăzînd relațiile (3) și (2), și derivatele lor succesive în punctul $x = 0$, următorul sistem de ecuații liniare algebrice pentru constantele Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4 :

$$\begin{aligned}
&\Delta c_1 v_1(0) + \Delta c_2 v_2(0) + \Delta c_3 v_3(0) + \Delta c_4 v_4(0) = \Delta v \\
&\Delta c_1 v_1'(0) + \Delta c_2 v_2'(0) + \Delta c_3 v_3'(0) + \Delta c_4 v_4'(0) = \Delta\varphi \\
&\Delta c_1 v_1''(0) + \Delta c_2 v_2''(0) + \Delta c_3 v_3''(0) + \Delta c_4 v_4''(0) = -\frac{\Delta M}{EI} = -\frac{\mathfrak{M}}{EI} \\
&\Delta c_1 v_1'''(0) + \Delta c_2 v_2'''(0) + \Delta c_3 v_3'''(0) + \Delta c_4 v_4'''(0) = -\frac{\Delta T}{EI} = -\frac{P}{EI}
\end{aligned} \tag{6}$$

în care $\Delta c_k = c_k(+0) - c_k(-0)$

Din rezolvarea acestui sistem, rezultă Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4, care înlocuite în (4) dau soluția valabilă pe ambele porțiuni de bară.

În cazul cînd punctul de discontinuitate are abscisa x_0, ecuația (4) devine :

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + (\Delta c_1 v_1 + \Delta c_2 v_2 + \Delta c_3 v_3 + \Delta c_4 v_4) \cdot H(x - x_0) \tag{7}$$

unde Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4 au aceleași valori rezultate din (6)

Expresiile Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4 sînt liniare Δv, $\Delta\varphi$, $\frac{\mathfrak{M}}{EI}$, $\frac{P}{EI}$, adică sînt de forma :

$$\begin{aligned}
\Delta c_1 &= a_{11}\Delta v + a_{12}\Delta\varphi + a_{13}\frac{\mathfrak{M}}{EI} + a_{14}\frac{P}{EI} \\
\Delta c_2 &= a_{21}\Delta v + a_{22}\Delta\varphi + a_{23}\frac{\mathfrak{M}}{EI} + a_{24}\frac{P}{EI} \\
\Delta c_3 &= a_{31}\Delta v + a_{32}\Delta\varphi + a_{33}\frac{\mathfrak{M}}{EI} + a_{34}\frac{P}{EI} \\
\Delta c_4 &= a_{41}\Delta v + a_{42}\Delta\varphi + a_{43}\frac{\mathfrak{M}}{EI} + a_{44}\frac{P}{EI}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Dacă se introduc expresiile (8) în (4), se obține soluția generală sub forma :

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + \left(Y_1\Delta v + Y_2\Delta\varphi + Y_3\frac{\mathfrak{M}}{EI} + Y_4\frac{P}{EI}\right)H(x) \tag{9}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + a_{41}v_4 \\ Y_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + a_{42}v_4 \\ Y_3 &= a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 + a_{43}v_4 \\ Y_4 &= a_{14}v_1 + a_{24}v_2 + a_{34}v_3 + a_{44}v_4 \end{aligned} \tag{10}$$

Funcțiile Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 astfel determinate sînt foarte importante și au o semnificație fizică și geometrică imediată. În funcție de ele soluția generală (9) poate fi scrisă :

$$v = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_{31}Y_3 + C_4Y_4 + \left(Y_1\Delta v + Y_2\Delta\varphi + Y_3\frac{\mathfrak{M}}{EI} + Y_4\frac{P}{EI}\right)H(x) \tag{11}$$

Aplicația 1. Grinda comprimată acționată de sarcini transversale Ecuația diferențială

$$EJ\frac{d^4v}{dx^4} + P\frac{d^2v}{dx^2} = Q_1\delta(x - x_1) + Q_2\delta(x - x_2)$$

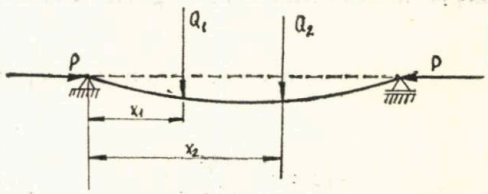


Fig 1

Împărțind cu EI și notînd

$\frac{P}{EI} = \beta^2$, $\frac{Q_1}{EI} = a_1$, $\frac{Q_2}{EI} = a_2$, ecuația devine :

$$v^{IV} + \beta^2v'' = a_1\delta(x - x_1) + a_2\delta(x - x_2)$$

Soluția generală a ecuației omogene a cărei ecuație caracteristică $r^4 + \beta^2r^2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_{3,4} = \pm\beta i$ este

$$v = c_1 + c_2x + c_3\cos\beta x + c_4\sin\beta x$$

Prin derivări succesive obținem :

$$v' = c_2 - \beta c_3\sin\beta x + \beta c_4\cos\beta x$$

*) prin $\delta(x)$ s-a notat funcția lui Dirac definită astfel:

$x<0$ și $x>0$ .... $\delta(x)=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x).dx = 1.$$

$$v'' = -\beta^2 c_3 \cos\beta x - \beta^2 c_4 \sin\beta x$$

$$v''' = \beta^3 c_3 \sin\beta x - \beta^3 c_4 \cos\beta x$$

Formăm sistemul (6) înlocuind în aceste ecuații $x = 0$ și $c \to \Delta c$:

$$\Delta c_1 + \Delta c_3 = \Delta v$$

$$\Delta c_2 + \beta \Delta c_4 = \Delta \varphi$$

$$-\beta^2 \Delta c_3 = -\frac{\mathfrak{M}}{EI}$$

$$-\beta^3 \Delta c_4 = -\frac{Q}{EI}$$

De aici, prin rezolvare deducem :

$$\Delta c_1 = \Delta v - \frac{\mathfrak{M}}{\beta^2 EI} \quad \Delta c_2 = \Delta \varphi - \frac{Q}{\beta^2 EI} \quad \Delta c_3 = \frac{\mathfrak{M}}{\beta^2 EI} \quad \Delta c_4 = \frac{Q}{\beta^3 EI}$$

Expresia generală (4) a săgeții devine :

$$v = c_1 + c_2 x + c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x + \left[\left(\Delta v - \frac{\mathfrak{M}}{\beta^2 EI}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\Delta \varphi - \frac{Q}{\beta^2 EI}\right) x + \frac{\mathfrak{M}}{\beta^2 EI} \cos\beta x + \frac{Q}{\beta^3 EI} \sin\beta x \right] H(x)$$

sau, dînd factor comun în parantezele cu cîrlige pe $\Delta v, \Delta \varphi, \frac{\mathfrak{M}}{EI}, \frac{Q}{EI}$, punem în evidență funcțiunile Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 :

$$v = c_1 + c_2 x + c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x + \left[\Delta v + \Delta \varphi \cdot x + \frac{1}{\beta^2}(\cos\beta x - 1)\frac{\mathfrak{M}}{EI} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta^3}(\sin\beta x - \beta x)\frac{Q}{EI}\right] H(x)$$

Deci funcțiunile Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sînt :

$$Y_1 = 1 \quad Y_2 = x \quad Y_3 = \frac{1}{\beta^2}(\cos\beta x - 1) \quad Y_4 = \frac{1}{\beta^3}(\sin\beta x - \beta x)$$

Soluția generală în cazul problemei de față (vezi fig. 1) este :

$$v = C_1 + C_2x + C_3\frac{1}{\beta^2}(\cos\beta x - 1) + C_4\frac{1}{\beta^3}(\sin\beta x - \beta x) +$$

$$+ \frac{1}{\beta^2}(\sin\beta x - \beta x)\frac{Q_1}{EI}H(x - x_1) + \frac{1}{\beta^3}(\sin\beta x - \beta x)\frac{Q_2}{EI}H(x - x_2)$$

Aplicația 2 Grinda pe mediu elastic
Ecuația diferențială a grinzii pe mediu elastic este :

$$EJv^{IV} = -kv \quad \text{sau cu notația :} \quad \frac{k}{EI} = 4\alpha^4$$

$$v^{IV} + 4\alpha^4 v = 0$$

Ecuația caracteristică

$$r^4 + 4\alpha^2 r^2 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2 r^2 = 0$$

are rădăcinile $r_{12} = -\alpha \pm i\alpha$; $r_{3,4} = \alpha \pm i\alpha$
Soluția generală a ecuației omogene este :

$$v = c_1 e^{-\alpha x}\cos\alpha x + c_2 e^{-\alpha x}\sin\alpha x + c_3 e^{\alpha x}\cos\alpha x + c_4 e^{\alpha x}\sin\alpha x$$

Expresiile derivatelor sînt :

$$v' = \alpha[(-c_1 + c_2)e^{-\alpha x}\cos\alpha x + (-c_1 - c_2)e^{-\alpha x}\sin\alpha x +$$

$$+ (c_3 + c_4)e^{\alpha x}\cos\alpha x + (-c_3 + c_4)e^{\alpha x}\sin\alpha x]$$

$$v'' = \alpha^2[-2c_2 e^{-\alpha x}\cos\alpha x + 2c_1 e^{-\alpha x}\sin\alpha x + 2c_4 e^{\alpha x}\cos\alpha e - 2c_3 e^{\alpha x}\sin\alpha x]$$

$$v''' = 2\alpha^3[(c_1 + c_2)e^{-\alpha x}\cos\alpha x + (-c_1 + c_2)e^{-\alpha x}\sin\alpha x +$$

$$+ (-c_3 + c_4)e^{\alpha x}\cos\alpha x + (-c_3 - c_4)\, e^{\alpha x}\sin\alpha x]$$

Formăm sistemul de ecuații (6) și făcînd în aceste ecuații $x = 0$, $c \to \Delta c$, se obține :

$$\Delta c_1 + \Delta c_3 = \Delta v \qquad 2\alpha^2(-\Delta c_2 + \Delta c_4) = -\frac{\mathfrak{M}}{EI}$$

$$\alpha(-\Delta c_1 + \Delta c_2 + \Delta c_3 + \Delta c_4) = \Delta\varphi \qquad 2\alpha^3(\Delta c_1 + \Delta c_2 - \Delta c_3 + \Delta c_4) = -\frac{T}{EI}$$

Rezolvînd sistemul se obține Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4:

$$\Delta c_1 = \frac{\Delta v}{2} - \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} - \frac{T}{8\alpha^3 EI} \qquad \Delta c_3 = \frac{\Delta v}{2} + \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} + \frac{T}{8\alpha^3 EI}$$

$$\Delta c_2 = \frac{\mathfrak{M}}{4\alpha^2 EI} + \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} - \frac{T}{8\alpha^3 EI} \qquad \Delta c_4 = \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} - \frac{\mathfrak{M}}{4\alpha^2 EI} - \frac{T}{8\alpha^3 EI}$$

Expresia generală a săgeții v este:

$$v = c_1 e^{-\alpha x}\cos\alpha x + c_2 e^{-\alpha x}\sin\alpha x + c_3 e^{\alpha x}\cos\alpha x + c_4 e^{\alpha x}\sin\alpha x +$$

$$+\left[\left(\frac{\Delta v}{2} - \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} - \frac{T}{8\alpha^3 EI}\right)e^{-\alpha x}\cos\alpha x + \left(\frac{\mathfrak{M}}{4\alpha^2 EI} + \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} - \frac{T}{8\alpha^3 EI}\right)e^{-\alpha x}\sin\alpha x +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\Delta v}{2} + \frac{\Delta\varphi}{4\alpha} + \frac{T}{8\alpha^3 EI}\right)e^{\alpha x}\cos\alpha x + \left(\frac{\Delta\varphi}{4\alpha} - \frac{\mathfrak{M}}{4\alpha^2 EI} - \frac{T}{8\alpha^3 EI}\right)e^{\alpha x}\sin\alpha x\right] H(x)$$

iar funcțiile Y_1, Y_2, Y_3, și Y_4 sînt:

$$Y_1 = \cos\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha x \qquad Y_3 = -\frac{1}{2\alpha^2}\sin\alpha x\,\mathrm{sh}\,\alpha x$$

$$Y_2 = \frac{1}{2\alpha}(\cos\alpha x\,\mathrm{sh}\,\alpha x + \sin\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha x) \qquad Y_4 = \frac{1}{4\alpha^3}(\cos\alpha x\,\mathrm{sh}\,\alpha x - \sin\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha x)$$

Soluția generală în cazul grinzii pe mediu elastic este:

$$v = C_1\cos\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha x + C_2\frac{1}{2\alpha}(\cos\alpha x\,\mathrm{sh}\,\alpha x + \sin\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha x) - C_3\frac{1}{2\alpha^2}\sin\alpha x\,\mathrm{sh}\,\alpha x +$$

$$+ C_4\frac{1}{4\alpha^3}(\cos\alpha x\,\mathrm{sh}\,\alpha x - \sin\alpha x\,\mathrm{ch}\,\alpha x) + \left\{\sum\Delta v_i\cos\alpha(x - x_i)\,\mathrm{ch}\,\alpha(x - x_i) +\right.$$

$$+\sum\Delta\varphi_j\frac{1}{2\alpha}[\cos\alpha(x - x_j)\,\mathrm{sh}\,\alpha(x - x_j) + \sin\alpha(x - x_j)\,\mathrm{ch}\,\alpha(x - x_j)] +$$

$$+\sum -\frac{\mathfrak{M}_k}{EI}\frac{1}{2\alpha^2}\cdot\sin\alpha(x - x_k)\,\mathrm{sh}\,\alpha(x - x_k) +$$

$$\left.+\sum\frac{T_l}{EI}\frac{1}{4\alpha^3}[\cos\alpha(x - x_l)\,\mathrm{sh}\,\alpha(x - x_l) - \sin\alpha(x - x_l)\,\mathrm{ch}\,\alpha(x - x_l)]\right\} H(x)$$

Aplicația 3. Vibrațiile la încovoiere ale barelor drepte

Ecuația diferențială cu derivate parțiale a vibrațiilor la încovoiere este :

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

unde μ este masa unității de lungime.

Atunci cînd bara vibrează, urmînd un mod normal de vibrații, săgeata în orice punct al barei este o funcție armonică de timp, de forma :

$$v = X(A\cos pt + B\sin pt).$$

unde X este o funcție de coordonata x, care determină tipul modului normal de vibrație. Înlocuind această soluție în ecuația cu derivate parțiale se găsește ecuația diferențială :

$$\frac{dX^{VI}}{dx^4} - k^4X = 0 \quad \text{unde s-a notat} \quad \frac{\mu p^2}{EI} = k^4$$

Rădăcinile ecuației caracteristice fiind $r_{1,2} = \pm k$, $r_{3,4} = \pm ki$ soluția ecuației diferențiale este :

$$X = c_1\cos kx + c_2\sin kx + c_3\mathrm{ch}kx + c_4\mathrm{sh}kx$$

Făcînd derivatele X', X'', X''', sistemul de ecuații (6) care rezultă este :

$$\Delta c_1\cos kx + \Delta c_2\sin kx + \Delta c_3\,\mathrm{ch}kx + \Delta c_4\mathrm{sh}kx = \Delta v$$

$$-\Delta c_1\sin kx + \Delta c_2\cos kx + \Delta c_3\mathrm{sh}kx + \Delta c_4\mathrm{ch}kx = \frac{\Delta\varphi}{k}$$

$$-\Delta c_1\cos kx - \Delta c_2\sin kx + \Delta c_3\mathrm{ch}kx + \Delta c_4\mathrm{sh}kx = -\frac{\mathfrak{M}}{k^2EI}$$

$$\Delta c_1\sin kx - \Delta c_2\cos kx + \Delta c_3\mathrm{sh}kx + \Delta c_4\,\mathrm{ch}kx = -\frac{T}{K^3EI}$$

Rezolvînd sistemul se obține :

$$\Delta c_1 = -\left(\frac{\Delta\varphi}{2k} + \frac{T}{2k^3EI}\right)\sin kx + \left(\frac{\Delta v}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}\right)\cos kx$$

$$\Delta c_2 = \left(\frac{\Delta\varphi}{2k} + \frac{T}{2k^3EI}\right)\cos kx + \left(\frac{\Delta v}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}\right)\sin kx$$

$$\Delta c_3 = -\left(\frac{\Delta\varphi}{2k} - \frac{T}{2k^3EI}\right)\mathrm{sh}kx + \left(\frac{\Delta v}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}\right)\mathrm{ch}kx$$

$$\Delta c_4 = \left(\frac{\Delta\varphi}{2k} - \frac{T}{2k^3EI}\right)\mathrm{ch}kx - \left(\frac{\Delta v}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}\right)\mathrm{sh}kx$$

Făcînd pe $x = 0$ în acest sistem rezultă Δc_1, Δc_2, Δc_3, Δc_4

$$\Delta c_1 = \frac{\Delta v}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI} \qquad \Delta c_3 = \frac{\Delta v}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}$$

$$\Delta c_2 = \frac{\Delta\varphi}{2k} + \frac{T}{2k^3EI} \qquad c_4 = \frac{\Delta\varphi}{2k} - \frac{T}{2k^3EI}$$

Expresia generală a săgeții este :

$$X = c_1\cos kx + c_2\sin kx + c_3\mathrm{ch}kx + c_4\mathrm{sh}kx + \left[\left(\frac{\Delta v}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}\right)\cos kx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Delta\varphi}{2k} + \frac{T}{2k^3EI}\right)\sin kx + \left(\frac{\Delta v}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{2k^2EI}\right)\mathrm{ch}kx + \left(\frac{\Delta\varphi}{2k} - \frac{T}{2k^3EI}\right)\mathrm{sh}kx\right] H(x)$$

Punînd în evidență funcțiile Y, rezultă :

$$X = c_1\cos kx + c_2\sin kx + c_3\mathrm{ch}kx + c_4\mathrm{sh}kx + \left[\frac{\cos kx + \mathrm{ch}kx}{2}\Delta v + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin kx + \mathrm{sh}kx}{2}\frac{\Delta\varphi}{k} + \frac{\cos kx - \mathrm{ch}kx}{2}\frac{\mathfrak{M}}{k^2EI} + \frac{\sin kx - \mathrm{sh}kx}{2}\frac{T}{k^3EI}\right] H(x)$$

Funcțiile Y sînt :

$$Y_1 = \frac{\cos kx + chkx}{2} = f_1(x) \qquad Y_3 = \frac{1}{k^2}\frac{\cos kx - \mathrm{ch}kx}{2} = \frac{1}{k^2}f_3(x)$$

$$Y_2 = \frac{1}{k}\frac{\sin kx + shkx}{2} = \frac{1}{k}f_2(x) \qquad Y_4 = \frac{1}{k^3}\frac{\sin kx - \mathrm{sh}kx}{2} = \frac{1}{k^3}f_4(x)$$

Soluția generală, scrisă în funcție de acestea este :

$$X = v_0 f_1(x) + \frac{\varphi_0}{k}f_2(x) + \frac{\mathfrak{M}_0 k^2}{\mu p^2}f_3(x) + \frac{T_0 k}{\mu p^2}f_4(x) + \sum \Delta v_i f_1(x - x_i)H(x - x_i) +$$

$$+\frac{1}{k}\sum\Delta\varphi_j f_2(x-x_j)H(x-x_j)+\frac{k^2}{\mu p^2}\sum\mathfrak{M}_k f_3(x-x_k)H(x-x_k)+$$

$$+\frac{k}{\mu p^2}\sum T_l f_4(x-x_l)H(x-x_l).$$

Catedra de mecanică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

W. Kecs. P. P. Teodorescu Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică Ed. Acad. R. S.R. București, 1970

Voiculescu D. Contributions à la détérmination des déformations et des efforts par la méthode des paramètres initiaux à la barre droite à section constante et à section variabile en degres. Bull. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Buc. XXXI. 3, 83—96 p. 1969

A. V. Darabont Vibrațiile transversale ale plăcilor cu mase concentrate atașate Studii și Cercetări de Mecanică aplicată. Tomul XXX. 6—1971

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

AVIAŢIE

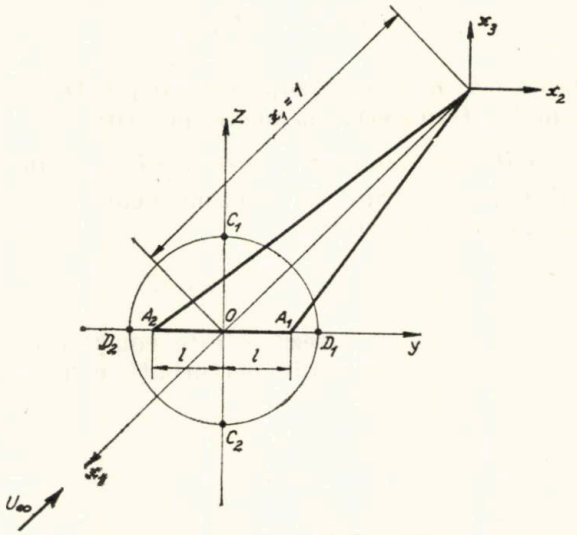
C.Z.: 629·13

ASUPRA SCURGERII SUPERSONICE IN JURUL ARIPII DELTA SUBŢIRI CU VITEZE FINITE LA BORDURI

RADU PATRAULEA

Introducere

În scopul evitării vitezei infinite la bordurile de atac subsonice ale aripii delta subţiri (în sensul soluţiei clasice a problemei în primă aproximaţie), sau, ceea ce este acelaşi lucru, pentru a evita formarea de vîrtejuri în cornet (în sensul fenomenului real), se pot imagina modificări ale bordurilor de atac, în formă de voleţi, astfel ca viteza la borduri să devină finită, ceea ce fizic se traduce prin dispariţia vîrtejurilor în cornet.



1. Planul fizic de coordonate yOz, în care este cuprinsă urma aripii A_1A_2.

În acest sens, se consideră o aripă delta plană subţire avînd bordurile subsonice, raportată la un sistem de coordonate trirectangular $Ox_1x_2x_3$ (Fig.1), introdusă într-un curent supersonic de viteză U_∞.

* Manuscris predat redacţiei la data de 16 septembrie 1971

Într-un plan normal pe axa x_1, în particular planul $x_1 = 1$, se definește planul fizic Oyz, urma aripii fiind situată chiar pe axa Oy. Acest plan intersectează conul Mach după cercul de rază $r_0 = 1/B$ (unde $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$).

Se face o transformare geometrică similară cu cea a lui Busemann definită :

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2 z^2}; \qquad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2} \tag{1}$$

În acest plan, numit plan auxiliar (Fig.2), urma aripii își păstrează aceeași poziție, iar cercul Mach se transformă în liniile $D_1C_1C_2$ și $D_2C_1C_2$. Se poate arăta că în acest plan, vitezele de perturbație u, v, w, după cele trei axe de coordonate $Ox_1x_2x_3$ sînt funcții armonice și deci acestora li se pot asocia funcțiile conjugate u', v', w', astfel încît să se obțină funcțiile analitice

$$U = u + iu'; \qquad V = v + iv'; \qquad W = w + iw' \tag{2}$$

de variabila complexă

$$x = \eta + i\zeta \tag{3}$$

Se notează cu α incidența globală a aripii, respectiv cu

$$w = -\alpha U_\infty \tag{4}$$

viteza verticală de perturbație pe suprafața aripii. Dacă aripa este deformată, w reprezintă viteza verticală medie pe aripă.

Modificarea bordurilor de atac pentru a obține viteze finite

Deformînd aripa la bordul de atac, obținem o distribuție de viteze verticle w variabile pe intervalul

$$\eta \in (-l, -s) U (s, l)$$

iar pe intervalul $(-s < \eta < s)$, viteza w este constantă $w = w_0$. (Fig.2). Valoarea medie a vitezei verticale de perturbație este

$$w = \frac{1}{l}\int_0^l w\,d\eta \tag{5}$$

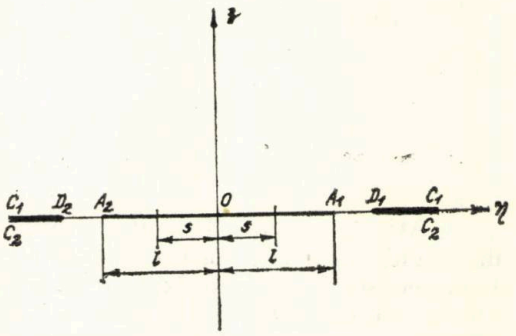
Trebuie să se găsească condițiile pentru ca viteza să fie nulă la bordul de atac. Pentru aceasta, din teoria mișcărilor conice, se știe că se pot reprezenta variațiile de viteză verticală de perturbație printr-o distribuție de surse dedusă din relația cunoscută [1]

$$\frac{dq}{d\eta} = q' = \frac{\eta}{\sqrt{1 - B^2\eta^2}} \frac{dw}{d\eta} \tag{6}$$

Unui salt brusc de viteză verticală $w_1 - w_0 = \Delta w$, îi corespunde o sursă concentrată de intensitate Q_0, dispusă în punctul A, de abscisă s de salt de pantă de pe urma aripii (Fig.2). Relaţia bine cunoscută ce leagă intensitatea sursei co ncentrate de saltul de viteză verticală (sau de pantă) este

$$Q_0 = \frac{s(w_0 - w_1)}{\sqrt{1 - B^2 s^2}} \qquad (7)$$

Potenţialul mişcării axiale U este, desigur afectat de dispunerea acestor surse. Iată, spre exemplu contribuţia unei surse concentrate Q_0 aşezată pe o parte a aripii :



2. Urma unei aripi simetrice în planul de coordonate auxiliar

$$U_{Q_0} = Q_0 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+s)\,|\,l-x\,|}{2l\,|s-x|}} \qquad (8)$$

iar în cazul unei aripi simetrice, se adaugă şi contribuţia sursei de semn contrar de pe cealaltă parte a aripii.

Contribuţia unei surse elementare q' este dată de relaţia

$$dU_{q'} = q' \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+\eta)\,|\,l-x\,|}{2l\,|\eta - x|}}\, d\eta \qquad (9)$$

adăugînd, desigur la o aripă simetrică şi contribuţia surselor distribuite pe cealaltă parte a aripii. Integrarea se face ţinînd seama de forma de distribuţie a surselor elementare. [2]

Sintetizînd deci, se poate scrie funcţia de viteză longitudinală U, a cărei parte reală este viteza de perturbaţie u din care rezultă coeficientul de presiune pe suprafaţa aripii. Pentru cazul dispunerii unei surse concentrate (de fapt a unei duble perechi de surse de semn contrar) pe o aripă simetrică, expresia funcţiei U este

$$U = \frac{A_0}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+s)\,|l-x|}{2l\,|s-x|}} + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+s)(l+x)}{2l(s+x)}} \right] \qquad (10)$$

iar pentru o aripă cu surse uniform repartizare, deci avînd $q' = q_0$, pe intervalul $(-s, -l)U(s, l)$, această expresie este

$$U = \frac{A_0}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} q_0 \int_s^l \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+\eta)\,|l-x|}{2l\,|\eta - x|}} + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}} \right] d\eta \qquad (11)$$

ceea ce face prin integrare [3]

$$U = \frac{A_0}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{q_0}{\pi}\left[|s - x| \operatorname{arcch} \frac{|l^2 - sx|}{l|s-x|} + (s+x) \operatorname{arcch} \frac{l^2+sx}{l(s+x)} - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{l^2 - x^2} \arccos \frac{s}{l} \right] \tag{12}$$

Atît în expresia (10), cît şi în expresiile (11) şi (12), primul termen care dă singularitatea la bordul de atac ($x = l$) nu trebuie luat în considerare. Prin aceasta se pune de fapt condiţia de viteză finită la borduri. Pentru a putea determina constantele, adică intensitatea surselor dispuse şi incidenţa globală corespunzătoare acestei condiţii, studiul trebuie continuat. Ignorînd însă acest termen, se poate totuşi observa forma de variaţie a vitezei de perturbaţie longitudinală u, fără a putea desigur determina cantitativ această mărime. De asemenea, se poate face un studiu comparativ al distribuţiei de presiuni pe suprafaţa aripii pentru diferite tipuri de surse considerate, după relaţiile [1]

$$u = ReU \tag{13}$$

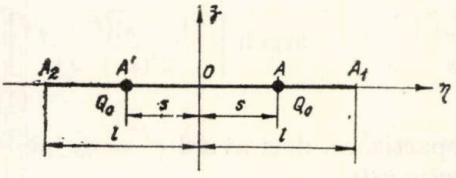
şi

$$CP = -2\frac{u}{U_\infty} \tag{14}$$

S-au determinat în acest mod curbele de variaţie a coeficientului de presiune pe aripă în lungul anvergurii considerînd o serie de tipuri de repartiţie a surselor şi pentru diferite poziţii de distribuţie a surselor pe aripă (s).

Folosind relaţiile scrise anterior pentru funcţia de viteză U, se pot exprima direct coeficienţii de presiune pentru modurile de repartiţie a surselor luate în consideraţie (Fig.3).

1. Cazul sursei concentrate (fig.3)



3. Sursă concentrată de intensitate Q_0.

$$CP1 = \frac{2lQ_0}{\pi}\left[\operatorname{arcch} \sqrt{\frac{(l+s)|l-x|}{2l|s-x|}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arcch} \sqrt{\frac{(l+s)(l+x)}{2l(s+x)}} \right] \tag{15}$$

sau făcînd notaţiile

$$S = \frac{s}{l}; \qquad X = \frac{x}{l} \tag{16}$$

și transformînd expresia convenabil pentru a putea fi calculabilă pe calculatorul IBM — 360

$$CP1 = \frac{2lQ_0}{\pi}\left\{\ln\left[\frac{1-SX}{|S-X|}+\sqrt{\left(\frac{1-SX}{S-X}\right)^2-1}\right]+\right.$$
$$\left.+\ln\left[\frac{1+SX}{S+X}+\sqrt{\left(\frac{1+SX}{S+X}\right)^2-1}\right]\right\} \tag{16}$$

2. Cazul surselor uniform repartizate ($q' = q_0$). (Fig.8)

$$CP2 = \frac{2lq_0}{\pi}\left[|S-X|\,\mathrm{argch}\frac{1-SX}{|S-X|}+(S+X)\,\mathrm{argch}\frac{1+SX}{S+X}-\right.$$
$$\left.-2\sqrt{1-X^2}\,\arccos S\right] \tag{17}$$

sau după transformări ale funcției argch. în funcție ln.

$$CP2 = \frac{2lq_0}{\pi}\left\{|S-X|\ln\left[\frac{1-SX}{|S-X|}+\sqrt{\left(\frac{1-SX}{S-X}\right)^2-1}\right]+\right.$$
$$\left.+(S+X)\ln\left[\frac{1+SX}{S+X}+\sqrt{\left(\frac{1+SX}{S+X}\right)^2-1}\right]-2\sqrt{1-X^2}\arccos S\right\} \tag{19}$$

3. Cazul surselor distribuite liniar, în două variante. (Fig. 13) și (Fig. 14)

$$CP3 = \frac{2l^2q_0}{\pi(l-Sl)}\left[\left(1-\frac{S+X}{2}\right)|S-X|\,\mathrm{argch}\frac{1-SX}{|S-X|}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{|S-X|}{2}\right)(S+X)\,\mathrm{argch}\frac{1+SX}{S+X}+\sqrt{1-X^2}\left(\sqrt{1-S^2}-2\arccos S\right)\right] \tag{20}$$

sau după transformări similare,

$$CP3 = \frac{2l^2q_0}{\pi(l-Sl)}\left\{\left(1-\frac{S+X}{2}\right)|S-X|\ln\left[\frac{1-SX}{|S-X|}+\sqrt{\left(\frac{1-SX}{S-X}\right)^2-1}\right]+\right.$$
$$+\left(1-\frac{|S-X|}{2}\right)(S+X)\ln\left[\frac{1+SX}{S+X}+\sqrt{\left(\frac{1+SX}{S+X}\right)^2-1}\right]+$$
$$\left.+\sqrt{1-X^2}\left(\sqrt{1-S^2}-2\arccos S\right)\right\} \tag{21}$$

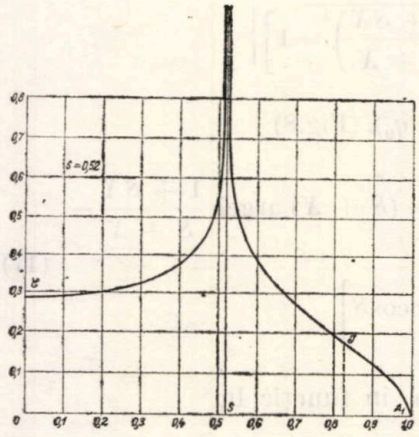


Fig. 4. Curba CP1 = f (X), surse concentrate, S = 0,52

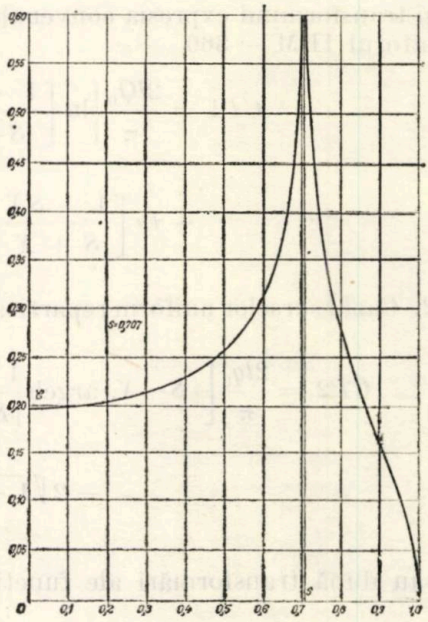


Fig. 5. Curba CP1=f (X), surse concentrate, S = 0,707

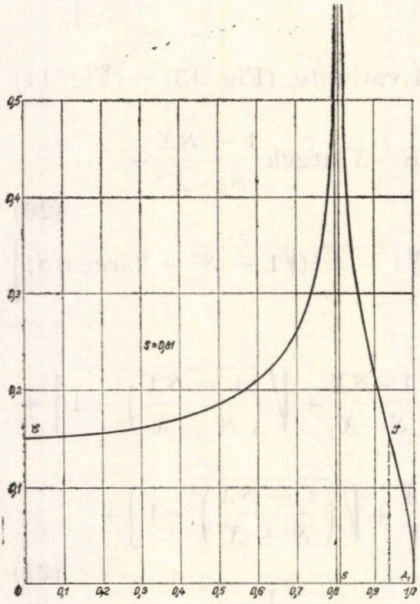


Fig. 6. Curba CP1 = f(X), surse concentrate S = 0,81

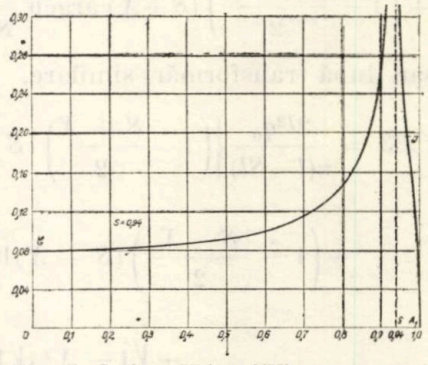


Fig. 7. Curba CP1 = f(X), surse concentrate, S = 0,94

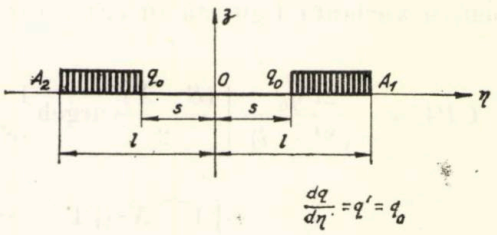


Fig. 8. Surse elementare uniform distribuite

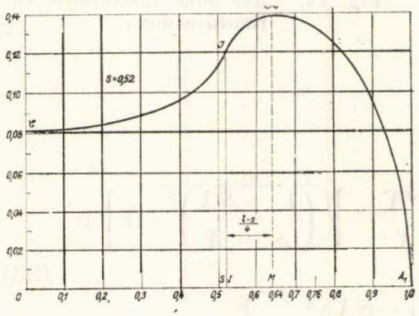


Fig. 9. Curba CP2=f(X), surse uniform repartizate S = 0,52

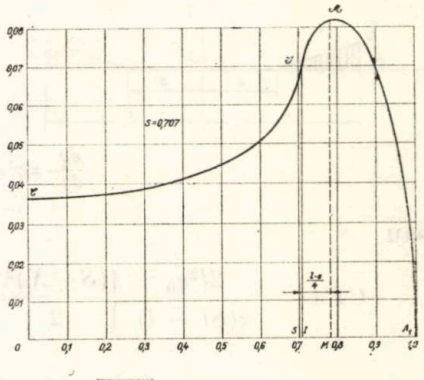


Fig. 10. Curba CP2 = f(X), surse uniform repartizate S = 0,707

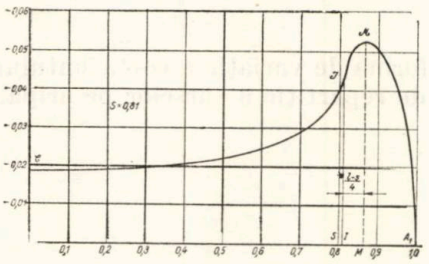


Fig. 11. Curba CP 2 = 2 f(X), surse uniform repartizate, S = 0,81

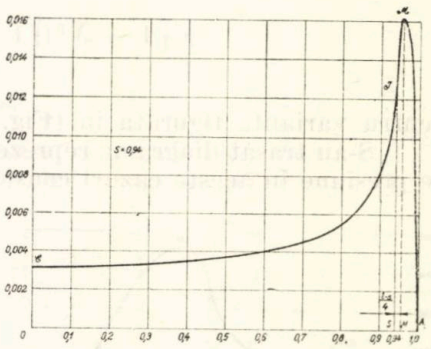


Fig. 12. Curba CP 2 = f(X) surse uniform repartizate, S = 0,94

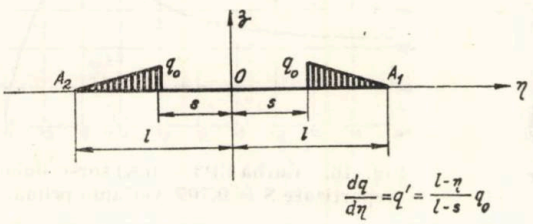


Fig. 13. Surse liniar distribuite, prima variantă.

pentru varianta figurată în (Fig. 13) și respectiv

$$CP4 = \frac{2l^2 q_0}{\pi(Sl - l)} \left[\frac{(S-X)^2}{2} \operatorname{argch} \frac{1 - SX}{|S - X|} + \frac{(S+X)^2}{2} \operatorname{argch} \frac{1 + SX}{S + X} + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \sqrt{1 - X^2} (\sqrt{1 - S^2} - 2S \arccos S) \right]$$

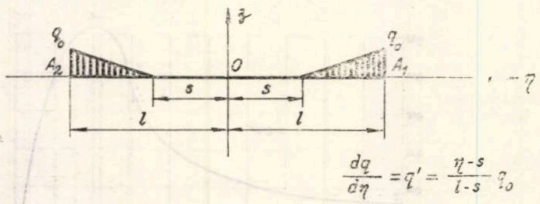


Fig. 14. Surse liniar distribuite, varianta a doua.

sau

$$CP4 = \frac{2l^2 q_0}{\pi(Sl - l)} \left\{ \frac{(S-X)^2}{2} \ln \left[\frac{1 - SX}{|S - X|} + \sqrt{\left(\frac{1 - SX}{S - X} \right)^2 - 1} \right] + \right. \tag{23}$$

$$+ \frac{(S+X)^2}{2} \ln \left[\frac{1+SX}{S + X} + \sqrt{\left(\frac{1+SX}{S + X} \right)^2 - 1} \right] +$$

$$\left. + \sqrt{1 - X^2} (\sqrt{1 - S^2} - 2S \arccos S) \right\}$$

pentru varianta figurată în (Fig. 14).

S-au trasat diagrame reprezentînd forma de variație a coeficientului de presiune în aceste cazuri considerate de repartiție a surselor pe aripă.

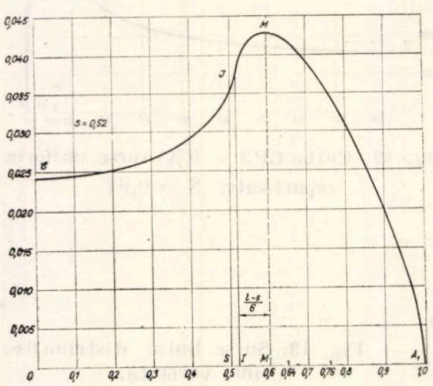


Fig. 15. Curba CP3 = f(X), surse liniar repartizate, S = 0,52 varianta primă.

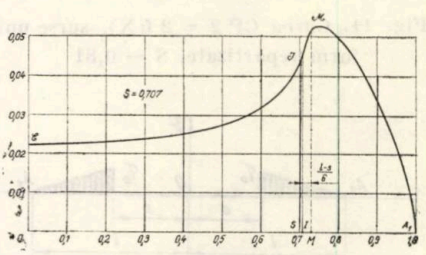


Fig. 16. Curba CP3 = f(X) surse liniar repartizate S = 0,707, varianta primă.

Fiecare din aceste cazuri a fost studiat dîndu-se cîte patru valori distincte pentru variabila s reprezentînd poziția surselor în anvergura aripii și anume

$$s = 0{,}52\,; \qquad s = 0{,}707\,; \qquad s = 0{,}81\,; \qquad s = 0{,}94 \tag{24}$$

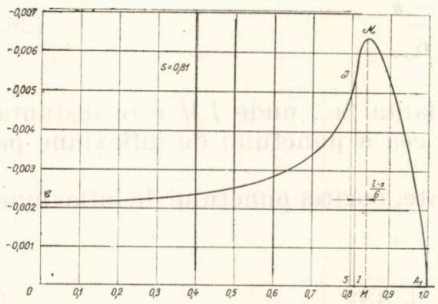


Fig. 17. Curba CP3 = f(X), surse liniar repartizate, S = 0,81, varianta primă.

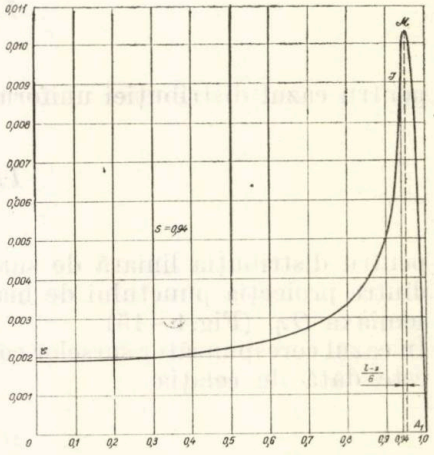


Fig. 18. Curba CP3 = f(X), surse liniar repartizate S = 0,94, varianta primă.

Se pot imagina desigur și alte tipuri de repartiție a surselor în lungul anvergurii, spre exemplu forme parabolice pătratice sau cubice în diferite variante. Studiul acestor aripi se va face în mod asemănător.

Concluzii

Din studierea diagramelor se observă că s-a atins scopul propus inițial, obținîndu-se eliminarea infinității vitezei la bordul de atac. Totuși, în cazul aripii cu surse concentrate, este inevitabilă obținerea unei singularități de viteză u în dreptul punctului de dispunere a perechei de surse concentrate. Fizic, dispunerea acestor surse corespunde unui salt brusc de pantă, ceeace face ca desprinderea de vîrtejuri cornet să se producă în dreptul acestei muchii în loc de a se mai produce la bordurile de atac. Apropriindu-le de axa de simetrie a aripii, vîrtejurile cornet au efecte mai puțin nocive ca în cazul aripii plane cînd se produc la borduri.

Considerînd însă distribuția de surse elementare fie că este vorba de surse repartizate uniform, ceeace fizic înseamnă prezența unui volet plan, fie că este vorba de surse distribuite liniar sau după alte legi (fizic-voleți curbi), ele conduc la dispariția totală a fenomenului de infinitate a vitezei, adică, fizic, duc la evitarea formării și desprinderii de vîrtejuri în cornet [4], [5] [6]. Curbele de distribuție a presiunilor pe aripă prezintă cîte un maxim finit, care poate fi atenuat prin dispunerea surselor cît mai aproape de centrul aripii. Desigur, un studiu mai aprofundat al eficienței aerodinamice își are locul în continuare, pentru a stabili cele mai bune clase de aripi deformate.

Poziția punctului de inflexiune al curbei CP coincide cu punctul de abscisă $S = s/l$ deci se poate determina imediat.

Poziția punctului de maxim se poate calcula analitic, rezultatul este dat de relația

$$IM = \frac{l - s}{4} \tag{25}$$

pentru cazul distribuției uniforme de surse și de relația

$$IM = \frac{l - s}{6} \tag{26}$$

pentru distribuția liniară de surse, varianta 3c., unde IM este distanța dintre proiecția punctului de maxim și cea a punctului de inflexiune pe semiaxa $O\eta$. (Fig.4—15)

În cazul corespunzător surselor concentrate, poziția punctului de inflexiune este dată de relația

$$\eta_I = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 8S^2}}}{2} \tag{27}$$

Desigur, deformarea convenabilă a aripii pentru a obține condiția de viteză finită la borduri este legată de panta (incidența) medie a aripii și de mărimea surselor distribuite. Pentru fiecare tip de distribuție de surse care evită infinitatea vitezei la borduri, îi corespunde o incidență globală α a aripii. Din condiția de viteză finită și nulă la borduri (pentru u), rezultă atît mărimea sursei ce trebuie repartizată, cît și panta medie de evoluție a aripii.

Catedra de aeronautică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Carafoli E.* Aerodinamica vitezelor mari — Editura Academiei Republicii Populare Române —1957.
2. *Carafoli E., Staicu St.* Asupra teoriei aripii delta asubțiri cu separația curentului la bordurile de atac — Studii și Cercetări de mecanică Aplicată, vol. 4, tom 22, 1966. Editura Academiei R.S.R.
3. *Carafoli E., Năstase A.* Studiul aripilor triunghiulare subțiri cu simetrie forțată în curent supersonic — Studii și cercetări de Mecanică Aplicată, vol. 4, An IX, 1958 Editura Academiei R.S.R.
4. *Michael W. H.* Flow Studies On Flat-Plate Delta Wings At Supersonic Speed — NACA TN 3472, july, 1955.
5. *Brown C. E., Michael W. H.* On Slender Delta Wings With Leading Edge Separation — NACA TN 3430, 1955.
6. *Edwards R. H.* Leading-Edge Separation From Delta Wings — J.A.S. February 1954.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

REZISTENȚA MATERIALELOR

C. Z.: 620.1

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A EFORTURILOR UNITARE LA INTERSECȚIA DINTRE UN INVELIȘ CILINDRIC ȘI UN INVELIȘ ELIPSOIDAL, SOLICITAȚI CU PRESIUNE INTERIOARĂ *

I. CONSTANTINESCU, LUCIA FETCU, OLTEA BOGDAN

1. Obiectul studiului

Teoria de membrană concepută pentru determinarea stării de tensiune într-un înveliș cu pereți subțiri dă informații corecte doar în puncte suficient de depărtate de liniile unde se modifică ecuațiile suprafeței mediane. Pentru studierea distribuției eforturilor în zona de intersecție dintre două suprafețe geometric distincte este necesară utilizarea unei teorii care să introducă efectele încovoierii locale. Integrarea ecuațiilor stabilite în cadrul unei astfel de teorii este legată de mari dificultăți, mai ales în cazul învelișurilor nesimetrice; determinarea experimentală a eforturilor unitare devine de foarte multe ori o necesitate, fie pentru a verifica ipotezele făcute în teorie, fie pentru a înlocui calculele. O serie de măsurări în vederea stabilirii eforturilor unitare de-a lungul liniei de intersecție dintre un elipsoid de rotație și un cilindru amplasat excentric (fig. 1), sub acțiunea unei presiuni interioare, a fost făcută în laboratorul catedrei de Rezistența materialelor, I.P.B.

S-au determinat deformațiile specifice prin tensometrie electrică rezistivă în puncte situate de o parte și de alta a liniei de intersecție (pe cilindru și pe elipsoid) pe intervalele 1—2—3 și în lungul generatoarei din planul de simetrie, pe direcțiile 1—4 și 1—5 (fig. 1). Rezultatele măsurărilor au fost prelucrate statistic, fiind apoi utilizate pentru calculul eforturilor unitare principale. Acestea sînt prezentate în tabele și diagrame.

2. Efectuarea măsurărilor

2.1. *Amplasarea punctelor de măsurare*

Măsurările s-au efectuat pe 12 recipienți caracterizați de următoarele relații între parametrii lor geometrici (fig.1):

$$H = \frac{D}{4} \tag{1a}$$

* Manuscris predat redacției la data de 20 ianuarie 1971.

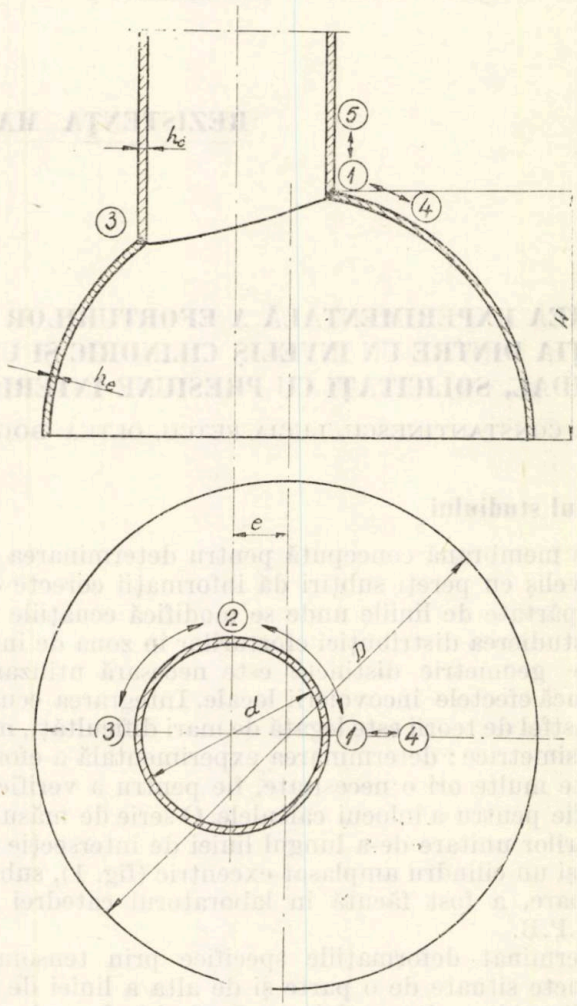


Fig. 1

$$e = 0{,}3D - 0{,}5\ d \tag{1b}$$

$$h_c = h_e = h \tag{1c}$$

Dimens. \ Recipient nr.	1		2		3	
	a	b	a	b	a	b
$\frac{h}{D}$	0,00857	0,01285	0,00875	0,01125	0,00777	0,0111
$\frac{d}{D}$	0,715		0,625		0,555	
$\frac{e}{D}$	0,0427		0,0875		0,122	

Valorile relative ale dimensiunilor recipienților, ordonați după diametrul mantalei (D), sînt date în tabelul 1. Pentru fiecare diametru au existat 2 recipienți construiți pentru presiuni nominale diferite, (recipienții 1a, 2a, ..., 6a pentru $p_n = 6$ kgf/cm^2, iar recipienții 1b, 2b, . . , 6b pentru $p_n = 10$ kgf/cm^2) deci avînd grosimi ale pereților diferite.

S-au montat traductori tensometrici pe cilindru și pe elipsoid în zona 1—2—3 din 15° în 15° pentru recipienții 1a și 4b ; în punctele din planul de simetrie au fost montate rozete dreptunghiulare cu 2 traductori orientați după direcțiile principale iar în celelalte puncte au fost montate rozete dreptunghiulare cu 3 traductori, avînd o latură a unghiului drept orientată după generatoarea cilindrului.

S-au montat traductori tensometrici în zonele 1—4 și 1—5 urmărindu-se variația pe generatoare a eforturilor unitare pentru cilindru și pentru elipsoid în vecinătatea liniei lor de intersecție, la recipientul nr. 4 a.

Pentru a urmări cum influențează modificarea rapoartelor $\frac{d}{D}$ și $\frac{e}{D}$ asupra valorilor eforturilor unitare, s-au montat traductori tensometrici la toți recipienții în punctele 1 și 2, pe cilindru și pe elipsoid.

2.2. Materiale și aparatură

La măsurări s-au utilizat traductori tensometrici fabricați la ISCT cu baza de 10 mm, rezistența electrică de 120—130 Ω și constanta 2,15. Ei au fost lipiți cu adeziv cu întărire rapidă marca X—60, produs de Hottinger Baldwin Messtechnik. Deformațiile specifice s-au citit pe o punte tranzistorizată marca Orion, tip RZ—007, cu precizia de citire de $\pm 10^{-5}$. Legătura între punte și traductori s-a făcut prin cutii de comutare cu 12 posturi marca Orion, tip RZ—004. Presiunea realizată în recipienți a fost măsurată cu un manometru de clasă 2,5.

2.3. Măsurarea deformațiilor specifice

Citirea deformațiilor specifice s-a făcut pentru 7 valori ale presiunii interioare ; presiunea maximă realizată a produs eforturi unitare sub limita de curgere a materialului recipienților. Pentru fiecare valoare a presiunii s-au realizat trei cicluri de încărcare-descărcare ; diferențele între valorile deformațiilor specifice citite la aceeași presiune dar în cicluri diferite, nu au depășit limitele corespunzătoare erorii punții tensometrice.

Tabelul 1

4		5		6	
a	b	a	b	a	b
0,008	0,011	0,00727	0,0109	0,0075	0,01
0,6		0,545		0,5	
0,1		0,127		0,15	

3. Prelucrarea datelor experimentale

Solicitarea recipienţilor rămîne tot timpul în domeniul elastic, deci dependenţa dintre deformaţiile specifice şi presiune este liniară :

$$\varepsilon = kp \tag{2}$$

Pentru trasarea dreptei (2) s-au determinat experimental 7 puncte de coordonate (ε_i, p_i) pentru fiecare traductor tensometric. Panta k a dreptei (2) reprezintă deformaţia specifică în locul de aplicare a traductorului tensometric considerat, corespunzătoare solicitării recipientului cu o unitate de presiune.

Valorile lui k s-au obţinut prin metoda celor mai mici pătrate :

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{7} p_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{7} p_i^2} \tag{3}$$

şi sînt prezentate în coloanele ε_c, $\varepsilon_{45°}$, ε_l din tabelele 2, 3, şi 4. Indicii c, 45°, l precizează direcţiile traductorilor respectivi : circumferenţială, la 45° faţă de direcţia circumferenţială (sau longitudinală) şi longitudinală.

S-au calculat coeficienţii de corelaţie a punctelor experimentale cu dreapta (2), folosind relaţia [1] :

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^{7} p_i \varepsilon_i - \sum_{i=1}^{7} p_i \sum_{i=1}^{7} \varepsilon_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{7} p_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} p_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^{7} \varepsilon_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} \varepsilon_i\right)^2}}. \tag{4}$$

Valorile lui r obţinute pentru traductorii tensometrici consideraţi s-au situat între limitele 0,9529 — 0,9999.

Cu deformaţiile specifice determinate pentru încărcarea recipienţilor cu o unitate de presiune s-au calculat eforturile unitare principale şi orientarea direcţiilor principale faţă de direcţiile traductorilor [2], [3] :

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_l + \varepsilon_c}{1-\mu} \pm \frac{1}{1+\mu}\sqrt{(\varepsilon_l - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_{45°} - \varepsilon_l - \varepsilon_c)^2}\right] \tag{5a}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\varepsilon_{45°} - (\varepsilon_l + \varepsilon_c)}{\varepsilon_l - \varepsilon_c} \tag{5b}$$

unde $\mu = 0{,}3$ şi $E = 2{,}1.10^6$ kgf/cm^2.

Rezultatele sînt prezentate în tabelele 2, 3, 4. Variaţia eforturilor unitare σ_1 şi σ_2 este reprezentată în diagramele din fig. 2, 3, 4.

Eforturile unitare obţinute în punctele 1 şi 2 la recipienţii studiaţi sînt date în tabelul 5. Variaţia eforturilor unitare în funcţie de rapoartele $\frac{d}{D}$ şi $\frac{e}{D}$ este prezentată în fig. 5a, 5b şi 6a, 6b.

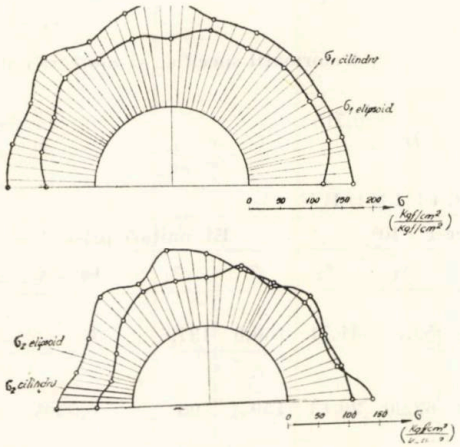


Fig. 2

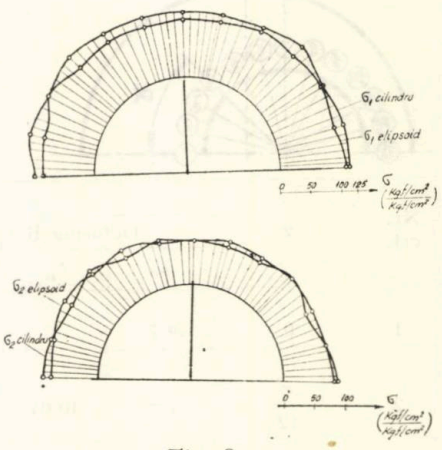


Fig. 3

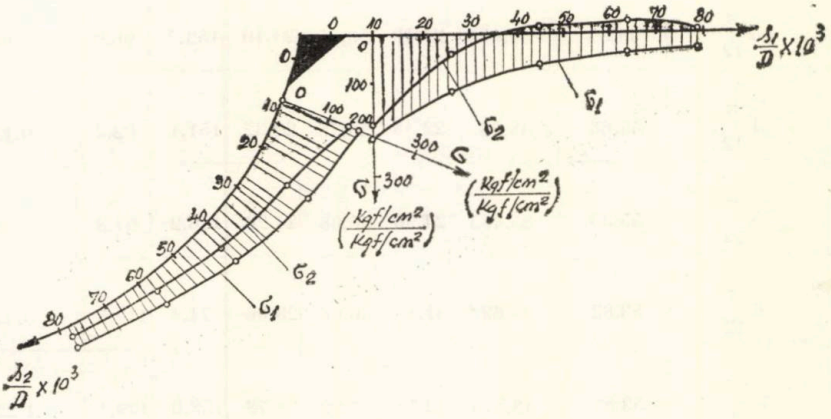


Fig. 4

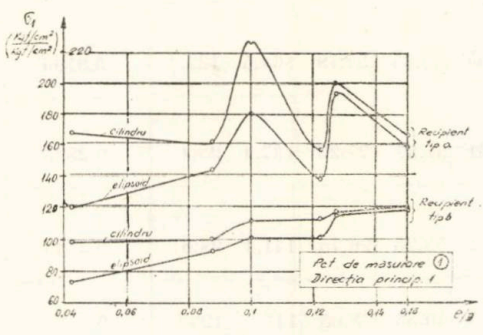


Fig. 5a

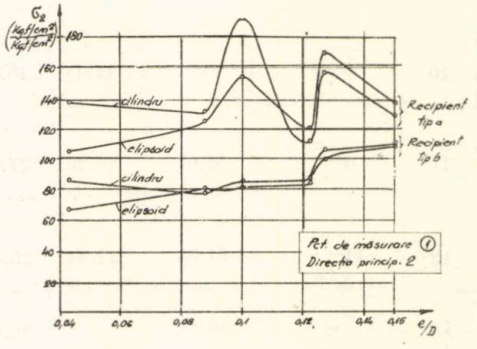
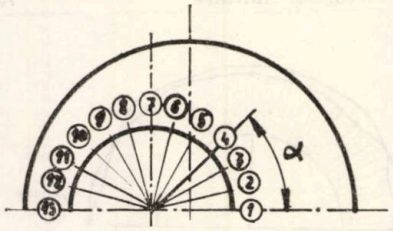


Fig. 5b



Deformaţii specifice şi eforturi uni-

$\frac{d}{D} = 0{,}715$; $\frac{e}{D} =$

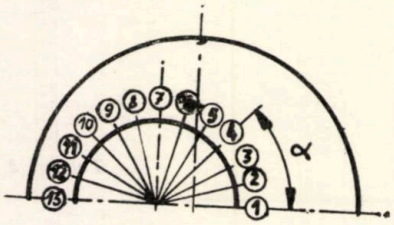
Nr. crt.	α	CILINDRU							
		Deformaţii specifice $\varepsilon \times 10^6$					Ef. unitare princ.		
		ε_c	ε_{45°	ε_l	ε_1	ε_2	σ_1	σ_2	tg 2 φ
1	0	59,7	—	41,71	59,7	41,71	166,6	137,6	0
2	$\frac{\pi}{12}$	62,88	40,67	20,15	62,90	20,13	159,1	90	0,0395
3	$2\frac{\pi}{12}$	59,745	40,16	19,56	59,74	19,56	151,4	86,5	−0,0253
4	$3\frac{\pi}{12}$	59,36	41,975	24,19	59,35	24,19	153,7	96,9	−0,0114
5	$4\frac{\pi}{12}$	58,63	38,28	22,45	58,78	22,32	151,1	92,2	0,1252
6	$5\frac{\pi}{12}$	55,35	35,485	24,98	56,08	24,26	146,2	94,8	0,3084
7	$6\frac{\pi}{12}$	53,82	29,62	41,8	66,98	28,66	174,4	112,5	3,0266
8	$7\frac{\pi}{12}$	53,84	48,875	42,18	57,22	38,78	158,9	129,1	1,223
9	$8\frac{\pi}{12}$	51,545	40,72	26,56	51,65	26,45	137,5	96,8	−0,1331
10	$9\frac{\pi}{12}$	50	34,95	45,65	60,85	34,79	164,5	122,4	5,9195
11	$10\frac{\pi}{12}$	51,01	36,36	27,61	51,37	27,23	137,4	98,4	0,2523
12	$11\frac{\pi}{12}$	51,98	34,32	28,02	53,25	26,75	141,4	98,6	0.4743
13	π	49,53	—	38,65	49,53	38,65	141	123,5	0

tare principale pentru $p = 1$ kgf/cm²

$= 0{,}0427$; $\frac{h}{D} = 0{,}00857$

Tabelul 2

ELIPSOID							
Deformații specifice $\varepsilon \times 10^6$					Eforturi unitare principale (kgf/cm²)/(kgf/cm²)		
ε_c	ε_{45}	ε_l	ε_1	ε_2	σ_1	σ_2	tg 2φ
41,88	—	32,79	41,88	32,79	119,3	104,7	0
45,31	26	31,48	51,72	25,04	136,7	93,6	1,6477
49,76	35,165	23,73	49,84	23,66	131,4	89,1	0,1213
45,63	35,675	35,375	47,56	33,44	132,9	110,1	0,9414
45,15	38,94	24,63	45,93	23,83	122,5	86,8	−0,3950
41,47	29,45	33,96	46,79	28,65	127,8	98,5	2,1987
40,02	29,55	20,74	40,07	20,695	106,8	75,5	0,0861
35,18	21,09	28,37	42,97	20,56	113,4	77,2	3,138
37,68	28,925	25,51	38,24	24,93	105,5	84,0	0,4386
33,55	16,65	28,01	45,18	16,39	115,6	69,1	5,0998
36,06	16,63	9,995	37,53	8,5	92,5	45,6	0,4906
28,37	7,05	15,65	38,27	5,77	92,3	39,8	2,3534
29,50	—	16,12	29,50	16,12	79,2	57,6	0



Deformaţii specifice şi eforturi

$\frac{d}{D} = 0{,}6$; $\frac{e}{D} =$

Nr. crt.	α	CILINDRU							
		Deformaţii specifice $\varepsilon \times 10^6$					Ef. unitare princ.		
		ε_c	ε_{45}	ε_l	ε_1	ε_2	σ_1	σ_2	tg 2φ
1	0	41,11	—	24,35	41,11	24,35	111,7	84,7	0
2	$\frac{\pi}{12}$	40,25	22,39	20,88	43,26	17,88	112,2	71,2	0,8437
3	$2\frac{\pi}{12}$	41,20	23,93	14,3	41,71	13,79	105,8	60,7	0,2838
4	$3\frac{\pi}{12}$	40,61	22,19	24,56	45,74	19,43	119	76,5	1,2964
5	$4\frac{\pi}{12}$	41,44	24,16	16,08	42,26	15,27	108,1	64,5	0,3626
6	$5\frac{\pi}{12}$	40,255	23,58	16,87	41,26	15,88	106,2	65,2	0,4267
7	$6\frac{\pi}{12}$	39,61	24,62	18,05	40,41	17,26	105,2	67,8	0,3905
8	$7\frac{\pi}{12}$	37,74	23,60	22,70	40,21	20,22	106,8	74,5	0,8792
9	$8\frac{\pi}{12}$	40,04	23,41	18,86	41,61	17,29	108	68,7	0,57
10	$9\frac{\pi}{12}$	37,94	26,62	27,42	40,7	24,67	111	85,1	1,1501
11	$10\frac{\pi}{12}$	37,82	26,30	21,47	38,47	20,83	103,2	74,7	0,4092
12	$11\frac{\pi}{12}$	34,96	25,12	28,66	39,21	24,42	107,4	83,5	2,1215
13	π	28,05	—	34,14	31,99	28,71	93,7	88,4	0

unitare principale pentru $p = 1$ kgf/cm²

$= 0{,}1$; $\frac{h}{D} = 0{,}011$

Tabelul 3

ELIPSOID							
Deformaţii specifice $\varepsilon \times 10^6$					Ef. unitare princ. (kgf/cm²)/(kgf/cm²)		
ε_c	ε_{45}	ε_l	ε_1	ε_2	σ_1	σ_2	tg 2φ
39,165	—	23,46	39,165	23,46	106,6	81,2	0
36,36	28,69	20,77	36,37	20,76	98,3	73,1	−0,0120
39,51	26,56	18,58	39,79	18,31	104,5	69,8	0,2373
36,44	27,57	21,03	36,53	20,93	98,8	73,6	0,1509
39,74	28,47	17,90	39,75	17,89	104,1	68,8	0,0320
34,58	28,58	21,06	34,64	21,02	94,5	72,5	−0,1119
34,81	28,98	19,17	35,06	18,90	94	67,9	0,2538
32,67	25,48	20,92	32,80	20,79	90,1	70,7	0,2241
31,78	31,42	26,05	32,72	25,11	92,9	80,6	−0,8733
30,41	27,25	24,95	30,45	24,88	87,5	78,5	0,1588
31,36	26,32	30,34	35,4	26,3	99,9	85,2	8,8263
27,71	26,06	27,22	28,87	26,04	84,7	80,1	5,7265
27,525	—	24,295	27,525	24,295	80,3	75,1	0

Deformaţii specifice şi eforturi unitare principale pentru $p = 1$ kgf/cm²

$$\frac{d}{D} = 0{,}6\,; \quad \frac{e}{D} = 0{,}1\,; \quad \frac{h}{D} = 0{,}008$$

Tabelul 4

Nr. crt.	Cilindru					Elipsoid				
	s_1/D	Def. specifice $\varepsilon \times 10^6$		Ef. unit. princ. (kgf/cm²)(kgf/cm²)		s_2/D	Def. specifice $\varepsilon \times 10^6$		Ef. unit. principale (kgf/cm²)/(kgf/cm²)	
		ε_c	ε_l	σ_1	σ_2		ε_c	ε_l	σ_1	σ_2
1	9.10^{-3}	80,28	58,65	225,9	190,9	9.10^{-3}	63,29	47,98	179,3	154,5
2	26.10^{-3}	52,91	2,65	123,9	42,7	24.10^{-3}	56,28	21,55	144,8	88,7
3	45.10^{-3}	34,91	−15,95	69,5	−12,6	42.10^{-3}	41,5	11,61	103,8	55,5
4	64.10^{-3}	22,09	−17,03	39,2	−24	57.10^{-3}	29,15	5,42	71	32,7
5	79.10^{-3}	17,05	−12,64	30,6	−17,4	76.10^{-3}	21,52	4,48	52,8	25,2

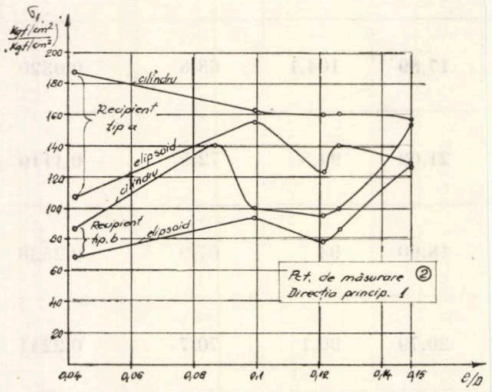


Fig. 6a

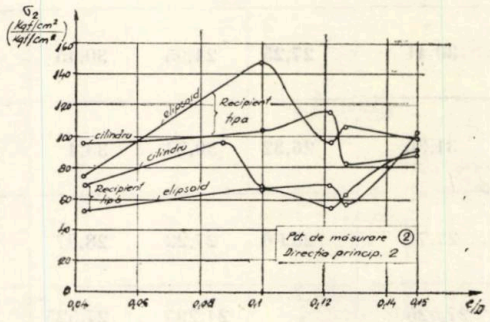


Fig. 6b

Tabelul 5

Eforturi unitare principale pentru $p = 1$ kgf/cm²

Recipient nr.			1		2		3		4		5		6	
e/D			0.0427		0,0875		0,122		0,1		0,127		0,15	
Punct de măsurare nr.		Recipient tip	Eforturi unitare principale pentru $p = 1$ kgf/cm² $\left(\frac{\text{kgf/cm}^2}{\text{kgf/cm}^2}\right)$											
			σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
Cilindru	1	a	166,6	137,6	161,2	131,7	155,5	111,8	225,9	190,9	201,1	157,3	166,2	128,5
		b	98,4	85,6	99,9	77	112,7	86,1	111,7	84,7	116,1	99,5	119,7	108,1
	2	a	187,3	95,7	—	—	159,6	115,9	162,5	104,2	160,8	83,4	156,8	90,9
		b	87,6	69,1	141	97,1	95,5	69,5	105,2	67,8	104,6	56,9	152,9	103,3
Elipsoid	1	a	119,3	104,7	144,3	124	137,1	119,8	179,3	154,5	193,6	169,6	157,8	137,4
		b	72,8	66,3	92,9	79,4	104,1	83,6	106,6	81,2	115,5	105,1	118,3	108,4
	2	a	106,8	75,5	—	—	123	97,4	155,1	146,9	140,3	106,7	129,7	100,1
		b	68,8	52,6	—	—	79,4	55,4	94	67,9	86,8	63,6	129,1	92,2

4. Observații și concluzii

Analizînd rezultatele experimentale obținute, se pot face următoarele observații :

1. Eforturile unitare principale și direcțiile principale variază în lungul liniei de intersecție elipsoid-cilindru, din cauza excentricității existente între axele de simetrie ale celor două suprafețe care se intersectează. Curbele de variație ale eforturilor unitare determinate pentru recipienții 1a și 4b sînt diferite, diferența provenind atît din modificarea raportului $\frac{d}{D}$ și, implicit, a raportului $\frac{e}{D} = 0{,}5\frac{d}{D} - 0{,}3$ cît și din modificarea grosimii h; ele sînt simetrice (au fost reprezentate porțiunile de curbă situate deasupra planului de simetrie) și indică o variație oscilantă a eforturilor unitare (fig. 2, 3).

2. Eforturile unitare în cilindru sînt în majoritatea punctelor de măsurare mai mari decît eforturile unitare în elipsoid (fig. 2, 3).

3. Deoarece s-au făcut măsurări pe perechi de recipienți avînd aceeași suprafață mediană și grosimi diferite ale pereților, s-a încercat a se stabili legătura existentă între eforturile unitare care apar în același punct, la doi recipienți diferind doar prin grosimea pereților și modul în care este verificată experimental această legătură. Expresia efortului unitar într-un punct pe suprafața exterioară este :

$$\sigma = \frac{N}{h} + \frac{M}{6h^2} \tag{6}$$

Pentru precizarea efortului de întindere N și a momentului încovoietor M, s-au făcut următoarele ipoteze :

a) Forța axială N este obținută din teoria de membrană deci este funcție doar de razele de curbură ale suprafețelor mediane respective în punctul considerat și de presiune ; ea nu se modifică dacă pentru aceiași suprafață mediană se consideră grosimi de perete diferite ;

b) Momentul încovoietor M se determină în ipoteza că suprafața mediană este inextensibilă ; valoarea lui se modifică dacă grosimea peretelui se modifică pentru una și aceiași suprafață mediană, solicitată cu aceiași presiune ;

c) De-a lungul liniei de intersecție cilindru — elipsoid este valabilă condiția de continuitate a eforturilor, deci momentele încovoietoare M care lucrează în cilindru și în elipsoid pe linia de intersecție (fig. 7) sînt egale.

Se scrie relația (6) pentru eforturile unitare normale pe direcția longitudinală (în planul de simetrie direcția longitudinală coincide cu direcția principală σ_1), în vecinătatea liniei de intersecție. În notația folosită indicii a și b precizează care mărimi se modifică odată cu schimbarea grosimii și indicii c, e — care mărimi se modifică odată cu schimbarea tipului de suprafață (cilindru, elipsoid). Se obține :

$$\sigma^{(ca)} = \frac{N_c}{h_a} + \frac{6M_a}{h_a^2} \tag{7}$$

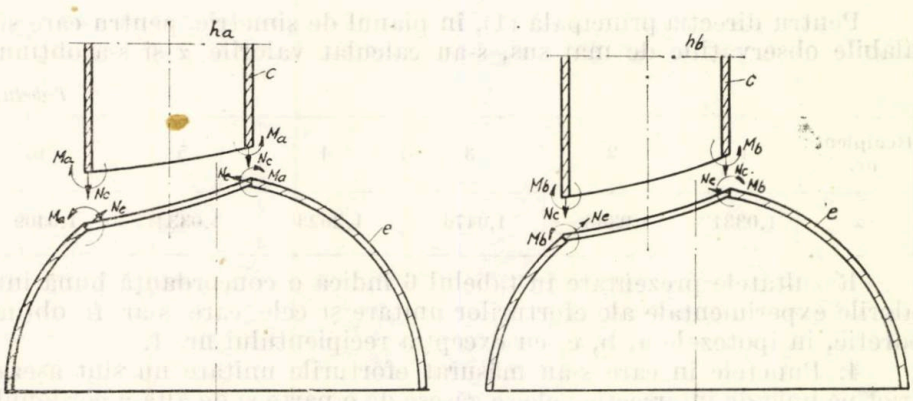


Fig. 7

$$\sigma^{(ea)} = \frac{N_e}{h_a} + \frac{6M_a}{h_a^2} \qquad \sigma^{(cb)} = \frac{N_c}{h_b} + \frac{6M_b}{h_b^2} \qquad \sigma^{(eb)} = \frac{N_e}{h_b} + \frac{6M_b}{h_b^2} \tag{7'}$$

Mărimile N_c, N_e, M_a, M_b sînt necunoscute; eforturile unitare $\sigma^{(ca)}$, $\sigma^{(ea)}$, $\sigma^{(cb)}$, $\sigma^{(eb)}$ sînt măsurate. În cazul în care prin măsurări la exterior pe recipienți cu grosimi ale pereților diferite s-ar putea separa efectele solicitărilor de încovoiere și de întindere, sistemul (7) ar da soluția problemei; dar determinatul sistemului este nul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_a} & 0 & \frac{6}{h_a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_a} & \frac{6}{h_a^2} & 0 \\ \frac{1}{h_b} & 0 & 0 & \frac{6}{h_b^2} \\ 0 & \frac{1}{h_b} & 0 & \frac{6}{h_b^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Condiția ca sistemul (7) să nu fie incompatibil ci doar nedeterminat duce la relațiile

$$\frac{\sigma^{(ca)} + \sigma^{(ea)}}{\sigma^{(cb)} + \sigma^{(eb)}} = \frac{h_b}{h_a}; \qquad \frac{\sigma^{(ca)} - \sigma^{(ea)}}{\sigma^{(cb)} - \sigma^{(eb)}} = \frac{h_b}{h_a}, \tag{9}$$

care se reduc la:

$$\frac{\sigma^{(ca)}}{\sigma^{(cb)}} = \frac{\sigma^{(ea)}}{\sigma^{(eb)}}, \tag{10}$$

sau

$$\alpha = \frac{\sigma^{(ca)}\sigma^{(eb)}}{\sigma^{(cb)}\sigma^{(ea)}} = 1. \tag{10'}$$

Pentru direcţia principală (1), în planul de simetrie, pentru care sînt valabile observaţiile de mai sus, s-au calculat valorile α şi s-a obţinut :

Tabelul 6

Recipient nr.	1	2	3	4	5	6
α	1,0331	1,0388	1,0476	1,2023	1,0334	1,0409

Rezultatele prezentate în tabelul 6 indică o concordanţă bună între valorile experimentale ale eforturilor unitare şi cele care s-ar fi obţinut teoretic, in ipotezele a, b, c, cu excepţia recipientului nr. 4.

4. Punctele în care s-au măsurat eforturile unitare nu sînt aşezate strict pe linia de intersecţie ; ele se găsesc de o parte şi de alta a cordonului de sudură, care are la suprafaţă o grosime de cca. două ori mai mare ca baza traductorilor. Din acest motiv, lungirea curbei de intersecţie obţinută cu deformaţiile specifice de pe cilindru diferă de cea obţinută de deformaţiile specifice de pe elipsoid.

5. Valoarea maximă a eforturilor unitare măsurate a fost obţinută în punctele plasate lîngă cordonul de sudură, atît pe cilindru cît şi pe elipsoid. Eforturile unitare obţinute prin măsurare sînt mai mici decît eforturile unitare maxime efective care apar lîngă sudură, datorită faptului că traductorul tensometric indică media deformaţiilor specifice care se produc de-a lungul bazei lui. Dacă se notează cu b baza traductorului şi cu ε_m deformaţia măsurată, este evident, că :

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{b}\int_0^b \varepsilon db\,; \tag{11}$$

cum lîngă sudură variaţia eforturilor unitare se face cu un gradient foarte mare, diferenţa dintre valorile externe ε şi valoarea medie măsurată ε_m, poate fi sensibilă.

6. A fost reprezentată variaţia eforturilor unitare pentru unitatea de presiune măsurată în două puncte la toţi recipienţii, în funcţie de raportul $\frac{e}{D}$ (fig. 5, 6). Deoarece variabila indepententă $\left(\text{raportul } \frac{e}{D} \text{ sau } \frac{d}{D}\right)$ nu are o gamă de valori repartizate uniform şi la intervale suficient de mici, curbele nu pot fi folosite pentru interpolare. Ele arată totuşi că dependenţa eforturilor unitare $\sigma_1^{(a)}$, $\sigma_2^{(a)}$, $\sigma_1^{(b)}$, $\sigma_2^{(b)}$ de rapoartele $\frac{e}{D}$ şi $\frac{d}{D}$ urmează acelaşi tip de lege.

Catedra de rezistenţa materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Worthing A. G., Geffner Y.*, — Prelucrarea datelor experimentale, Editura Tehnică, Bucureşti, 1959.
2. *Buzdugan Gh., Blumenfeld M.*, — Tensometria electrică rezistivă, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.
3. *Mocanu D. R., Buga M., Georgescu C.*, — Determinarea experimentală a eforturilor unitare, Editura transporturilor şi telecomunicaţiilor, Bucureşti, 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

HIDRAULICĂ

C. Z.: 621.2

ANALISIS OF THE PRESSURE WAVES PROPAGATION WITHIN A BUFFER RESERVOIR TAPPED ON A PIPE SISTEM *

ȘT. ZAREA, N. VASILIU

1. Aim of the work

In the paper it is analysed the way in which an incident pressure wave is reflected and refracted inside a buffer reservoir consisting of large-bore pipe put end-to-end to a pipe which is to be preserved from the water hammer. The associated flow and pressure waves method has been used for this purpose [1, 2].

It has been studied the fading of an incident pressure wave, due to a buffer reservoir set-up on a pipe which has one of its ends connected to a large-section reservoir, and to ther fitted to a valve.

2. Calculation method. Waves notation and representation

The handling of the flow variation gears, engenders through the pipes waves of a flow, q, to which an associated pressure waves, p [1, 2]. The associated waves may be direct ones, p_d, if they propagate in the positive way chosen for the axis of abscissae and speeds and inverse ones, p_i, if they propagate in the negative direction, respectively.

Between the intensities of associated directe waves of flow and pressure q_d and p_d, there is the relation,

$$p_d = Rq_d, \tag{1}$$

where R, is the wave resistance of the pipe run through by the waves, which is defined by the formula,

$$R = \rho \frac{a}{A} \tag{2}$$

where ρ, is the density of the fluid; a, the wave speed through the pipe; A, the cross-sectional area of the pipe.

In the case of the inversed associated waves, of flow q_i, and pressure p_i, the interconnecting relationship is,

$$p_i = -Rq_i. \tag{3}$$

* Manuscript receved. 3 May 1972

The variations of the section, the fittings and other local hydraulic resistances existing on the pipe are causing the reflexion and the refraction of the associated waves. To calculate the pressure and flow in a given section of the pipe, at a precise moment, we use the principle of effects superposition, whose analytical expression is :

$$Q = Q_0 + q_d + q_i ; \quad P = P_0 + p_d + p_i \tag{4}$$

where P_0 sand Q_0 are the flow and pressure during the steady flow, and q_d, p_d and q_i, p_i are the overall associated waves — direct and inverse — calculated as amounts of the waves which go through the respective section from the beginning of the transitive phenomenon till the considered time :

$$q_d = \sum_{j=1}^{m} q_{d,j} ; \quad q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} ; \quad p_d = \sum_{j=1}^{m} p_{d,j} ; \quad p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \tag{5}$$

In order to use the associated waves method it is necessary the adequate notation of the waves ; for this purpose, one has to point out in guise of indices affixed to each wave symbol, the following elements : The conduit in which the wave propagates, (α), the direction of the displacement (β) and the moment of emission, (γ), so that the complete notation we are proposing, for the waves intensities is,

$$p_{\alpha,\beta,\gamma} ; \quad q_{\alpha,\beta,\gamma} \tag{6}$$

The index (β) may be one of the letters d or i only, which symbolise the direct or the inverse propagation of the respective wave. To follow on the associated waves evolution, a presentation is made in a plane *xot* of their front positions at various times in the shape of straight lines whose angles to the axis of abscissae are proportional to the wave speeds in the pipes through they run.

2. Pressure waves propagation in series connected pipes

We consider a grouping of three pipes disposed in series (Fig. 1), and we note with $T_k = L_k/a_k$ the necessary time for the associated waves to run across, with the velocity, a_k, the length of the pipe, L_k. To point out the changes undergone by a single incident pressure wave, inside pipe 2 (which is the buffer reservoir), it is assumed that,

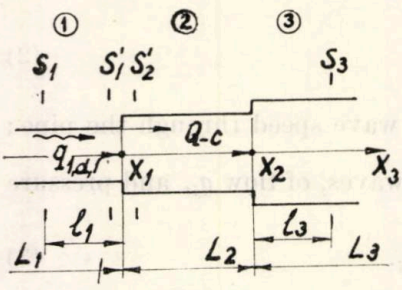


Fig. 1

$$T_1 \gg T_2 ; \quad T_3 \gg T_2 \tag{7}$$

so that it is not needed to take into account the pipe 2 generated waves, which are reflected at the ends of pipe 1 and pipe, 3, opposing it.

In the case of the usual installations, for calibrating the buffer resevoir, one must take into account the reflected waves from the ends of pipe 1 and pipe 3, opposite the reservoir, so as it is said in paragraph 5.

As time unity it is adopted the time needed by the waves to run across the pipe 2, so that any moment t is noted $\tau = t/T_2$.

It is assumed that by manipulating a control device of the flov, it is emited in pipe 1 through its left extremity — at a time which precedes the one when the studied phenomenon begins, and which is noted $t = -T_1 = -cT_2$, $c = T_2/T_1 \gg 1$ a direct flow wave, $q_{1,d,-c}$, to which it is associated a direct pressure wave $p_{1,d,-c}$

$$p_{1,d,-c} = R_1 q_{1,d,-c}. \tag{8}$$

At the time $t = 0$ these waves reach the left side end of pipe 2. At this place, the wave $p_{1,d,-c}$ is reflected and refracted, into two pressure waves $p_{1,i,0}$, and $p_{2,d,0}$. We note with S_1 and S_2 two sections in the near proximity of pipe 1 and pipe 2 joining. To determine the intensities of these waves, we admit, the equality of pressure and flow values in these sections, both before the arrival of the incident wave and after the reflected and refracted wave generation. The application of the principle of effects superposition leads to the following relations :

$$\frac{p_{1,i,0}}{p_{1,d,-c}} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}; \quad \frac{p_{2,d,0}}{p_{1,d,-c}} = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} \tag{9}$$

The waves generated at the time $t = 0$ are going in opposite directions through pipe 1 and pipe 2. The assumption no. 7 indicates that the wave $p_{2,d,0}$ runs across pipe 2 in a much shorter time than it is necessary for wave $p_{1,i,0}$ to reach the left-side end of pipe 1. That is why we follow only the wave generated in pipe 2. At a time $t = T_2$, ($\tau = 1$) the latter wave reaches the point where pipe 2 joins pipe 3, thus causing through reflection and refraction the waves : $p_{3,d,1}$ and $p_{2,i,1}$. The expressions for the intensities of these waves depending on the intensity of wave $p_{2,d,0}$ are obtained by using a set of relations in the form (9) :

$$\frac{p_{3,d,1}}{p_{2,d,0}} = \frac{2R_3}{R_2 + R_3}; \quad \frac{p_{2,i,1}}{p_{2,d,0}} = \frac{R_3 - R_2}{R_2 + R_3} \tag{10}$$

By replacing the expression (9) for the wave $p_{2,d,0}$ the set of relations below, are obtained

$$\frac{p_{3,d,1}}{p_{1,d,-c}} = \frac{4R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)}; \quad \frac{p_{2,i,1}}{p_{1,d,-c}} = \frac{2R_3(R_3 - R_2)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)} \tag{11}$$

The reflection time of pipe 2 being by assumption, less than that of pipe 3, the wave emitted in the latter is being, further, watched. Thus after going backwards through pipe 2, the wave $p_{2,i,1}$ dissociates a t a time $t =$

$=2T_2$, ($\tau = 2$) into two other waves $p_{1,i,2}$ and $p_{2,d,2}$. By imposing the conditions of pressure and flow equality in the sections S_1' and S_2' before the arrival of the incident wave and after the generation of the reflected and refracted wave, it results the relations :

$$\frac{p_{1,i,2}}{p_{2,i,1}} = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}; \quad \frac{p_{2,d,2}}{p_{2,i,1}} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \tag{12}$$

It is ascertained that the computational relationships (12) of wave intensities generated by an inverse pressure wave, are identical with the relations (9) which correspond with a direct incident wave. By considering the wave expression $p_{2,i,1}$ the relation (12) become,

$$\frac{p_{1,i,2}}{p_{1,d,-c}} = -\frac{4R_1R_2(R_2-R_3)}{(R_1+R_2)^2(R_2+R_3)}; \quad \frac{p_{2,d,2}}{p_{1,d,-c}} = \frac{2R_2(R_2 - R_1)(R_2 - R_3)}{(R_1+R_2)^2(R_2+R_3)}$$

The wave $p_{2,d,2}$ reiterates the situation occuring at a time $t = 0$ (wihch is the beginning of wave emission process in pipe 2). The calculation may go in the same way, but it is not necessary because it is easy to check that the wave intensities emitted in the pipe system, are forming up geometrical progression series with ratio :

$$N = \frac{(R_2 - R_1)(R_2 - R_3)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)} \tag{13}$$

If a natural ordinal number k is being attached to each wave, at any moment $t = \tau T_2 = (2k - 2) T_2$ where $\tau = 2k - 2$, $k>1$ the following waves are generated in pipes 1 and 2

$$\frac{p_{1,i,2k-2}}{p_{1,d,-c}} = \frac{4R_1R_2(R_3 - R_2)}{(R_1+R_2)2(R_2+R_3)} N^{k-1}; \quad \frac{p_{2,d,2k-2}}{p_{1,d,-c}} = \frac{2R_2}{R_1+R_2} N^{k-1} \tag{14}$$

At a later time $t = (2k - 1)T_2$, ($\tau = 2k - 1$), $k>1$, such waves are generated through pipe 2 and pipe 3, as below

$$\frac{p_{2,i,2k-1}}{p_{1,d,-c}} = \frac{2R_2(R_3 - R_2)}{(R_1 + R_2)(R_2+R_3)} N^{k-1}; \quad \frac{p_{3,d,2k-1}}{p_{1,d,-c}} = \frac{4R_2R_3}{(R_1+ R_2)(R_2+ R_3)} N^{k-1} \tag{15}$$

The pipes'wave resistances are positive by definition so that always the ratio of these geometrical progressions is fulfiling the inequalities,

$$-1 < N < 1 \tag{16}$$

That is why, the wave intensities emitted in the three pipes, are diminished to zero , when $\tau \to \infty$.

To determine how pressure evolves in the pipe system, the principle of effects superposition is being applied to. To this end, it is considered for pipe 1 a cross-section S_1 lying at a distance l_1 from its right-hand end ($0<l_1\leqslant L_1$). It is noted $\alpha = l_1/a_1$ the time needed by the waves to traverse that distance. The section S_1 pressure value is obtained, by super posing over the value from the steady regime which preceded the perturbation, the initial pressure wave intensity $p_{1,d,-c}$, the reflected wave intensity $p_{1,i,0}$ directly generated by it and the wave intensities emited later inside pipe 1, by pipe 2, until the time envisaged. It is noted with n, the inverse wave-number, generated inside pipe 1, the pressure in section S_1 at a certain time from the interval $(2n - 2 + \alpha,\ 2n + \alpha)$ between the moments of arrival of two consecutive pressure waves $p_{1,i,2n-2}$ and $p_{1,i,2n}$ is,

$$p_{1,\tau} = P_{1,-c} + p_{1,d,-c} + \sum_{k=1}^{n} p_{1,i,2k-2} \tag{17}$$

The sum of the first n inverse waves which are propagating through pipe 1, is,

$$\sum_{k=1}^{n} p_{1,i,2k-2} = \left[\frac{R_3 - R_1}{R_1 + R_3} - \frac{2R_1(R_2 - R_3)N^{n-1}}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}\right] p_{1,d,-c} \tag{18}$$

and replacing in relation (17), it becomes,

$$P_{1,\tau} = P_{1,-c} + \left[\frac{2R_3}{R_1 + R_3} + \frac{2R_1(R_2 - R_3)N^{n-1}}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}\right] p_{1,d,-c} \tag{19}$$

The relative superpressure inside section S_1 has the expression

$$\Delta P_{1,\tau} = \frac{P_{1,\tau} - P_{1,-c}}{p_{1,d,-c}} = \frac{2R_3}{R_1 + R_3} + \frac{2R_1(R_2 - R_3)N^{n-1}}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)} \tag{20}$$

From relations (18) and (19), it results for $n\to\infty$, $(t\to\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{1,i,2k-2} = \frac{R_3 - R_1}{R_1 + R_3} p_{1,d,-c} \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta P_{1,\tau} = \Delta P_{1,\infty} = \frac{2R_3}{R_1 + R_3} \tag{22}$$

It is ascertained that the sum of the infinits series of the reflected wave intensities through pipe 1 is given in dependence on the initial incident wave intensity, by a type (9) relation, which was written for the sudden change from a pipe 1 crosssection, to that of pipe 3, and thus it does not depend on the pipe 2 wave resistance.

Any S_3 cross section of pipe 3, lying at a distance l_3 from its upstream end, is run through by direct waves, exclusively. It is noted δ the time they need cover the distance l_3. At a time τ during the interval $[2n-1+\delta, 2n+1+\delta]$ the pressure gets the value

$$P_{3,\tau} = P_{3,-c} + \sum_{k=1}^{n} p_{3,d,2k-1} \tag{23}$$

where

$$\sum_{k=1}^{n} p_{3,d,2k-1} = \frac{2R_3}{R_1+R_3}(1-N^n)\, p_{1,d,-c} \tag{24}$$

thus the relative superpressure is,

$$\Delta P_{3,\tau} = \frac{P_{3,\tau} - P_{3,-c}}{p_{1,d-c}} = \frac{2R_3}{R_1+R_3}(1-N^n) \tag{25}$$

By passing to the limits such values are obtained :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{3,d,2k-1} = \frac{2R_3}{R_1+R_3}\, p_{1,d,-c} \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta P_{3,\tau} = \Delta P_{3,\infty} = \frac{2R_3}{R_1+R_3} \tag{27}$$

It results that the sum of the wave intensity infinite series transmitted in pipe 3, it's calculated by means of the relation corresponding to the sudden variation from the pipe 1 section to that in pipe 3, depending on the intensity of the initial wave $p_{1,d,-c}$. The superpressure boundary value in the perfect fluid model case is identical as for pipe 1 and pipe 3, a fact which verifies the accuracy of the calculations.

4. The behaviour of a buffer reservoir towards a pressure wave

Let us suppose that pipe 1 and pipe 3 adjoining the buffer reservoir have equal resistance to waves : $R_1 = R_3$. To point out the effect of the reservoir characteristics on the pressure change inside the contiguous pipes, let us bring in the notation,

$$x = R_2/R_1 \tag{28}$$

The buffer reservoir is characterized up by a condition $R_2 < R_1$ and then $0 < x < 1$. The intensity of the first wave turned back by the reservoir to pipe 1 — for $x<1$ — always has opposite sign to the intensity of the incident wave,

$$\frac{p_{1,i,0}}{p_{1,d,-c}} = \frac{x-1}{x+1} < 0 \tag{29}$$

and the intensities of all the other waves sent by the reservoir into adjacent pipes, carry the same sign as the incident wave intensity

The sums of the waves intensities emitted in pipe 1 and pipe 3 — for $n \to \infty$ — provide the following values :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{1,i,2k-2} = 0 ; \qquad (31)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{3,d,2k-1} = p_{1,d,-c}$$

The limiting value of superpressure is,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta P_{1,\tau} = \lim_{n\to\infty} \Delta P_{3,\tau} = 1 \qquad (32)$$

It is ascertained for the case of a single incident wave, that the buffer reservoir allows within a time interval which is theoretically infinite, but practically, finite, the transmission of this pressure wave from one of the adjacent pipes into the other, in form of an infinite wave train of decreasing intensity.

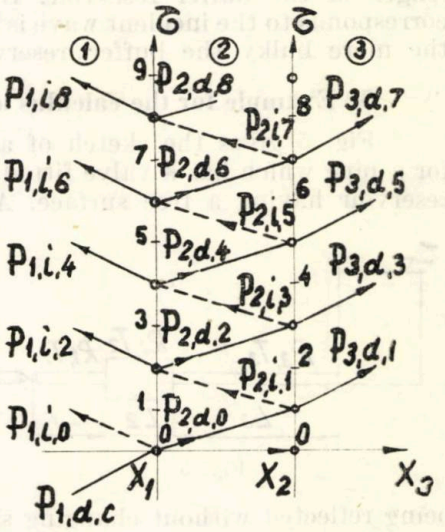


Fig. 2

Fig. 2 gives the pressure wave diagram for the buffer reservoir and adjacent pipes. In order to point out the wave resistance effect of the buffer reservoir upon the superpressure change inside the adjoing pipes it has been chosen four values for the parameter x. The results are displayed in diagram form in figs. 3 and 4. It is seen that when the parameter x

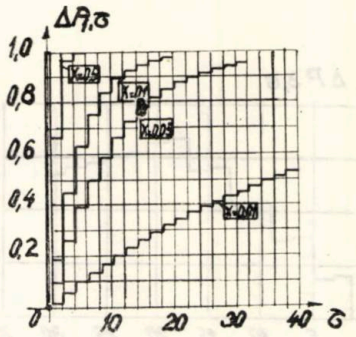


Fig. 3

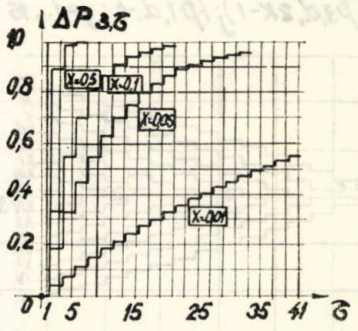


Fig. 4

has small values, namely for large sections of the buffer reservoir opposite the adjoining pipes, the former makes the incident wave started in pipe 1 to split into a very large number of lesser intensity waves are sent into

pipe 3. The larger the buffer reservoir cross-section, the lesser is the intensity of the conveyed waves. Therefore, the filled buffer reservoir does not impede but solely delays the sending of the incident wave into pipe 3. The time span taken by the waves, whose total sum practically equals up the incident wave force, to pass stands in direct proportion with the length of the buffer reservoir. It results that the superpressure which corresponds to the incident wave is being passed into pipe 3 the more slowly, the more bulky the buffer reservoir is.

5. Example for the calculus of the buffer reservoir efficiency

Fig. 5 gives the sketch of a water reservoir playing a buffer -role for a pipe which has a valve fitted at one of its ends, that is, a large-sized reservoir having a free surface. A calculation was made for the superpressure variation in a section of pipe 3 which lies immediately near the buffer reservoir, for $T_1 = T_2 = T_3/5$ and $x = 0{,}01$ (the diameters ratio $D_2/D_1 \approx 10$). By assuming that the valve obturates fully, the pressure waves are being reflected here without loosing their sign, because the flow is steady, i.e. zero, at this point. At the reservoir, the incident waves are being reflected without changing sign, as the pressure is mentained constant, here. It is ascertained that the intensity of the primary wav sent back by the buffer reservoir, inside pipe 1, is negative, and represents as absolute value 98 % of the intensity of the valve primary wave $p_{1,d,-c}$. After being reflected without changing sign towards the valve, the wave $p_{1,i,0}$ gets back to the buffer reservoir and causes inside pipe 3 at the beginning of time $\tau = 3$, a new series of waves, this time, negative ones. The intensities of these waves represents 98 % of the homologous waves corresponding to the primary wave $p_{1,o,-c}$. If we overlook by a first approximation the effect put by the series of small intensity waves sent by the buffer reservoir into pipe 1, then alternate positive and negative series are sent from pipe 3 with decreasing intensity, at a rate 0,98 (Fig. 6).

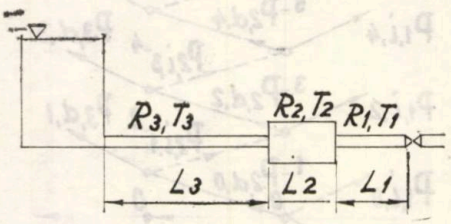


Fig. 5

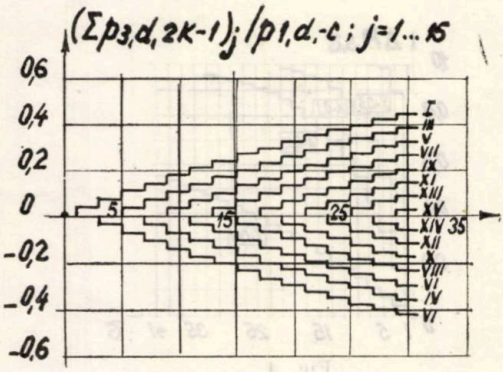


Fig. 6

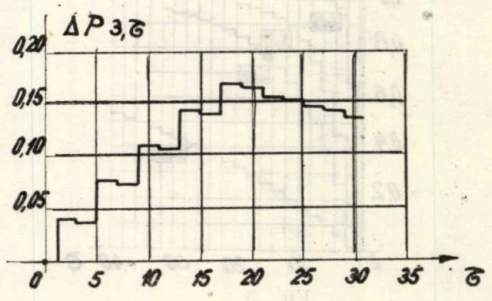


Fig. 7

It is ascertained that the superpressure in the primary sector of the protected pipe rises, slowly (Fig. 7), and reaches the maximum limit of 17 % of the primary wave intensity, at the arriving time of the reservoir sent waves which are reflected with changing sign to the rservoir ($\tau = 10$). Owing to this, the pressure over the considered sector diminishes till the moment $\tau = 20$, when a new rising follows, but the next maximum level and succeding maximum levels are lower than the one reached at the moment $\tau = 10$. Owing to lack of space this presentation included only the pressure change till the moment $\tau = 30$. For speeding up the computations a digital computer may be used too. A study can be made, this way, of the buffer reservoir rating by switching over its parameters (E_2, L_2, a_2) so that inside the buffered pipe superpressure is not allowed to build up beyond a tolerable limit.

6. Final considerations

The method used enables us to explain how an incident pressure wave propagates through a water reservoir meant for a buffer role, owing to a new notation system for the waves and to the systematic analysis realized.

It is, also, shown, that the buffer reservor mounted in series on a pipe does achieve an effective damping down effect on the pressure waves if there are considered the boundary conditions of the hydraulic system.

The computation may be performed through an computer which enables to determine the sizes of the buffer reservoir keeping an eye an the superpressure limit allowed inside the pipe.

The Departament of Hydraulic Machinery
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej Bucureşti

REFERENCES

1. *Schlag, A.* La lecture des ondes de coup de belier sur le tracé de Bergeron, La Houille Blanche" Nr. A, 1957.
2. *Cioc. D.* Fluids mechanics, Bucharest, 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

ELECTROTEHNICĂ

C. Z.: 621.3

APLICAREA METODEI SECȚIONĂRII LA REZOLVAREA GRAFELOR DE FLUENȚA ȘI DEDUCEREA UNOR NOI FORMULE TOPOLOGICE*

M. PREDA, H. GAVRILĂ, M. IORDACHE

1. **Introducere.** O problemă actuală în analiza circuitelor electrice este calculul circuitelor electrice complicate, în special al celor nereciproce, care constituie o parte componentă a diverselor instalații de telecomunicații sau automatizare. Astfel de circuite nereciproce sînt și circuitele electronice cu tranzistoare, care capătă o răspîndire tot mai mare în variate instalații tehnice.

In ultimii ani s-au elaborat numeroase metode eficiente de calcul al acestor circuite [1—5, 7, 8], față de care metoda grafelor de fluență cu aplicarea formulei lui Mason [3] prezintă inconvenientul că devine greoaie cînd graful conține numeroase bucle. O diminuare a acestui inconvenient, manifestat de regulă în cazul circuitelor complicate, se poate obține reducînd numărul de bucle prin despicarea unor noduri ale grafului dat [6].

2. **Grafele de fluență și transmitanțele lor echivalente.** Unei ecuații de forma (1), i se asociază un graf de fluență [3], fig. 1. Prin definiție valoarea x_j asociază unui nod al grafului este egală cu suma produselor dintre transmitanțele t_{jk} ale laturilor care intră în nodul j și valorile x_k asociate nodurilor k din care ies aceste laturi:

$$\sum_{k=0}^{n} t_{jk} x_k = x_j. \tag{1}$$

Unui sistem de n ecuații (independente) de forma (1) corespunzătoare lui $j = 1, 2, \ldots n$, îi corespunde un graf în care valoarea asociată fie-

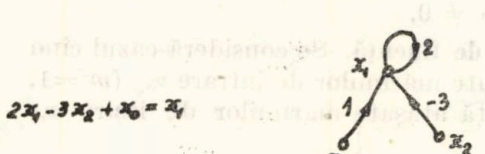


Fig. 1

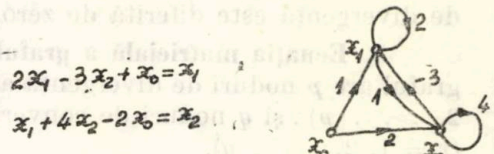


Fig. 2

cărui nod se exprimă ca și în cazul unei singure ecuații — exemplu în fig. 2. În aplicații se consideră ecuația (1) care pentru $j = 1, 2, \ldots n$, for-

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, mai 1971.

mează un sistem de n ecuații independente în raport cu x_1, x_2 . . . . x_n, iar mărimea x_0 și transmitanțele t_{jk} se presupun cunoscute. Prin definiție transmitanța echivalentă a grafului de fluență, de la nodul O la nodul j, este :

$$T_{j0} = \frac{x_j}{x_0} \tag{2}$$

Prin *despicarea unui nod k* al unui graf de fluență se înțelege înlocuirea acelui nod prin două noduri k' și k'' astfel încît din nodul k' să iasă toate laturile care ieșeau din nodul k, iar în nodul k'' să intre toate laturile care intrau în nodul k. Numind noduri de convergență (divergență) nodurile la care sînt legate numai laturi care intră (ies) în (din) nod, prin despicare nodul k oarecare se înlocuiește cu un nod de convergență și unul de divergență.

Prin despicarea unor noduri h, care sînt noduri ordinare (adică nu sînt noduri de convergență sau divergență) se obține un graf care corespunde unor ecuații diferite de ecuațiile (1) ale grafului inițial. În particular pentru $h = 1, 2, . . . n$, valorile $x_{1''}$, $x_{2''}$, . . . $x_{n''}$ determinate de x_0, la $x_{1'} = x_{2'} = x_{n'} = 0$, sînt diferite de x_1, x_2, . . . x_n.

Se observă că dacă se adaugă condițiile $x_{h'} = x_{h''}$ pentru toate nodurile h despicate evident graful corespunde unor ecuații echivalente cu ecuațiile (1). Valorile $x_{1'}$, $x_{2'}$, . ., $x_{n'}$ corespunzătoare nodurilor de divergență sînt valori independente.

Transmitanța echivalentă de întoarcere a unuia din nodurile despicate este prin definiție :

$$T_{j''j'} = \left(\frac{x_{j''}}{x_{j'}}\right) \text{ pentru } x_{k'} = 0 \text{ cu } k' \neq j' \text{ și } k' \neq 0 \tag{3}$$

adică corespunde cazului cînd numai o singură valoare atașată unui nod de divergență este diferită de zero, $x_{j'} \neq 0$.

3. Ecuația matricială a grafului de fluență. Se consideră cazul cînd graful are p noduri de divergență atașate mărimilor de intrare x_{i_m} ($m = 1, 2, . . . p$) și q noduri de convergență atașate mărimilor de ieșire x_{e_r} ($r = 1, 2, . . . q$).

Mărimile x_1, x_2, . . . x_d atașate unui număr d de noduri ordinare $1, 2, . . . d$ ale grafului se exprimă în funcție de trasmitanțele echivalente, de la nodurile de intrare $i_m = i_1, i_2, . . . i_p$ la nodurile $j = 1, 2, . . . d$ prin relația matricială :

$$x_j] = [T_{ji_m}] \cdot x_{i_m}] \tag{4}$$

în care s-au folosit următoarele notații ale matricelor :

$$x_j] = \begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ j & x_j \\ \vdots & \vdots \\ d & x_d \end{array}, \qquad [T_{ji_m}] = \begin{array}{c|ccccc} & i_1 & \cdots & i_m & \cdots & i_p \\ \hline 1 & T_{1i_1} & \cdots & T_{1i_m} & \cdots & T_{1i_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ j & T_{ji_1} & \cdots & T_{ji_m} & \cdots & T_{ji_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d & T_{di_1} & \cdots & T_{di_m} & \cdots & T_{di_p} \end{array},$$

$$x_{i_m}] = \begin{array}{c|c} i_1 & x_{i_1} \\ \vdots & \vdots \\ i_m & x_{i_m} \\ \vdots & \vdots \\ i_p & x_{i_p} \end{array}. \tag{5}$$

Avînd în vedere relația de definiție (2) a transmitanței echivalente, matricea mărimilor de ieșire se exprimă prin relația :

$$x_{er}] = [T_{eri_m}] \cdot x_{i_m}] \tag{6}$$

unde matricea coloană $x_{er}]$ este matricea mărimilor de ieșire, iar matricea dreptunghiulară $T_{eri_m}]$ este matricea transmitanțelor echivalente de la intrare la ieșire :

$$x_{er}] = \begin{array}{c|c} e_1 & x_{e_1} \\ \vdots & \vdots \\ e_r & x_{er} \\ \vdots & \vdots \\ e_q & x_{eq} \end{array}, \qquad [T_{eri_m}] = \begin{array}{c|ccccc} & i_1 & \cdots & i_m & \cdots & i_p \\ \hline e_1 & T_{e_1i_1} & \cdots & T_{e_1i_m} & \cdots & T_{e_1i_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & T_{eri_1} & \cdots & T_{eri_m} & \cdots & T_{eri_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_q & T_{eqi_1} & \cdots & T_{eqi_m} & \cdots & T_{eqi_p} \end{array}. \tag{7}$$

4. Graful cu noduri despicate și ecuația sa matricială. Se consideră despicate d noduri ale grafului. Mărimile atașate noilor noduri de convergență $1'', 2'', \ldots d''$ se exprimă în funcție de mărimile atașate noilor noduri de divergență $1', 2', \ldots, d'$ și în funcție de mărimile de intrare $x_{i_1}, x_{i_r}, \ldots x_{i_p}$ prin relația matricială :

$$x_{j''}] = [T_{j''j'}] \cdot x_{j'}] + [T_{j''i_m}] \cdot x_{i_m}] \tag{8}$$

în care *matricea transmitanțelor* (echivalente) de întoarcere este o matrice pătrată avînd elementele definite de relația (3).

$$[T_{j''j'}] = \begin{array}{c|cccccc} & 1' & \cdots & j' & \cdots & d' \\ \hline 1'' & T_{1''1'} & \cdots & T_{1''j'} & \cdots & T_{1''d'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ j'' & T_{j''1'} & \cdots & T_{j''j'} & \cdots & T_{j''d'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d'' & T_{d''1'} & \cdots & T_{d''j'} & \cdots & T_{d''d'} \end{array} \tag{9}$$

Matricea transmitanțelor echivalente de la nodurile mărimilor de intrare la noile noduri de convergență $1'', 2'', \ldots, d''$ este matricea dreptunghiulară

$$[T_{j''i_m}] = \begin{array}{c|cccccc} & i_1 & \cdots & i_m & \cdots & i_p \\ \hline 1'' & T_{1''i_1} & \cdots & T_{1''i_m} & \cdots & T_{1''i_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ j'' & T_{j''i_1} & \cdots & T_{j''i_m} & \cdots & T_{j''i_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d'' & T_{d''i_1} & \cdots & T_{d''i_m} & \cdots & T_{d''i_p} \end{array} \tag{10}$$

Relația (8) permite exprimarea diferențelor de întoarcere sub formă matricială :

$$x_{j'}] - x_{j''}] = [F] \cdot x_{j'}] - [T_{j''i_m}] \cdot x_{i_m}] \tag{11}$$

în care matricea :

$$[F] = [1] - [T_{j''j'}] \tag{12}$$

este numită *matricea diferențelor de întoarcere.*

Notînd cu $T_{d,e_r i_m}$ transmitanța echivalentă de la nodul de intrare i_m la nodul de ieșire e_r în graful cu nodurile 1, 2,. . . d despicate rezultă:

$$x_{e_r}] = [T_{er j'}].\ x_{j'}] + [T_{d,e_r i_m}] \cdot x_{i_m}] \tag{13}$$

unde matricele dreptunghiulare:

$$[T_{er j'}] = \begin{array}{c|cccccc} & 1' & \cdots & j' & \cdots & d' \\ \hline e_1 & T_{e_1 1'} & \cdots & T_{e_1 j'} & \cdots & T_{e_1 d'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & T_{er1'} & \cdots & T_{erj'} & \cdots & T_{erd'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_q & T_{eq1'} & \cdots & T_{eqj'} & \cdots & T_{eqd'} \end{array}$$

respectiv

$$T_{d,e_r i_m} = \begin{array}{c|cccccc} & i_1 & \cdots & i_m & \cdots & i_p \\ \hline e_1 & T_{d,e_1 i_1} & \cdots & T_{d,e_1 i_m} & \cdots & T_{d,e_1 i_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & T_{d,e r i_1} & \cdots & T_{d,e r i_m} & \cdots & T_{d,e r i_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_q & T_{d,eq i_1} & \cdots & T_{d,eq i_m} & \cdots & T_{d,eq i_p} \end{array} \tag{14}$$

sînt: matricea transmitanțelor echivalente de la nodurile de divergență j' la nodurile de ieșire, respectiv matricea transmitanțelor echivalente de la nodurile de intrare i_m la nodurile de ieșire e_r în graful cu noduri despicate.

5. Exprimarea transmitanțelor echivalente ale unui graf în funcție de transmitanțele grafului obținut prin despicarea nodurilor. Revenirea de la graful cu noduri despicate la graful din care acesta s-a obținut se exprimă matematic prin condițiile:

$$x_{j'}] = x_{j''}] = x_j]. \tag{15}$$

Revenirea la valorile atașate nodurilor grafului inițial se poate interpreta și prin introducerea unor laturi de transmitanță *1* care ieșind cîte una din nodurile $x_{j'}$ intră în nodul corespunzător $x_{j''}$, pentru $j' = 1'; 2'; \ldots d'$.

Sistemul de ecuații matriciale (11), (13) și (15) permite exprimarea matricei mărimilor atașate nodurilor despicate x_j în forma :

$$x_j] = [F]^{-1} \cdot [T_{j''i_m}] \cdot x_{i_m}] \tag{16}$$

și a mărimii de ieșire în forma :

$$x_{e_r}] = ([T_{erj'}] \cdot [F]^{-1} \cdot [T_{j''i_m}] + [T_{d,eri_m}]) \cdot x_{i_m}]. \tag{17}$$

Prin comparație cu relațiile (4) rezultă *matricea transmitanțelor echivalente de la nodurile de intrare* $i_1, i_2, \ldots i_p$ la nodurile $j = 1, 2, \ldots d$.

$$[T_{ji_m}] = [H] \cdot [T_{j''i_m}] \tag{18}$$

în funcție de inversa matricei diferențelor de întoarcere :

$$[H] = [F]^{-1} \tag{19}$$

numită *matricea intrărilor la diferențe de întoarcere egale cu unitatea.*

Prin comparație cu (6), se obține matricea transmitanțelor echivalente de la nodurile de intrare la nodurile de ieșire sub forma :

$$[T_{eri_m}] = [T_{erj'}] \cdot [H] \cdot [T_{j''i_m}] + [T_{d,eri_m}] \tag{20}$$

sau

$$[T_{eri_m}] = [T_{erj'}] \cdot [T_{ji_m}] + [T_{d,eri_m}]. \tag{21}$$

Rezultă următoarea metodă de calcul al matricei transmitanțelor echivalente $[T_{eri_m}]$ de la nodurile de intrare $i_m = i_1, i_2, \ldots i_p$ la nodurile de ieșire $e_r = e_1, e_2, \ldots e_q$ a unui graf dat G :

— se aleg nodurile $1, 2, \ldots d$ ale grafului care se despică simultan și se formează graful cu noduri despicate ;

— se formează matricele $[T_{j''i_m}]$, $[T_{j''j'}]$ $[T_{erj'}]$, $[T_{d,eri_m}]$ folosind relațiile lor de definiție (10), (9) (14) și apoi se calculează matricele $[F]$ și $[H] = [F]^{-1}$, corespunzătoare grafului cu toate nodurile despicate ;

— folosind relația (18) se calculează matricea $[T_{ji_m}]$ a transmitanțelor în graful dat G, de la nodurile de intrare $i_1, i_2, \ldots i_p$ la nodurile $1, 2, \ldots d$, în situația cînd nici un nod nu este despicat ;

— matricea transmitanțelor căutate $[T_{eri_m}]$ se calculează folosind relația (20) sau relația (21).

6. Compararea metodei propuse a despicarii nodurilor cu alte metode de calcul. Se observă ușor că în calculul matricei $[T_{eri_m}]$ intervine inversarea matricei diferențelor de întoarcere $[F]$ al cărui ordin depinde de numărul d al nodurilor despicate. Cu cît numărul ales d este mai mic această inversiune este mai simplă. Pe de altă parte calculul celorlalte matrici $[T_{j''j'}]$, $[T_{j''i_m}]$ și $[T_{erj'}]$ care intervin în formula (20) este cu atît mai complicat cu cît numărul ales d al nodurilor despicate este mai mic. În aceasta constă

dilema metodei de calcul propuse. Alegerea convenabilă a nodurilor despicate presupune o familiarizare prealabilă cu metoda grafelor de fluenţă. De asemenea realizarea unui graf de fluenţă cît mai simplu necesită alegerea celor mai adecvate ecuaţii ale circuitului (în curenţi de contur, potenţiale ale nodurilor sau tensiuni independente).

Se observă că metoda propusă conduce la o simplificare importantă a calculelor dacă prin alegerea lui $d = 1$ sau 2 se obţine un graf în care transmitanţele echivalente se pot scrie direct sau se pot calcula simplu.

Dacă graful circuitului este complicat, metoda propusă poate fi folosită cu acelaşi succes aplicînd-o de mai multe ori succesiv. Pentru aceasta se despică într-o primă etapă (de exemplu) două noduri obţinîndu-se graful G', despicînd în aceasta alte două noduri se obţine graful G'' în care transmitanţele echivalente se calculeaza mai simplu etc.

7. Deducerea unor noi formule topologice

Calculul termenilor ce intervin în formula lui Mason [3] referitoare la calculul unei transmitanţe echivalente între două noduri oarecare ale grafului este destul de greoi, mai ales cînd graful respectiv conţine un număr mare de bucle.

Prin secţionarea anumitor noduri ale grafului se pot deduce formule noi pentru determinarea acestor transmitanţe echivalente, formule în expresia cărora intervin termeni ce se pot calcula mai uşor, deoarece prin despicare se reduce numărul buclelor.

Se consideră cazul cînd graful are un singur nod de divergenţă i, ataşat mărimii de intare x_i şi un singur nod de convergenţă e ataşat mărimii de ieşire x_e. În aceste condiţii ecuaţiile matriciale (16), (17), (18) şi (20) capătă următoarele forme :

$$x_j] = [F]^{-1} \cdot T_{j''i}] \cdot x_i \tag{22}$$

$$x_e = (\underset{|\_\_|}{T_{ej}} \cdot [F]^{-1} \cdot T_{j''i}] + T_{d,ei})\, x_i \tag{23}$$

$$T_{ij}] = [F]^{-1} \cdot T_{j''i}] \tag{24}$$

şi

$$T_{ei} = T_{d,ei} + \underset{|\_\_|}{T_{ej'}} \cdot [F]^{-1} \cdot T_{j''i}] \tag{25}$$

unde matricele dreptunghiulare $[T_{j''i_m}]$ şi $[T_{e_r j'}]$, cu semnificaţiile (9) respectiv (14) s-au transformat în matricele coloană $T_{j''i}]$ respectiv linie $\underset{|\_\_|}{T_{ej'}}$.

I. *Prima formulă topologică*

Se consideră că se despică un singur nod al grafului, fie acesta nodul j. În acest caz matricea diferenţelor de întoarcere $[F]$ are un singur element :

$$F = 1 - T_{j''j'}. \tag{26}$$

Ca urmare transmitanța echivalentă de la nodul de intrare i la nodul j are, conform ecuației (24), următoarea expresie

$$T_{ji} = \frac{T_{j''i}}{1 - T_{j''j'}} \tag{27}$$

unde $T_{j''i}$ este transmitanța echivalentă de la nodul de intrare i la noul nod de convergență j'' rezultat prin despicarea nodului j iar $T_{j''j'}$ este transmitanța echivalentă de întoarcere de la nodul de divergență j' la nodul de convergență j''.

În conformitate cu formula lui Mason [3] transmitanțele $T_{j''i}$, $T_{j''j'}$, se pot calcula cu expresiile :

$$T_{j''i} = \frac{C_{j''i}}{B_j}, \quad T_{j''j'} = \frac{C_{j''j'}}{B_j} \tag{28}$$

unde : $B_j = 1 + \sum_{s=1}^{n'_B} (-1)^s \, S_{ps}$, $C_{j''i} = \sum_{k \in (j''i)} C_k \Delta_k$,

$$C_{j''j'} = \sum_{m \in (j''j')} C_m \Delta_m \tag{29}$$

cu :

n'_B = numărul de bucle disjuncte (buclele care nu au nici un nod comun) ale grafului cu nodul j despicat ;

S_{ps} = suma tuturor produselor de s bucle disjuncte ;

$C_k\,(C_m)$ = calea $k(m)$;

$\sum_{k \in (j''i)} \left(\sum_{m \in (j''j')} \right)$ = suma pentru toate valorile lui $k(m)$ care corespund căilor ce au extremități nodurile j'' și i (j'' și j') ;

$\Delta_k(\Delta_m)$ = mărimea B_j corespunzătoare grafului obținut din graful cu nodul j despicat prin eliminarea tuturor laturilor legate la nodurile căii $k(m)$.

Înlocuind relațiile (28) în relația (27) rezultă prima formulă topologică de calcul al transmitanței echivalente T_{ji} de la nodul de intrare i la nodul j :

$$T_{ji} = \frac{C_{j''i}}{B_j - C_{j''j'}} \cdot \tag{30}$$

Marele avantaj pe care-l prezintă formula (30) constă în faptul că prin despicarea unui nod se elimină toate buclele care treceau prin acel nod, iar urmărirea căilor este mult mai ușoară, ceea ce conduce la simplificare calculul lui T_{ji} față de cel dat de formula lui Mason.

II. *A doua formulă topologică*

Se consideră că se despică două noduri ale grafului, nodul j şi nodul k. În cazul acesta matricea diferenţelor de întoarcere este :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{j''j'} & T_{j''k'} \\ T_{k''j'} & T_{k''k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-T_{j''j'} & -T_{j''k'} \\ -T_{k''j'} & 1-T_{k'k'} \end{bmatrix} \tag{31}$$

iar :

$$[H] = [F]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(1-T_{j''j'})(1-T_{k''k'}) - T_{j''k'}\, T_{k''j'}} \begin{bmatrix} 1-T_{k''k'} & T_{j''k'} \\ T_{k''j'} & 1-T_{j''j'} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Matricea transmitanţelor echivalente de la nodul de intrare i la noile noduri de convergenţă j'' şi k'' este matricea coloană :

$$T_{j''i}] = \begin{bmatrix} T_{j''i} \\ T_{k''i} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Cu ajutorul relaţiei (24) şi avînd în vedere relaţiile (32) şi (33) rezultă transmitanţa

$$T_{ji} = \frac{(1 - T_{k''k'})\, T_{j''i} + T_{k''i}\, T_{j''k'}}{(1-T_{j''j'})\,(1-T_{k''k'}) - T_{j''k'} \cdot T_{k''j}}. \tag{34}$$

Înlocuind în formula (34) transmitanţele echivalente $T_{k''k'}$; $T_{j''i}$ $T_{k''i}$; $T_{j''j'}$; $T_{j''k'}$; $T_{k''j'}$, cu valorile lor date de formula lui Mason se obţine a doua formulă topologică de calcul al transmitanţei echivalente T_{ji}

$$T_{ji} = \frac{(B_{j,k} - C_{k''k'})\, C_{j''i} + C_{j''k'}\, C_{k''i}}{(B_{j,k} - C_{k''k'})\,(B_{j,k} - C_{j''j'}) - C_{k''k'}\, C_{k''j'}} \tag{35}$$

unde mărimile $B_{j,k}$; $C_{k''k'}$; $C_{j''j'}$; $C_{j''i}$; $C_{k''i}$; $C_{i''k'}$; şi $C_{k''j'}$, au semnificaţiile date de relaţiile (28) şi (29) pentru graful cu nodurile j şi k despicate. Prin despicarea nodurilor j şi k se elimină toate buclele care treceau prin ele şi adesea nodul k se poate alege în aşa fel încît prin despicarea nodurilor j şi k să se elimine toate buclele grafului dat ceea ce constituie o simplificare evidentă a calculului termenilor din relaţia (35).

8. Aplicaţii. I. Calculul factorului de amplificare al unui amplificator cu un transistor şi transformator de cuplaj, (fig. 3).

Circuitul echivalent avînd numai trei ochiuri şi un cuplaj magnetic, este avantajos să se scrie ecuaţiile curenţilor de contur :

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 = \underline{U}_i$$

$$(\underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_3)\,\underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)\,\underline{I}_2 + \underline{Z}_{45}\underline{I}_3 = 0$$

$$\underline{Z}_{45}\underline{I}_2 + (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)\,\underline{I}_3 = 0 \qquad (36)$$

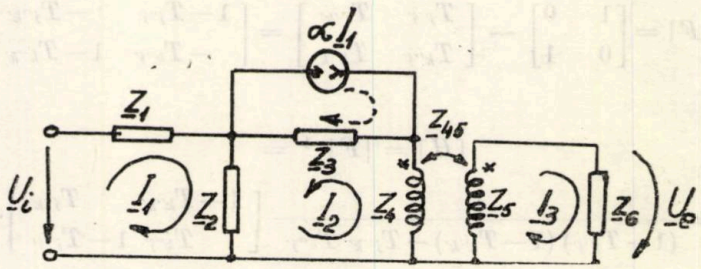


Fig. 3

Pentru obținerea tensiunii de ieșire, la sistemul de ecuații (36) se adaugă ecuația :

$$\underline{U}_e = \underline{Z}_6\underline{I}_3. \qquad (37)$$

Pentru formarea grafului de fluență, ecuațiile de mai sus se pun sub forma (38) în care cîte o mărime necunoscută este exprimată în funcție de celelalte :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{A}\,\underline{U}_i + \underline{B}\,\underline{I}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{C}\,\underline{I}_1 + \underline{D}\,\underline{I}_3 \\ \underline{I}_3 &= \underline{E}\,\underline{I}_2 \\ \underline{U}_e &= \underline{Z}_6\underline{I}_3 \end{aligned} \qquad (38)$$

cu :

$$\underline{A} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3},\quad \underline{B} = -\,\underline{Z}_2\underline{A};\quad \underline{C} = -\,\frac{\underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4},$$

$$\underline{D} = -\,\frac{\underline{Z}_{45}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4},\quad \underline{E} = -\,\frac{\underline{Z}_{45}}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}. \qquad (39)$$

În fig. 4 este reprezentat graful de fluență corespunzător ecuațiilor (38). Despicînd nodul 2 se obține graful din fig. 5 căruia îi corespund matricele :

$$[T_{j''i_m}] = 2''\overset{i}{|\underline{A}\,\underline{C}|},\qquad [T_{j''j'}] = 2''\overset{2'}{|\underline{B}\,\underline{C} + \underline{D}\,\underline{E}|}.$$

$$[T_{eri'}] = e^{\boxed{\underline{E}\,\underline{Z}_6}}, \quad [T_{d,eri_m}] = [0] \tag{40}$$

Avînd

$$[H] = \boxed{\frac{1}{1 - \underline{B}\,\underline{C} - \underline{D}\,\underline{E}}} \tag{41}$$

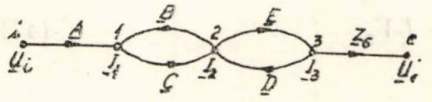


Fig. 4

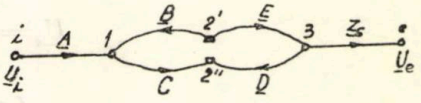


Fig. 5

din relațiile (18) și (21) rezultă respectiv :

$$[T_{ii_m}] = \boxed{\frac{\underline{A}\,\underline{C}}{1 - \underline{B}\,\underline{C} - \underline{D}\,\underline{E}}} \tag{42}$$

$$[T_{ei}] = \frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{A}\,\underline{C}\,\underline{E}}{1 - \underline{B}\,\underline{C} - \underline{D}\,\underline{E}}\,\underline{Z}_6. \tag{43}$$

Înlocuind valorile lui $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$, se obține :

$$T_{ei} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_6\underline{Z}_{45}(\underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_3)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}}{1 - \dfrac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_3)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)} - \dfrac{\underline{Z}_{45}^2}{(\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}}. \tag{44}$$

După cîteva transformări elementare rezultă final :

$$T_{ei} = \frac{\underline{Z}_6\underline{Z}_{45}(\underline{Z}_2 + \alpha\underline{Z}_3)}{(\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)[(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2(\underline{Z}_1 - \alpha\underline{Z}_3)] - \underline{Z}_{45}^2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}. \tag{45}$$

Se remarcă faptul că după familiarizarea cu metoda expusă relația (44) se poate scrie direct ca și în cazul aplicării formulei lui Mason.

II. Calculul factorului de amplificare la un amplificator cu două tranzistoare. Considerînd schema echivalentă simplificată a amplificatorului, fig. 6.a și 6.b, se obțin folosind metoda simbolică ecuațiile potențialelor nodurilor în regim sinusoidal :

$$\begin{aligned}
&(\underline{V}_1 - \underline{U}_i)\,\underline{Y}_b' + \underline{V}_1\underline{Y}_e' + (\underline{V}_1 - \underline{V}_2)\,\underline{Y}_c' - \alpha\underline{V}_1\underline{Y}_e' = 0\\
&(\underline{V}_1 - \underline{V}_2)\,\underline{Y}_c' - \alpha'\underline{V}_1\underline{Y}_e' - \underline{V}_2\underline{Y}_1 + (\underline{V}_3 - \underline{V}_2)\,\underline{Y}_b'' = 0\\
&(\underline{V}_3 - \underline{V}_2)\,\underline{Y}_6'' + \underline{V}_3\underline{Y}_c'' + (\underline{V}_3 - \underline{U}_e)\,\underline{Y}_e'' + \alpha''\underline{Y}_e''(\underline{U}_e - \underline{V}_3) = 0\\
&(\underline{U}_e - \underline{V}_3)\,\underline{Y}_e'' + \underline{Y}_n\underline{U}_e + (\underline{U}_e - \underline{U}_i)\,\underline{Y}_2 = 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Pentru construirea grafului de fluență aceste ecuații se transcriu sub forma :

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{A}\,\underline{U}_i + \underline{B}\,\underline{V}_2 \\ \underline{V}_2 &= \underline{C}\,\underline{V}_1 + \underline{D}\,\underline{V}_3 \\ \underline{V}_3 &= \underline{E}\,\underline{V}_2 + \underline{F}\,\underline{U}_e \\ \underline{U}_e &= \underline{K}\,\underline{U}_i + \underline{L}\,\underline{V}_3 \end{aligned} \tag{47}$$

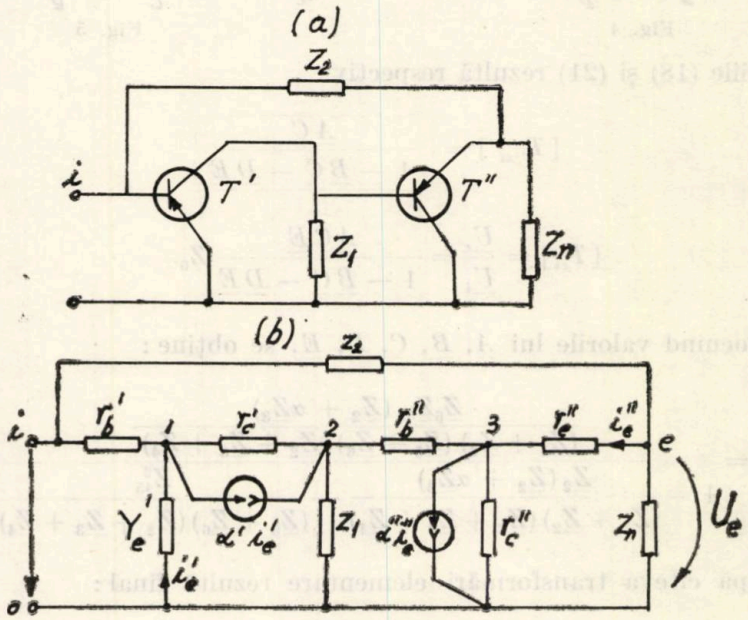


Fig. 6

cu :

$$\underline{A} = \frac{\underline{Y}'_b}{\underline{Y}'_b + (1-\alpha')\underline{Y}'_e + \underline{Y}'_c}; \quad \underline{B} = \frac{\underline{Y}'_c}{\underline{Y}'_b + (1-\alpha')\underline{Y}'_e + \underline{Y}'_c}$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{Y}'_c - \alpha'\underline{Y}'_e}{\underline{Y}''_b + \underline{Y}'_c + \underline{Y}_1}; \quad \underline{D} = \frac{\underline{Y}''_b}{\underline{Y}''_b + \underline{Y}'_c + \underline{Y}_1} \tag{48}$$

$$\underline{E} = \frac{\underline{Y}''_b}{\underline{Y}''_b + \underline{Y}''_c + (1-\alpha'')\underline{Y}''_e}; \quad \underline{F} = \frac{(1-\alpha'')\underline{Y}''_e}{\underline{Y}''_b + \underline{Y}''_c + (1-\alpha'')\underline{Y}''_e}$$

$$\underline{K} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}''_e + \underline{Y}_n + \underline{Y}_2}; \quad \underline{L} = \frac{\underline{Y}''_e}{\underline{Y}''_e + \underline{Y}_n + \underline{Y}_2}$$

Ecuațiilor (47) le corespunde graful de fluență reprezentat în fig. 7. Despicînd nodurile 2 și 3 se obține graful din fig. 8. Pentru acest ultim graf corespund matricele:

$$[T_{j''j'}] = \begin{matrix} \\ 2'' \\ 3'' \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 2' & 3' \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} \underline{B}\,\underline{C} & \underline{D} \\ \underline{E} & \underline{L}\,\underline{F} \end{matrix}\right| \end{matrix}, \qquad [T_{j''i_m}] = \begin{matrix} \\ 2'' \\ 3'' \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} i \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} \underline{A} & \underline{C} \\ \underline{K} & \underline{F} \end{matrix}\right| \end{matrix}. \tag{49}$$

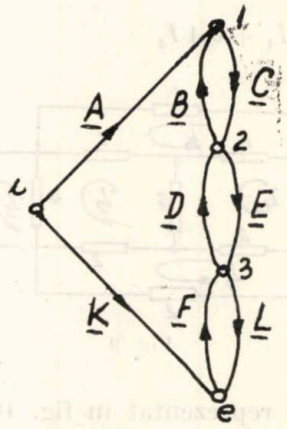


Fig. 7

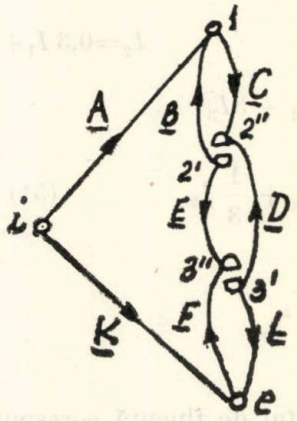


Fig. 8

$$[T_{ej'}] = \mathrm{e}\begin{matrix} \begin{matrix} 2' & 3' \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 0 & \underline{L} \end{matrix}\right| \end{matrix}, \qquad [T_{d,eri_m}] = \mathrm{e}\begin{matrix} \begin{matrix} i \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} \underline{K} \end{matrix}\right| \end{matrix}$$

Din prima matrice de mai sus se calculează

$$[F] = \left|\begin{matrix} 1-\underline{B}\,\underline{C} & \underline{D} \\ \underline{E} & 1-\underline{L}\,\underline{F} \end{matrix}\right|$$

$$[H] = \frac{1}{1-\underline{B}\,\underline{C}-\underline{D}\,\underline{E}-\underline{L}\,\underline{F}+\underline{B}\,\underline{C}\,\underline{L}\,\underline{F}} \left|\begin{matrix} 1-\underline{E}\,\underline{F} & -\underline{D} \\ -\underline{E} & 1-\underline{B}\,\underline{C} \end{matrix}\right|$$

Din formula (18) rezultă:

$$[T_{ji_m}] = \frac{1}{1-\underline{B}\,\underline{C}-\underline{D}\,\underline{E}-\underline{L}\,\underline{F}+\underline{B}\,\underline{C}\,\underline{L}\,\underline{F}} \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} i \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} \underline{A}\,\underline{C}-\underline{A}\,\underline{C}\,\underline{L}\,\underline{F}-\underline{D}\,\underline{K}\,\underline{F} \\ -\underline{A}\,\underline{C}\,\underline{E}+\underline{K}\,\underline{F}-\underline{K}\,\underline{F}\,\underline{B}\,\underline{C} \end{matrix}\right| \end{matrix}$$

Utilizînd relația (21) rezultă final:

$$T_{ei} = \frac{U_e}{U_i} = \frac{1}{1-\underline{B}\,\underline{C}-\underline{D}\,\underline{E}-\underline{L}\,\underline{F}+\underline{B}\,\underline{C}\,\underline{L}\,\underline{F}} \left(-\underline{A}\,\underline{C}\,\underline{E}\,\underline{L}+\underline{K}\,\underline{F}\,\underline{L}-\right.$$
$$\left.-\underline{K}\,\underline{L}\,\underline{F}\,\underline{B}\,\underline{C}\right)+\underline{K}.$$

III. Calculul tensiunii de ieșire la un circuit electric de curent continuu. Valorile rezistențelor electrice indicate în ohmi în schema electrică a circuitului, reprezentată în fig. 9 conduc la următorele ecuații ale curenților de contur :

$$I_3 = -E + 6I_1 - 3I_2 - 2I_4$$

$$I_2 = 0{,}3\,I_1 + 0{,}1\,I_3 + 0{,}2\,I_4 + 0{,}4\,I_4$$

$$I_1 = -I_2 + 3I_3$$

$$I_4 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{3}I_2 \qquad (51)$$

$$I_5 = \frac{1}{2}I_2$$

$$U_e = 4I_5.$$

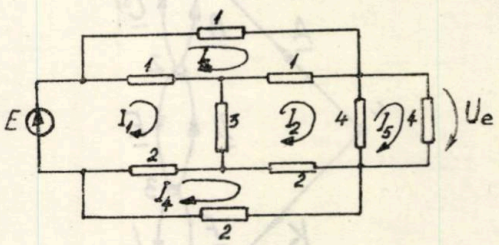


Fig. 9

Graful de fluență corespunzător este reprezentat în fig. 10. Nodul corespunzător mărimii de intrare E este notat cu indicele i.

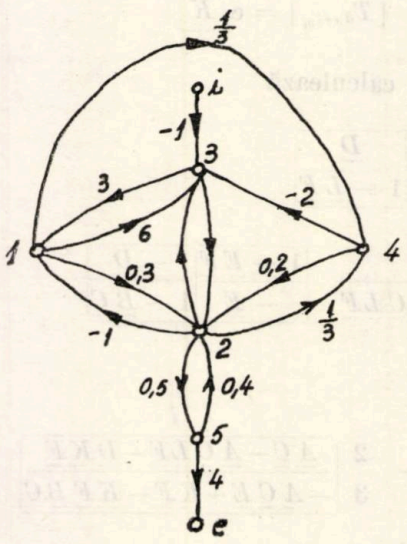


Fig. 11

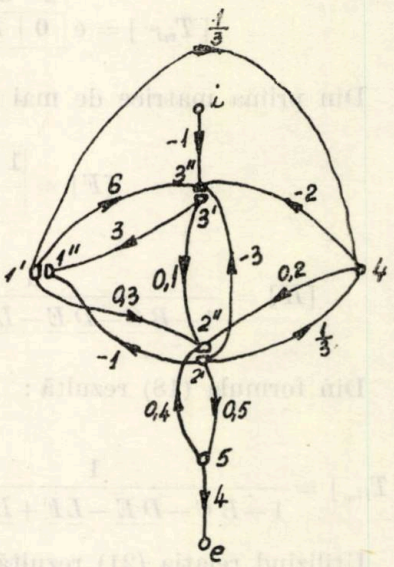


Fig. 12

Despicînd nodurile 1, 2, 3 se obține graful reprezentat în fig. 11. În tabelul de mai jos se indică valorile calculate pentru transmitanțele

echivalente dintre nodurile de divergență și cele de convergență ale acestui graf :

i	$1'$	$2'$	$3'$
$1''$		-1	3
$2''$	$\frac{1,1}{3}$	$\frac{0,8}{3}$	$0,1$
$3''$	$\frac{16}{3}$	$\frac{-11}{3}$	
e		2	

(52)

Pentru simplitate valorile nule nu s-au mai scris în căsuțele respective.

Prin suprapunerea nodurilor $1'$ și $1''$ se obține graful de fluență din fig. 12 în care sînt despicate numai nodurile 2 și 3. În acest graf transmitanțele se calculează folosind formulele (12), (19) și (20).

Astfel se obțin mărimile

$$F' = 1 - T'_{1''1'} = 1$$
$$H' = 1 \tag{53}$$

și transmitanțele T'' ale grafului G'' de la nodurile sale de divergență la nodurile sale de convergență, calculate în tabelul de mai jos :

i	$2'$	$3'$
$2''$	$-0,1$	$1,2$
$3''$	-9	16
e	2	

(54)

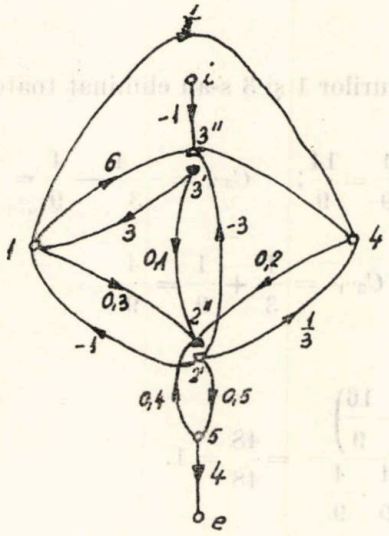


Fig. 12

Pentru graful G'' corespund deci matricele :

$$[F''] = \begin{vmatrix} 1,1 & -1,2 \\ 9 & -15 \end{vmatrix} \tag{55}$$

$$[H''] = [F'']^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{5,7} \begin{vmatrix} -15 & 1,2 \\ -9 & 1,1 \end{vmatrix} \tag{56}$$

Ca urmare pentru graful G, în care nodurile 2 și 3 nu sînt despicate, rezultă :

$$T_{ei} = \frac{U_e}{E} = T''_{ei} + [T''_{ej'}] \cdot [H''] \cdot T''_{j''i_m} =$$

$$e = \begin{matrix} 2' & 3' \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5,7}\right) \cdot \begin{vmatrix} -15 & 1,2 \\ -9 & 1,1 \end{vmatrix} \cdot \begin{matrix} i \\ \hline \\ -1 \end{matrix} \begin{matrix} 2'' \\ 3 \end{matrix} = \frac{8}{19}. \tag{57}$$

IV. Să calculăm transmitnța echivalentă T_{1i} de la nodul de intrare i la nodul 1 pentru graful din fig. 13 a. Se despică nodurile 1 și 3, iar graful obținut după despicarea este reprezentat în fig. 13. b. Conform formulei (35) transmitanța T_{1i} are expresia :

$$T_{1i} = \frac{(B_{1,3} - C_{3''3'})\, C_{1''i} + C_{1''3'}\, C_{3''i}}{(B_{1,3} - C_{3''3'})\,(B_{1,3} - C_{1''1'}) - C_{1''3'}\, C_{3''1'}} \tag{58}$$

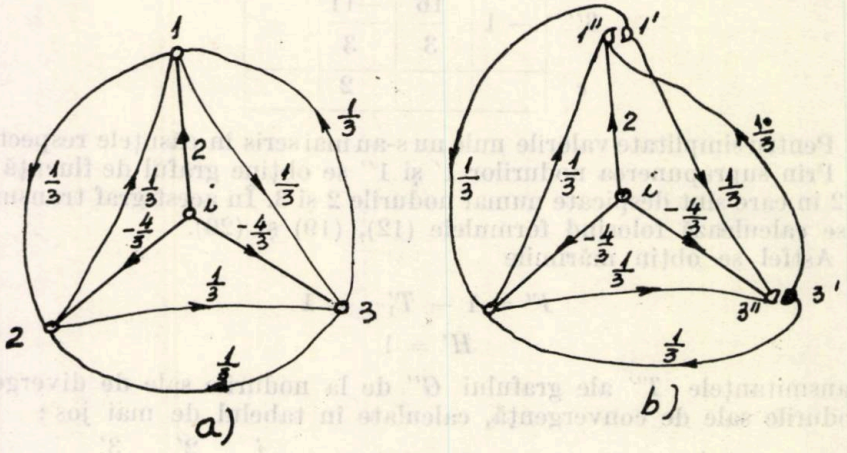


Fig. 13

unde :

$B_{1,3} = 1$ deoarece prin despicarea nodurilor 1 și 3 s-au eliminat toate buclele grafului.

$$C_{1''1'} = \frac{1}{9}; \quad C_{3''3'} = \frac{1}{9}; \quad C_{1''i} = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9}; \quad C_{3''i} = \frac{-4}{3} - \frac{4}{9} =$$

$$= -\frac{16}{9}; \quad C_{1''3'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}; \quad C_{3''1'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

Deci :

$$T_{1i} = \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{14}{9} + \frac{4}{9}\left(-\frac{16}{9}\right)}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}} = \frac{48}{48} = 1.$$

Catedra electrotehnică II
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București.

BIBLIOGRAFIE

1 *Seshz, S., Balabanian, N.*, Linear Network Analysis. New-York, John Wiley, 1959.
2 *Seshu, S., Reed, M.*, Linear Graphs and Electrical Networks, London, Addison — Wesley, 1961.

3 *Mason, S. J.*, Feedback Theory — Further Proporties of Signal Flow-graphs, 1956, 44, p. 290, Proc. of. the Inst. of. Radio Engineers.
4 *Kron, G.*, Diakopties, New-York, 1965.
5 *Preda M., Cristea P.*: Analiza şi cinteza circuitelor electrice. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.
6 *Hakim, S.S.*, Multiple — loop Feedback Circuits, Proc. I.E.E., Vol. 110, Nr. 11, Novembe 1963.
7 *Mac Farlane, A.G. I.* Funcţional= matrix Theory for the General Linear Network, Proc. I.E.E., Vol. 112 nr. 4 April 1965.
8 *Mason, S. J., Zimmermann*, Electronic Circuits, Signals and Systems, John Wilay, New-York 1960.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

C.Z.: 621.9:621.82

CONTRIBUȚII LA STUDIUL LAGĂRELOR HIDROSTATICE PENTRU MAȘINI UNELTE DE PRECIZIE*

VICTOR TABĂRĂ

Utilizarea lagărelor hidrostatice în construcția mașinilor unelte prezintă o serie de avantaje datorită caracteristicilor lor funcționale dintre care se evidențiază :

— menținerea poziției relative dintre sculă și piesa de prelucrat, la cota reglată inițial ;

— păstrarea preciziei de lucru a mașinii un timp practic nelimitat datorită uzurii neglijabile obținută prin înlăturarea contactului dintre fus și lagăr, indiferent de turația de lucru a arborelui (chiar și în stare de repaus) ;

— amortizarea vibrațiilor și prin urmare obținerea unor calități superioare a suprafețelor prelucrate ;

— reducerea influenței impreciziilor de prelucrare a fusurilor arborelui principal.

Întrucît una din problemele importante în stabilirea parametrilor funcționali și constructivi ai lagărelor hidrostatice o constituie determinarea numărului optim de degajări, dimensiunile acestora precum și dimensiunile pragurilor dintre degajări, în lucrarea elaborată s-a urmărit clarificarea acestei probleme.

Pentru studiul parametrilor menționați s-a considerat cazul unui lagăr (fig. 1 a, b), avînd un număr de degajări $k_d \neq 4$, alimentate cu ulei sub presiune. În consecință asupra fusului arborelui vor acționa forțele rezultate ca urmare a distribuției presiunii în degajări și sarcina exterioară P (inclusiv greutatea G) orientată sub un unghi α (fig. 2). Proiecțiile acestor forțe pe direcțiile „xx" și „yy" ale unui sistem de coordonate care conține axa de simetrie a uneia din degajări, vor putea fi scrise sub forma :

$$P_y = P \cos \alpha = \pm b_m [R (\sin \gamma + \sin \theta) - a] \sum p_i \cos 2 (i - 1) \gamma$$
$$P_x = P \sin \alpha = \pm b_m [R (\sin \gamma + \sin \theta) - a] \sum p_i \sin 2 (i - 1) \gamma \qquad [1]$$

în care :

b_m $[R (\sin \gamma + \sin \theta) - a]$ — suprafața activă a degajării

* Manuscris predat redacției la data de 16 martie 1971.

p_i — presiunea din degajări
i — indicele de ordine ale degajării **)
k_d — numărul de degajări ale lagărului

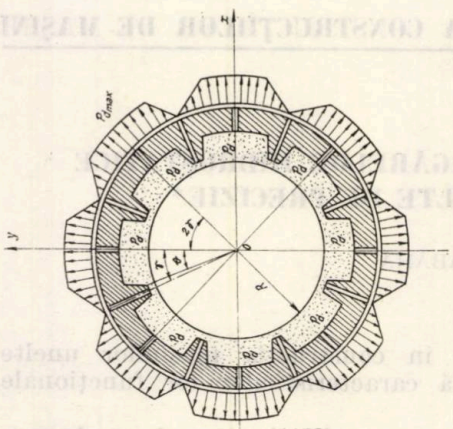


Fig. 1a

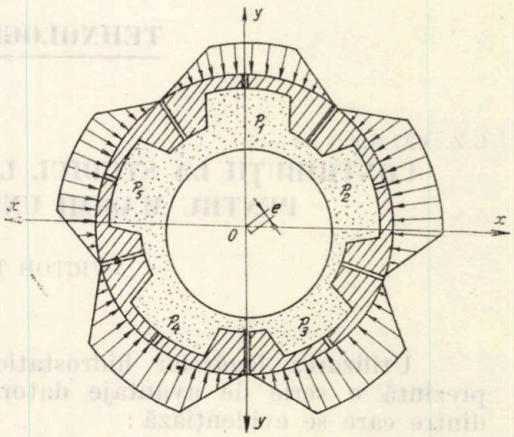


Fig. 1b

γ — unghiul dintre axele degajări și axele canalelor de evacuare de pe pragurile tangențiale
2θ — unghiul la centru al degajării
a — lățimea canalului de evacuare de pe pragul tangențial. Semnul $\pm$ ține seama de sensul deplasării fusului în raport cu axa lagărului. Semnul plus va corespunde degajărilor la care $h > h_0$, iar semnul minus pentru cele la care $h < h_0$.

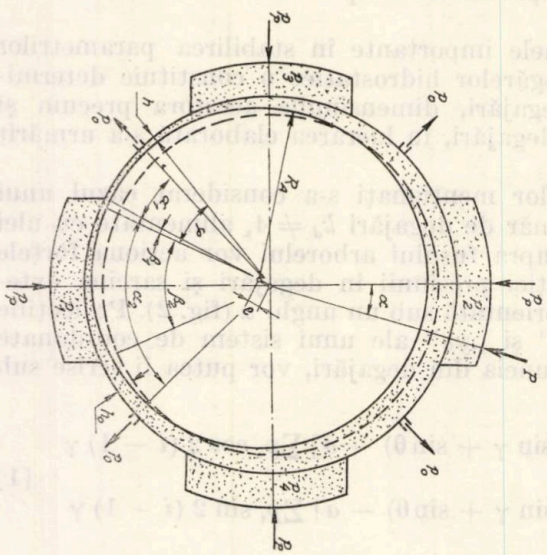


Fig. 2

Ecuațiile de echilibru permit să se exprime capacitatea portantă specifică unității de suprafață a degajărilor, prin relația :

$$\frac{P}{b_m[R(\sin\gamma + \sin\theta) - a]} = \{[\Sigma p_i \cos 2(i-1)\gamma]^2 + [\Sigma p_i \sin 2(i-1)\gamma]^2\}^{\frac{1}{2}} \quad [2]$$

** Stabilirea ordinii se va face atribuind indicele l, uneia din degajările situate pe axa yy. urmărind apoi în sens unic succesiunea degajărilor pe circumferința lagărului.

din care se constată că factorii de care depinde capacitatea portantă a lagărelor hidrostatice sînt parametrii funcţionali şi constructivi care determină distribuţia presiunii în lagăr şi mărimea suprafeţei active a degajărilor.

Prin urmare, indiferent de numărul degajărilor, se poate face asimilarea lagărelor reale cu o soluţie echivalentă avînd patru degajări distribuite pe axele sistemului de coordonate ceea ce permite să se scrie relaţiile :

$$\frac{P_y}{b_m[R\,(\sin\gamma + \sin\theta) - a]} = \Delta p_{ex} \text{ şi}$$
$$\frac{P_x}{b_m[R\,(\sin\gamma + \sin\theta) - a]} = \Delta p_{ey} \qquad [3]$$

în care :

Δp_{ex} şi Δp_{ey} — reprezintă diferenţa presiunilor corespunzătoare degajărilor lagărului echivalent situate în planul forţelor P_x respectiv P_y.

Ţinînd seama de distribuţia degajărilor în raport cu axele sistemului de coordonate, valorile Δp_{ex} şi Δp_{ey} pot fi exprimate sub forma :

$$\Delta p_{ex} = \Sigma p_i \cos 2\,(i-1)\,\gamma\,;$$
$$\Delta p_{ey} = \Sigma p_i \sin 2\,(i-1)\,\gamma. \qquad [4]$$

Pentru lagărele avînd un număr par de degajări se poate lua corespunzător planului yy, valorile unghiurilor $2\,(i-1)\,\gamma = 0$ şi $2\,(i-1)\,\gamma = \pi$ obţinîndu-se astfel expresia :

$$\frac{P_y}{b_m[R\,(\sin\gamma + \sin\theta) - a]} = \pm\left[p_1 - p_{\frac{kd}{2}+1} + \sum_{i=2}^{i=\frac{kd}{2}} p_i \cos 2\,(i-1)\gamma + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=\frac{kd}{2}+2}^{i=kd} p_i \cos 2\,(i-1)\gamma \right] \qquad [5]$$

în care p_1 şi $p_{\frac{kd}{2}+1}$ reprezintă presiunile din degajările situate în planul yy.

În cazul lagărelor cu număr impar de degajări se va considera presiunea $p_{\frac{kd}{2}+1} = 0$ şi astfel se obţine :

$$\frac{P_y}{b_m[R\,(\sin + \sin\theta) - a]} = \pm\, p_1 + \sum_{i=2}^{i=kd} p_i \cos 2\,(i-1)\gamma \qquad [6]$$

Deoarece lagărele au degajările distribuite simetric pe circumferință, pentru o poziție a fusului coaxial cu lagărul,

$$\Sigma p_i \cos 2\,(i-1)\,\gamma + \Sigma p_i \sin 2\,(i-1)\,\gamma = 0 \qquad [7]$$

deci capacitatea portantă $P = 0$.

Aceasta înseamnă că lagărele hidrostatice nu permit obținerea unei capacități portante $P \neq 0$ pentru o poziție a fusului corespunzătoare unei valori $e = 0$.

Distribuția presiunilor în lagăr poate fi evidențiată considerînd fiecare degajare ca o sursă de lichid sub presiune avînd un debit determinat Q_i, echivalent cu debitul de alimentare a fiecărei degajări.

Egalitatea dintre debitul droselului și cel care trece printr-o degajare oarecare poate fi exprimată sub forma : [1]

$$Q = Q_i = \frac{\pi d^4}{128\,\eta\,.\,1_d}\,\Delta p_d = 2Q_{i_a} + Q'_{i_t} + Q''_{i_t} \qquad [8]$$

în care :

$\Delta p_d = p_p - p_i$ reprezintă căderea de presiune la trecerea uleiului prin drosel

Q_{i_a} — debitul corespunzător curgerii uleiului prin degajare după direcția axială a fusului

Q'_{i_t} și Q''_{i_t} — debitele de ulei la evacuarea uleiului peste pragurile tangențiale ale degajării.

Avînd în vedere presiunea constantă din canale de evacuare (fig. 1), curgerea lichidului în toate direcțiile este determinată de o cădere de presiune.

$$\Delta p_i = p_i - p_0 = p_i$$

p_0 fiind presiunea din canalele colectoare și în general aceasta este egală cu presiunea atmosferică.

În aceste condiții debitele corespunzătoare curgerii uleiului după direcțiile axiale și tangențiale pot fi exprimate prin relațiile :

$$Q_i = \frac{[R\,(\gamma+\theta) - a]\,h_m^3}{12\,\eta\,.\,l_a}\,p_i = \frac{[2\pi R - k_d\,(l_t - a)]\,h_m^3}{12\,\eta k_d l_a}\,p_i$$

$$Q'_{i_t} = \frac{b_m b_{i'}^3}{12\eta l_t}\,p_i\,; \quad Q''_{i_t} = \frac{b_m b_{i''}^3}{12\eta l_t}\,p_i \qquad [9]$$

în care :

$R\,(\gamma+\theta) - a = \dfrac{2\pi R}{k_d} - l_t - a$, reprezintă lungimea arcului de cerc cuprins între axele pragurilor fiecărei degajări

l_t — lăţimea pragului

l_a — lungimea pragului axial.

h_m — jocul mediu corespunzător scurgerii lichidului în direcţie axială

$h_{t'}$; $h_{t''}$ — jocurile corespunzătoare celor două secţiuni de curgere tangenţială.

Înlocuind debitele corespunzătoare expresiilor 9 şi introducînd pentru constantele constructive notaţiile :

$$C_d = \frac{\pi d^4}{32 l_d}; \quad C_a = \frac{2\pi R - k_d (l_t + a)}{3 k_d l_a} \quad \text{şi} \quad C_t = \frac{b_m}{3 l_t}$$

egalitatea 2.8 va lua forma :

$$C_d(p_p - p_i) = [2C_a h_m^3 + C_t(h_{t'}^3 + h_{t''}^3)]\, p_i. \qquad [10]$$

Constanta C_d reprezentînd caracteristica constructivă a droselului iar C_a şi C_t caracteristicile constructive ale pragurilor lagărului expresia 10 permite să se urmărească variaţia presiunii din degajare funcţia de mărimea acestora.

Pentru simplificare se pot nota prin :

$K_L = 2C_a h_m^3 + C_t (h_{t'}^3 + h_{t''}^3)$ — caracteristica secţiunii de curgere a uleiului peste praguri

şi $\lambda_p = \frac{p_i}{p_p}$ — factorul de presiune a degajării.

În consecinţă se poate scrie că :

$$\lambda_p = \frac{C_d}{K_L + C_d} = \frac{1}{\frac{K_L}{C_d} + 1} \qquad [11]$$

constatîndu-se că pentru $K_L \leqslant C_d$, raportul presiunilor este cuprins între $\frac{1}{2} < \lambda_p < 1$, iar pentru $K_L > C_d$ aceasta va fi $0 < \lambda_p < \frac{1}{2}$.

Pentru aprecierea influenţei excentricităţii asupra raportului K_L/C_d se va lua în considerare expresia de variaţie a excentricităţii sub forma :

$$K_L = h_0^3 \left\{ 2C_a \left[1 \pm \varepsilon \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \right]^3 + \right.$$

$$\left. + C_t [(1 \pm \varepsilon \cos \beta_1)^3 + (1 \pm \varepsilon \cos \beta_2)^3] \right\} \qquad [12]$$

în care :

α_1 — reprezintă unghiul dintre direcţia de deplasare a fusului şi — poziţia jocului minim din zona degajării considerate

α_2 — unghiul dintre direcţia de deplasare a fusului şi poziţia jocului maxim, iar

β_1 şi β_2 — unghiul dintre direcţia de deplasare a fusului şi poziţiile jocurilor minime de pe cele două praguri dintre degajări şi canalele de scurgere paralele cu axa lagărului.

Din expresia factorului K se constată că el variază între limitele :

$$K_{L_{\max}} = h_0^3 \left\{ 2C_a \left(1 + \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2} \right)^3 + \right.$$

$$\left. + C_t[(1 + \cos\beta_1)^3 + (1 + \cos\beta_2)^3] \right\}$$

$$K_{L_{\min}} = h_0^3 \left\{ 2C_a \left(1 - \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2} \right)^3 + \right.$$

$$\left. + C_t[(1 - \cos\beta_1)^3 + (1 - \cos\beta_2)^3] \right\}$$

corespunzător valorilor $\varepsilon = \pm 1$.

Deoarece pentru valori mici ale excentricităţii, capacitatea portantă a lagărului poate fi considerată ca fiind independentă de direcţia după care s-a deplasat axa fusului (1,5), pentru simplificarea expresiei raportului K_L/C_p, se va considera cazul în care forţa P este aplicată în planul yy. În această situaţie

$$e_y = e\,;\ P_y = P\,;\ \beta_1 = \beta_2 = \theta\,;\ \alpha_1 = \gamma\,;\ \alpha_2 = 0$$

şi prin urmare se obţine :

$$\lambda_p = \frac{1}{\frac{K_L}{C_d} + 1} = \frac{1}{2h_0^3 \left[\frac{C_a}{C_d} \left(1 - \frac{\varepsilon(\cos\gamma + 1)}{2} \right)^3 + \frac{C_t}{C_d}(1 - \varepsilon\cos\theta)^3 \right] + 1} \qquad [13]$$

Se constată că valoarea maximă a lui λ_p corespunde excentricităţii relative $\varepsilon = 1$, iar valoarea minimă pentru $\varepsilon = -1$.

Deoarece unghiul $\gamma \neq 0$, caracteristica secţiunii de curgere va fi întotdeauna $K_L \neq 0$ şi în consecinţă valoarea lui λ_p va fi cuprinsă între $0 < \lambda_p < 1$ pentru oricare valoare a lui

$$h_0^3 \frac{C_a}{C_d} \neq 0.$$

Înseamnă că presiunea din degajări va fi întotdeauna cuprinsă între $0 > p_i > p_p$ fără a putea ajunge la zero sau la valoarea presiunii dată de pompă.

Trebuie remarcat faptul că pentru valori mari ale rapoartelor $\frac{C_a}{C_d}$ şi $\frac{C_t}{C_d}$ ca şi pentru valori foarte mici ale acestora, λ_d variază în limite strînse.

Dacă se ia în considerare poziţia centrală a fusului, pentru care $\varepsilon = 0$, expresia 12 ia forma :

$$\lambda_{p_0} = \frac{1}{\frac{2h_0^3 C_a}{C_d} + \frac{2h_0^3 C_t}{C_d} + 1} \qquad [14]$$

Din această expresie se constată că pentru un raport determinat între constantele constructive ale lagărului ($C_a = kC_t$) aprecierea limitelor de variaţie ale raportului λ_{p_0} pot fi urmărite uşor funcţie de caracteristica constructivă a droselului folosind expresia simplificată

$$\lambda_{p_0} = \frac{1}{2h_0^3 \frac{C_a}{C_d}(1 + k) + 1} \qquad [15]$$

Analiza expresiei 15 evidenţiază faptul că $\lambda_{p_0} = 1$ şi $\lambda_{p_0} = 0$, reprezintă valori care nu se pot obţine practic la lagărele hidrostatice alimentate prin drosel. Confirmarea acestui lucru rezultă prin înlocuirea valorilor corespunzătoare în relaţia 15.

Astfel de exemplu pentru $\lambda_{p_0} = 0$, rezultă

$$h_0^3 \frac{C_a}{C_d}(1 + k) = \infty$$

ceea ce ar însemna fie ca valoarea $C_d = \frac{\pi d^4}{32l} = 0$, fie ca C_a sau k să fie infinit. În primul caz ar însemna că orificiul de curgere prin drosel este înfundat sau are lungimea $1 = \infty$, iar în celelalte cazuri ar trebui ca raza fusului $R = \infty$.

În mod similar se constată că pentru $\lambda_{p_0} = 1$ ar trebui să se realizeze $C_a = 0$ sau $C_d = \infty$, ceea ce evident nu corespunde funcţionării lagărelor hidrostatice.

În primul caz înseamnă că nu avem degajări în lagăr, deci acesta va reprezenta o bucşe, iar al doilea caz echivalează cu alimentarea lagărului direct de la pompă ($d = \infty$, $l_d = 0$).

Pentru determinarea corectă a raportului $k = \frac{C_a}{C_t}$, se va pune condiţia ungerii uniforme a suprafeţelor lagărului. Din raportul debitelor se constată că pentru alimentarea lagărului cu cantităţi de ulei proporţionale cu suprafeţele de trecere (pragurilor) axiale şi tangenţiale este necesar ca să fie satisfăcut raportul:

$$\frac{Q_t}{Q_a} = \frac{12\eta l_a h_m h_0^3}{12\eta l_t \left(\frac{D}{k_d} - l_t - a\right) h_0^3} = \frac{l_a b_m k_d}{l_t D \left[1 - \frac{k_d(l_t + a)}{D}\right]} \qquad 16$$

Dacă în condiţia de continuitate a debitului de ulei se consideră vitezele medii constante în toate direcţiile rezultă:

$$\frac{Q_t}{Q_a} = \frac{b_m h_0}{\left(\frac{\pi D}{k_d} - l_t - a\right) h_0} = \frac{b_m k_d}{D\left[\pi - \frac{k_d(l_t + a)}{D}\right]} \qquad 17$$

Din egalarea rapoartelor corespunzătoare relaţiilor 16 şi 17 se obţine pentru lungimile l_a şi l_t egalitatea:

$$l_a = l_t$$

ceea ce corespunde şi precizărilor rezultate din experienţele efectuate de diferiţi cercetători.

Luînd în considerare egalitatea între lungimile pragurilor axiale şi tangenţiale valoarea raportului k devine:

$$k = \frac{k_d b_m}{2\pi R - k_d(l_t + 1)} = \frac{b_m}{D} \frac{1}{\frac{\pi}{k_d} - \frac{l_t + a}{D}} \qquad 18$$

Se constată că pentru: $k_d = 0$ (situaţie în care nu există degajări)

$$\frac{\pi}{k_d} - \frac{l_t + a}{D} = \infty \text{ şi deci raportul } k = \frac{C_t}{C_a} = 0$$

deoarece nu se produce curgerea tangenţială a uleiului prin lagăr.

Considerînd pentru lungimea pragului o valoare minimă $l_t = 20\, h_0$, dictată de domeniul de valabilitate a relaţiei folosită pentru debit, expresia lui k va fi:

$$k_m = \frac{b_m}{D} \frac{1}{\frac{\pi}{k_d} - \frac{20 h_0 + a}{D}} \qquad 19$$

Se observă că termenul $\frac{\pi}{k_d} - \frac{20\,h_0 + a}{D} \leqslant 1$, deoarece numărul minim de degajări $k_{d\min} = 3$, și prin urmare pentru un anumit raport $\frac{D}{b_m}$, valoarea lui k, va fi cu atît mai mare cu cît numărul degajărilor va crește.

Pentru alegerea corectă a acestei valori se reprezintă grafic funcțiile :

$$\lambda_p = \frac{1}{2h_0^3 \frac{C_a}{C_d}\left[\left(1 - \varepsilon \frac{\cos\gamma + 1}{2}\right)^3 + k\,(1 - \varepsilon\cos\theta)^3\right] + 1} \quad \text{și}$$

$$\lambda_p = \frac{1}{2h_0^3 \frac{C_a}{C_d}\left[\left(1 + \varepsilon \frac{\cos\gamma + 1}{2}\right)^3 + k\,(1 + \varepsilon\cos\theta)^3\right] + 1} \qquad 20$$

Pentru o primă apreciere a variației raportului λ_p va considera ca parametru variabil valoarea :

$$K_L = 2h_0^3 \frac{C_a}{C_d}\left[\left(1 \pm \varepsilon \frac{\cos\gamma + 1}{2}\right)^3 + k\,(1 + \varepsilon\cos\theta)^3\right] \qquad 21$$

pentru care se consideră un domeniu de variație $K_L = 0 \ldots \infty$. Din diagrama 3 reprezentînd funcția $\lambda_p = f(K_L)$, se constată că pentru valori ale lui $K_L = 0 \ldots 4$, raportul $\lambda_p = \frac{p_i}{p_p} = 1 \ldots 0{,}2$.

Prin urmare, 80% din domeniul de variație a lui λ_p, poate fi acoperit printr-o variație mică a lui K_L. Rezultă că pentru o bună funcțio-

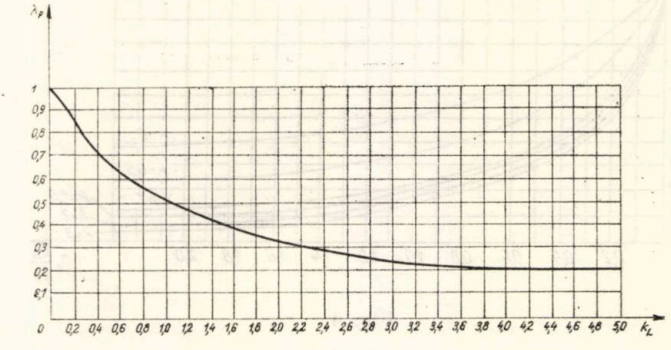


Fig. 3

nare a lagărului, este necesar ca parametrii constructivi ai acestuia cît și ai droselelor de alimentare trebuiesc aleși astfel încît, să asigure menținerea valorii $0 < K_L < 4$.

Trebuie remarcat şi faptul că parametrii variabili funcţionali sînt termenii din paranteza expresiei 21, iar limitele în care sînt cuprinse valorile lor sînt date de inegalităţile :

$$1 < (1 + \varepsilon \cos \theta) < \left(1 + \varepsilon \frac{\cos \gamma + 1}{2} \right) < 2$$

$$0 < \left(1 - \varepsilon \frac{\cos \gamma + 1}{2} \right) < (1 - \varepsilon \cos \theta) < 1.$$

În consecinţă pentru a determina influenţa diferiţilor factori constructivi s-au reprezentat grafic expresiile 20 considerînd succesiv ca parametrii variabili valorile : $\frac{C_a}{C_d}$, ε, $\cos \gamma$, $\cos \theta$ şi k. Valoarea jocului h_0 a fost considerată constantă în toate cazurile deoarece ea depinde de condiţiile limită la care se asigură curgerea în regim permanent a uleiului între fus şi pragurile lagărului.

Din diagrama 4, exprimînd variaţia $\lambda_p = f\left(\frac{C_a}{C_d}\right)$, rezultă că pentru $k = \frac{C_a}{C_t} > 1$, raportul presiunilor $\lambda_p = \frac{p_1}{p_p}$, variază în limitele $1 > \lambda_p > 0{,}2$ dacă $h_0^3 \frac{C_a}{C_d}$ este cuprins în domeniul $0 < h_0 \frac{C_a}{C_d} < 1$.

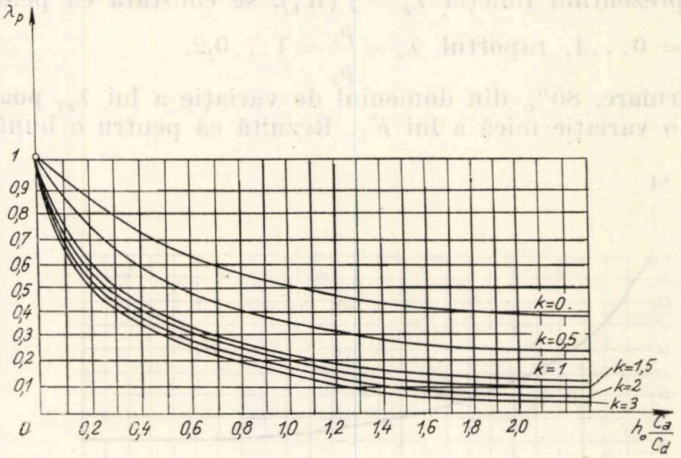


Fig. 4

Considerînd aceiaşi variaţie $0 < h_0^3 \cdot \frac{C_a}{C_d} < 1$, se constată că pentru valorile $k < 1$, domeniul de variaţie al presiunilor scade pînă la $1 > \lambda_p > > 0{,}56$, corespunzători valorii $k = 0$.

Deoarece pentru $k = 0$ coeficientul $C_t = 0$, înseamnă că această situație se va întîlni la lagărele fără scurgerea uleiului tangențial.

Pentru determinarea domeniului în care variația $\lambda_p = f(\varepsilon)$ are valoarea optimă s-a trasat diagrama 5 în care s-a considerat $k = 0$. Din această diagramă se constată că domeniul de variație a lui $\lambda_p = f(\varepsilon)$

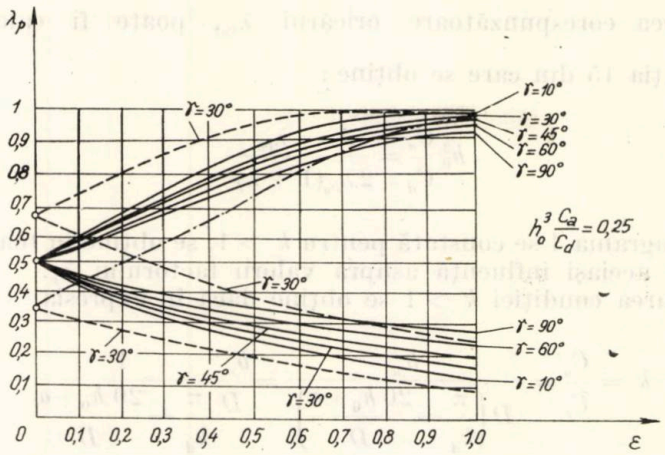


Fig. 5

este cu atît mai mare cu cît unghiul γ este mai mic, ceea ce înseamnă că în general se recomandă a se utiliza un număr cît mai mare de degajări. Cu toate acestea deoarece mașinile de precizie impun funcționarea cu modificări minime ale poziției axei fusului în lagăr, valorile excentricității relative ε vor fi mici și în consecință pentru această categorie de mașini influența variației unghiului γ în limitele $\gamma = 10° \ldots 36°$ este redusă.

Se remarcă de asemenea influența parametrului constructiv $h_0^3 \frac{C_a}{C_d}$ asupra valorii λ_{p_0} corespunzător poziției centrale a fusului cît și asupra domeniului de variație a presiunilor. Pentru $h_0^3 \frac{C_a}{C_d} < 1$, variația lui λ_p, corespunzător degajărilor situate în poziții diametral opuse, este uniformă și simetrică în raport cu valoarea inițială λ_{p_0}. Pentru valori $h_0^3 \frac{C_a}{C_d} > 1$, această simetrie dispare, presiunile din degajările opuse variind neuniform.

Totodată se evidențiază faptul că în domeniul excentricităților relative mici ($\varepsilon \leqslant 0{,}3$) variație lui λ_p este aproape liniară.

În cazul lagărelor avînd raportul $k = \frac{C_t}{C_a} \neq 0$, prin diagrama 6 este reflectată influența pe care o are unghiul θ asupra valorilor λ_p. Se constată că, domeniul de variație a raportului λ_p se reduce pentru unghiuri θ mari.

Comparînd valorile λ_{p_0} obținute pentru excentricitatea relativă $\varepsilon = 0$ în diagramele 5 și 6 se observă că pentru aceiași valoare $h_0^3 \frac{C_a}{C_d}$

în cazul lagărelor cu scurgere axială și tangențială λ_{p_0} este mai mic ($\lambda_{p_0} = 0{,}66$ în primul caz și $\lambda_{p_0} = 0{,}4$ în al doilea). Această deplasare a presiunilor din degajări se explică prin mărirea secțiunii de trecere a uleiului prin lagăr.

Pentru mărirea raportului λ_{p_0} se poate modifica factorul constructiv $h_0^3 \frac{C_a}{C_d}$. Valoarea corespunzătoare oricărui λ_{p_0}, poate fi calculat ușor folosind relația 15 din care se obține :

$$h_0^3 \frac{C_a}{C_d} = \frac{1 - \lambda_{p_0}}{2\lambda_{p_0}(1 + k)}. \qquad 22$$

Din diagrama 4 se constată pentru $k > 1$, se obține în toate cazurile aproximativ aceiași influență asupra valorii factorului λ_p.

Realizarea condiției $k > 1$ se obține dacă în expresia

$$k = \frac{C_a}{C_t} = \frac{b_m}{D\left(\frac{\pi}{k_d} - \frac{20\,h_0 + a}{D}\right)} = \frac{b_m}{D} \frac{1}{\frac{\pi}{k_d} - \frac{20\,h_0 + a}{D}}$$

se consideră termenii :

$$\frac{b_m}{D} \geqslant 1 \text{ și } \frac{\pi}{k_d} - \frac{20\,h_0 + a}{D} \leqslant 1. \qquad 23.a$$

Rezultă că la limită numărul minim de degajări va fi :

$$k_{d_{\min}} = \frac{\pi D}{D + 20\,h_0 + a} = 3 \text{ deoarece } 20\,h_0 + a < D.$$

Dar valoarea lui k_d poate fi exprimată și în funcție de unghiurile la centru ale axelor canalelor de drenaj alăturate.

Conform notațiilor folosite, unghiul la centru corespunzător unei degajări este 2γ.

În consecință fără a ține seama de lățimea canalelor de drenaj se poate scrie egalitatea :

$$k_{d_{\max}} = \frac{360}{2\gamma_{\min}} = \frac{Dk}{D + 20h_0k} \qquad 23.b$$

Luînd ca valoare limită superioară $k = 6$ la care λ_p scade cu 50% pentru valori $\varepsilon = 0 \ldots 0{,}3$ (vezi diagrama 7) se va obține :

$$\gamma_{\min} = \frac{360\,(D + 20\,h_0k)}{2k\pi . D} = 60^\circ \frac{D + 20\,h_0k}{2\pi . D} \qquad 24$$

Deoarece $h_0 \ll R$, termenul al doilea de la numărător poate fi neglijat şi prin urmare se obţine pentru unghiul minim valoarea :

$$\gamma_{min} = \frac{60^\circ}{2\pi} \cong 10^\circ \qquad 25$$

la care se va adăuga $2^\circ \ldots 3^\circ$ pentru compensarea lăţimii canalelor de drenaj.

Menţionăm că valoarea γ_{min}, obţinută cu relaţia 25 corespunde unghiului minim obţinut de H. C. Rippel pe cale experimentală şi menţionat în lucrările sale (1) ca fiind $22{,}5^\circ$. Dacă se foloseşte pentru k valori mai mari, unghiul minim dintre degajări poate fi redus. Astfel de exemplu pentru $k = 9$ rezultă $\gamma_{min} = 5^\circ$ şi prin urmare numărul de degajări poate ajunge la $k_d = 30$. Din diagrama 5 se constată că pentru valori $k = 20$, capacitatea lagărului de a suporta încărcarea scade foarte mult şi prin urmare nu este utilizabil.

Valorii γ_{min} obţinută prin relaţia 25 îi corespunde numărul maxim de degajări.

$$k_{d_{max}} = \frac{360^\circ}{2\gamma_{min}} = \frac{360^\circ}{2\,(10^\circ + 1{,}5^\circ)} = 16. \qquad 26$$

Folosirea unui număr prea mare de degajări prezintă însă o serie de complicaţii constructive care în special la diametre mici de arbori nu pot fi rezolvate corespunzător.

Din această cauză ca şi pentru a mări capacitatea portantă a lagărelor, unghiul dintre degajări se ia în majoritatea cazurilor în limitele $\gamma = 30^\circ \ldots 60^\circ$, pentru care, numărul corespunzător de degajări este $k_d = 6 \ldots 3$. Cel mai frecvent se utilizează lagăre cu un număr $k_d = 4$ degajări. Alegerea acestui număr de degajări se face în general arbitrar (pentru uşurinţa calculului). Influenţa valorii unghiurilor γ şi θ a fost evidenţiată în diagrama 7, în care s-au reprezentat curbele de variaţie $\lambda_p = f(\varepsilon)$ folosind ca parametrii variabili unghiurile γ şi θ.

În acest scop se va lua în considerare expresia suprafeţei active a degajării scrisă sub forma :

$$A = b_m[R\,(\sin\gamma + \sin\theta) - a],$$

din care rezultă că valoarea lui A, este determinată dacă sînt cunoscute mărimile parametrilor constructivi ai degajării.

După cum s-a văzut, unghiurile γ pot fi determinate în funcţie de numărul degajărilor lagărului şi de lăţimea canalelor de evacuare, iar din diagrama 7, rezultă că valorile lui k, pentru care se obţin variaţii convenabile ale presiunii din degajări sînt cuprinse în domeniul $k = 1 \ldots 4$. Corespunzător acestora, dacă în aprecierea unghurilor θ se ţine seama de faptul că pentru numărul minim de degajări $k_d = 3$, se obţine unghiul dintre axa pragului şi ax degajării la valoarea limită $\gamma_{max} = \frac{360}{6} = 60^\circ$,

din diferența $\gamma_{max} - \theta_{max} = 3°$, rezultă unghiul minim corespunzător pragului de scurgere tangențială. Evident această valoare trebuie mărită prin micșorarea unghiului θ, deoarece în cazul lagărelor cu scurgerea uleiului pe două direcții (axial și tangențial) o anumită parte din pragul tangențial este utilizată pentru execuția canalelor de scurgere dintre degajări. Prin urmare se va folosi ca valoare limită o diferență a unghiurilor mai mare și anume :

$$\gamma_{max} - \theta_{max} = 6°.$$

În aceste condiții se constată că pentru valorile lui k luate în considerare, numărul maxim de degajări va fi :

Pentru	$k = 1$	$\theta_{max} = 54°$	$\gamma_{min} = 60°$	$k_{d_{max}} = 3$
	$k = 1{,}5$	$\theta_{max} = 39°$	$\gamma_{min} = 45°$	$k_{d_{max}} = 4$
	$k = 2$	$\theta_{max} = 28°$	$\gamma_{min} = 36°$	$k_{d_{max}} = 5$
	$k = 2\,5$	$\theta_{max} = 23°$	$\gamma_{min} = 30°$	$k_{d_{max}} = 6$
	$k = 3$	$\theta_{max} = 19°$	$\gamma_{min} = 25°\,40'$	$k_{d_{max}} = 7$
	$k = 3{,}5$	$\theta_{max} = 16°$	$\gamma_{min} = 22°\,30'$	$k_{d_{max}} = 8$
	$k = 4$	$\theta_{max} = 14°$	$\gamma_{min} = 20°$	$k_{d_{max}} = 9$

Din datele de mai sus rezultă că pentru fiecare raport $k = 1 \ldots 4$, lățimea pragurilor poate fi modificată după cum urmează :

1. Pentru o anumită valoare a unghiului γ se variază unghiul θ și în consecință se modifică lățimea degajării. În acest caz numărul degajărilor rămîne neschimbat, unghiul θ putînd lua orice valoare cuprinsă în domeniul $\theta = 0 \ldots \theta_{max}$. Modificarea unghiului θ atrage după sine modificarea raportului k (dacă b_m = ct.).

2. se păstrează unghiul θ la o valoare constantă modificîndu-se unghiul γ. Prin aceasta se modifică numărul de degajări și lungimea pragurilor, raportul k putînd rămîne același. În consecință valorile unghiului γ vor trebui determinate de relația $\gamma = \frac{360°}{k_d}$ în care numărul de degajări va fi cuprins în domeniul $k = 3 \ldots k_{max}$ (k_{max} — este un număr întreg mai mare ca 3, reprezentînd numărul maxim de degajări admis pentru unghiul θ adoptat).

Ținînd seama de cele menționate mai sus, în fig. 7 b au fost reprezentate curbele $\lambda_p = f(\varepsilon)$ și $\Delta\lambda_{pe} = f(\varepsilon)$ pentru diferite valori θ.

Aceste diagrame confirmă concluziile deprinse din diagrama 6 în legătură cu influența unghiului θ asupra parametrului λ_p, evidențiind creșterea diferenței $\Delta\lambda_p$, la micșorarea unghiului la centru al degajării.

În diagrama 7 c s-a sintetizat influența factorilor constructivi γ, θ, k și k_d asupra variației raportului λ_p și a diferenței $\Delta\lambda_p$. Se constată că utilizarea unui număr mare de degajări asigură o variație mai bună

a presiunii în lagăr dar creşterea diferenţei $\Delta\lambda_p$ este importantă numai la trecerea de la $k_d = 3$ la $k_d = 4$ şi într-o oarecare măsură la trecerea de la $k_d = 4$ la $k_d = 5$.

Luînd în considerare cele menţionate mai sus şi faptul că mărirea numărului de degajări determină reducerea suprafeţei active a degajării,

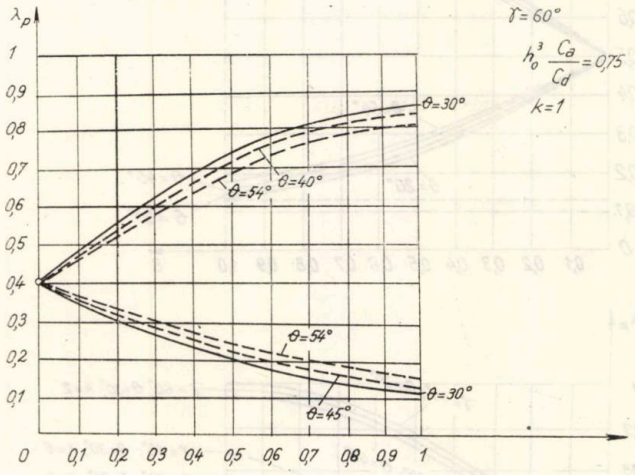


Fig. 6

analiza comportării lagărelor va fi concludentă numai dacă se va avea în vedere şi influenţa acesteia asupra capacităţii portante a lagărului, pentru diferitele valori γ, θ şi k.

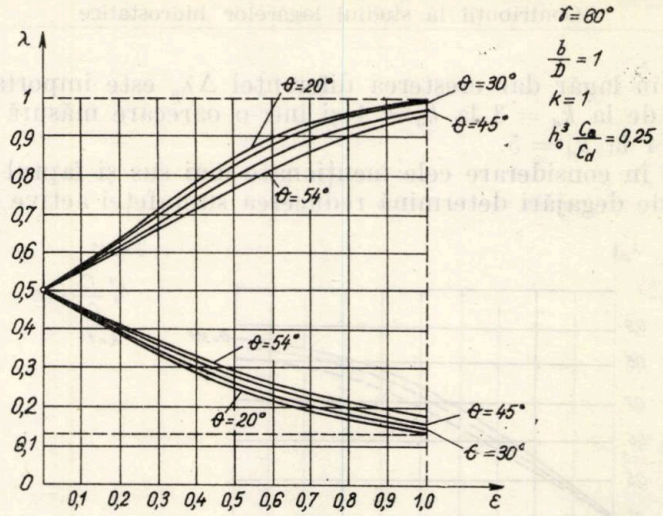
Cunoscînd valorile γ şi θ se pot obţine şi parametrii funcţionali ai lagărului echivalent folosind raportul:

$$\frac{P}{A} = \Delta_{pe} = p_p \cdot \Delta\lambda_{pe} \tag{28}$$

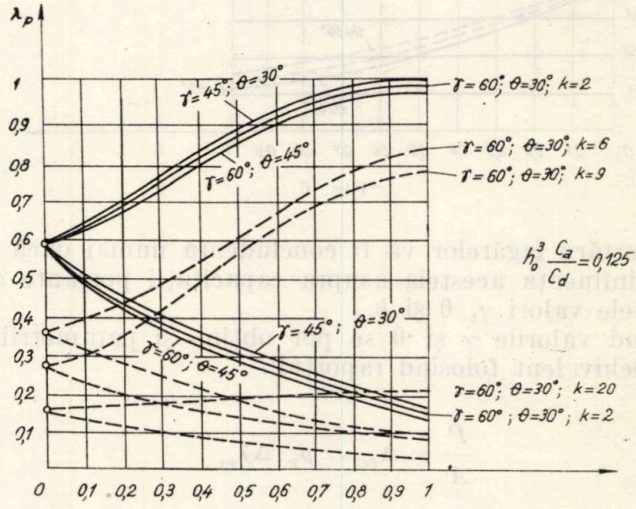
din care se va calcula diferenţa presiunilor diametral opuse, necesară pentru echilibrarea forţei. În funcţie de excentricitatea maximă admisă se va determina apoi valoarea $\Delta\lambda_{pe}$, folosind relaţiile 20. Cu aceste valori poate fi determinată presiunea necesară la pompa de alimentare folosind în acest scop raportul:

$$p_p = \frac{\Delta_{pe}}{\Delta\lambda_{pe}}. \tag{29}$$

Pentru alegerea caracteristicii droselului se va folosi diagrama 2, din care se constată o variaţie optimă a lui λ_p, pentru $2h_0^3 \frac{C_a}{C_d} = 0{,}1 \ldots 0{,}6$. Luînd în considerare valorile menţionate, se obţine pentru caracteristica droselului un domeniu $C_d = (3{,}3 \ldots 20)\, h_0^3 C_a$.


λ
ε
γ = 60°
b/D = 1
k = 1
h₀³ Ca/Cd = 0,25
θ=20°
θ=30°
θ=45°
θ=54°

a


λp
γ=45°; θ=30°
γ=60°; θ=45°
γ=60°; θ=30°; k=2
γ=60°; θ=30°; k=6
γ=60°; θ=30°; k=9
h₀³ Ca/Cd = 0,125
γ=45°; θ=30°
γ=60°; θ=45°
γ=60°; θ=30°; k=20
γ=60°; θ=30°; k=2

b

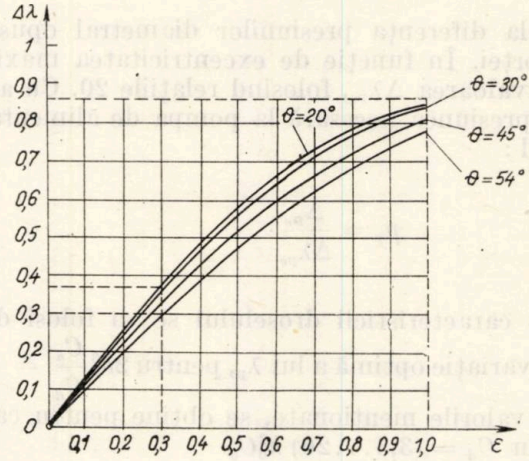

Δλ
ε
θ=20°
θ=30°
θ=45°
θ=54°
γ = 60°
b/D = 1
k = 1
h₀³ Ca/Cd = 0,2

Fig. 7 *b*

Fiind stabilite caracteristicile lagărului şi ale droselelor de alimentare, la o deplasare a axului fusului faţă de axa lagărului cu o distanţă e, relaţia :

$$P_y = b_m[R(\sin\gamma + \sin\theta) - a]\,\Delta\lambda_{pe}p_p \qquad 30$$

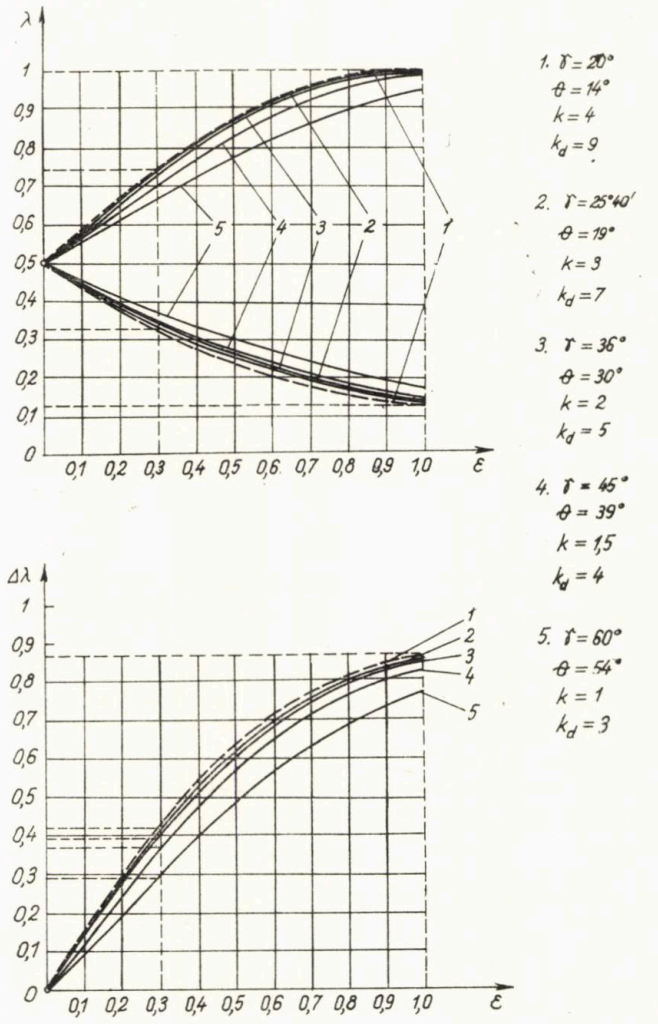


Fig. 7 c

în care :

$$\Delta\lambda_{pe} = \Sigma p_i \cdot \cos 2(i-1)\gamma$$

permite să se determine valoarea forţei P_y, reprezentînd capacitatea portantă a lagărului pe direcţia yy.

Valorile λ_{p_i} pot fi calculate în funcţie de deplasarea fusului folosind relaţiile 13 sub forma :

a) pentru lagărele cu număr par de degajări

$$\lambda_{p_1} = \frac{1}{2h_3^0 \frac{C_a}{C_d}\left[\left(1 - \varepsilon \frac{\cos\gamma_d + 1}{2}\right)^3 + k(1 - \varepsilon\cos\theta)^3\right] + 1} \tag{31}$$

$$\lambda_{p_{\frac{k_d}{2}+1}} = \frac{1}{2h_0^3 \frac{C_a}{C_d}\left\{\left[1 - \varepsilon \frac{\cos(k_d - 1)\gamma + \cos(k_d\gamma)}{2}\right]^3 + k[1 - \varepsilon\cos(k_d\gamma - \theta)]^3\right\} + 1}$$

corespunzător degajărilor din planul yy şi

$$\lambda_{p_i} = \frac{1}{2h_0^3 \frac{C_a}{C_d}\left\{\left[1 - \varepsilon \frac{\cos(2i-1)\gamma + \cos(2i+1)\gamma}{2}\right]^3 + \frac{k}{2}[1 - \varepsilon\cos(2i+1)\gamma]^3 \right.}$$

$$\left. \frac{1}{[1 - \varepsilon\cos(2i\gamma - \theta)]^3}\right\} + 1 \tag{32}$$

pentru celelalte degajări.

b) În cazul lagărelor cu un număr impar de degajări, expresiile λ_{p_i} vor fi satisfăcute de relaţiile de mai sus cu observaţia că $\lambda_{p_i \frac{k_d}{2}+1} = 0$.

Reprezentînd grafic funcţia $P_{y\max} = f(\varepsilon)$, se constată că dintre construcţiile de lagăre cu număr impar de degajări, lagărul avînd $k_d = 5$, asigură încărcarea maximă iar în cazul celor cu număr par de degajări valoarea optimă este $k_d = 6$.

În diagrama 8 s-a considerat că pragul degajării este la valoarea minimă şi în consecinţă s-a efectuat substituţia :

$$R\sin\theta = R\sin\gamma - 20\,h_0 - \frac{a}{2}\cos\gamma$$

şi împărţind expresia forţei $P_{y_{max}}$ cu $R.b_m.p_p$ s-a folosit relaţia

$$\frac{P_{y\max}}{2Rb_m.p_p} = 2\left[\sin\gamma - \frac{a}{2R}(1 + \cos\gamma)\right]\sum\lambda_{pi}\cos 2(i-1)\gamma \tag{33}$$

Se menţionează că expresia 2.33 a fost scrisă neglijînd termenul :

$$\frac{20\,h_0}{2R} \ll 1$$

iar pentru a asigura în permanenţă o suprafaţă activă a degajării se impune respectarea condiţiei :

$$\sin\gamma - \frac{a}{2R}(1+\cos\gamma) > 0.$$

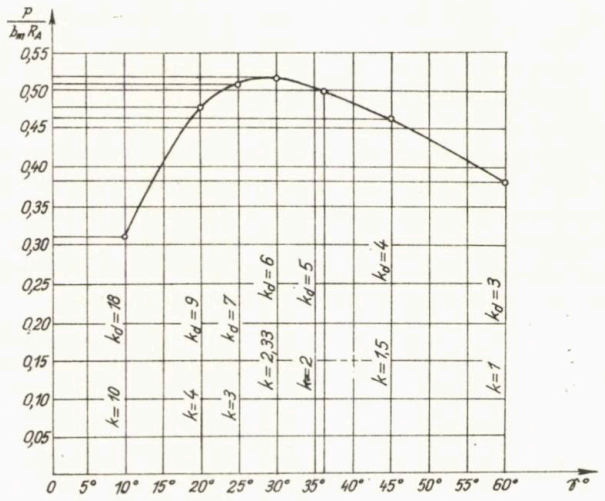


Fig. 8

Pentru simplificarea calculelor necesare reprezentării grafice se va considera pentru toate curbele că :

$$\frac{a}{2R} = \frac{1}{10}.$$

Din această diagramă rezultă faptul că lagărele cu 4 degajări dau rezultate apropiate de cele cu 5 şi 6 degajări, iar cele prevăzute numai cu 3 suprafeţe de susţinere dau o capacitate portantă mai scăzută.

Concluzii

Studiul elaborat asupra lagărelor hidrostatice cu scurgerea uleiului pe două direcţii (avînd canale de evacuare pe pragurile dintre degajări) evidenţiază necesitatea respectării anumitor criterii funcţionale şi constructive pentru a asigura o comportare corespunzătoare a lor.

O importanţă primordială o au dimensiunile degajărilor caracterizate prin raportul $k = 1 \ldots 4$ şi pragurile de scurgere axială şi tangenţială care trebuiesc realizate de lăţime egală.

Se constată totodată că funcţionarea lagărelor hidrostatice este superioară în cazul folosirii unui număr de degajări $k_d = 5 \ldots 7$ şi din analiza efectuată rezultă că alegerea valorilor menţionate pentru k_d este

deosebit de importantă în cazul mașinilor unelte de precizie, la care funcționarea lagărelor hidrostatice trebuie menținută în domeniul excentricităților mici ($\varepsilon \leqslant 0{,}3$).

Pentru construcția lagărului se recomandă în cazul unui raport $k = \frac{C_t}{C_a} = 1 \ldots 4$, folosirea caracteristicii droselelor de alimentare în limitele $0{,}1 \leqslant h_0^3 \frac{C_a}{C_d} \leqslant 0{,}25$. Folosirea parametrilor menționați asigură obținerea unei rigidități bune și a unei capacități portante maxime. Aceste condiții permit ridicarea calității suprafețelor prelucrate și mărirea preciziei dimensionale.

Trebuie avut în vedere că atît rigiditatea cît și capacitatea portantă sînt funcție de presiunea de alimentare și în consecință pot fi reglate după necesități prin reglarea presiunii la intrarea în drosele.

Se menționează că în analiza efectuată nu a fost luată în considerare influența mișcării de rotație a fusului și prin urmare concluziile corespund integral numai în cazul funcționării la turații reduse.

Catedra de mașini-unelte
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *H. C. Rippel*, Design of Hydrostatic Bearings. Maschin Design 18...21, 23...27 — 1963,
2. *Pecken H.*, Hydrostaticher Radiallager. Konstruction nr. 10, 1966.
3. *Gardeev A. F., I. N. Socolov*, Spindelnie ghidrostativeskie podsipnike. Stankii instruemnt nr. 7, 1966.
4. *Rohs H. G.*, Die optimierung hydrostaticher Lager. Industrie Anzeiger nr. 46, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

C.Z. 621.9

PRECIZIA GEOMETRICĂ A ROȚILOR MORTEZA PENTRU PRELUCRAREA PRIN RULARE A ROȚILOR DINȚATE*)

Z. DUCA C-TIN. MINCIU

Generalități

Roata morteză este o roată dințată cilindrică, cu dantura dreaptă sau înclinată și cu profilul evolventic, care a fost transformată în sculă așchietoare. Generarea suprafeței roții se realizează printr-o mișcare principală de așchiere $\bar{u}$ (de mortezare) și o mișcare de rulare cu roata piesă.

Pentru aceasta, suprafața frontală a roții morteză, devine față de degajare, iar flancurile evolventice devin fețe de așezare. (fig. 1)

Pentru realizarea profilului evolvenic la roata ce se prelucrează se pune condiția esențială, necesară și suficientă ca proiecția curbei muchiei pe planul în care se produce angrenarea să aibă forma evolventică conjugată profilului dinților roții de prelucrat.

În cele ce urmează se vor discuta numai elementele preciziei geometrice a roții morteză legate de procedeele de prelucrare utilizabile la finisarea (rectificarea) ei, întrucît acestea nu sînt suficient clarificate în literatura de specialitate.

2. Profilul funcțional al roții-morteză

Profilul funcțional al dintelui roții morteză corespunde cu forma proiecției muchiei așchietoare pe planul frontal, plan în care se produce angrenarea și trebuie să fie identic cu profilul dinților roții conjugate roții de prelucrat adică o linie evolventică desfășurată de pe cercul de bază de rază :

$$r_b = r_d \cos \alpha_d^* = \frac{m z}{2} \cos \alpha_d^* \qquad (1)$$

în care : r_d este raza cercului de divizare al roții morteză ;
m — modulul angrenajului considerat ;
z — numărul de dinți ai sculei ;
α_d^* — unghiul de angrenare utilizat (standardizat).

* Manuscris predat redacției la data de 23 noiembrie 1971

În sistemul de referință ales ca în fig. 1, ecuațiile parametrice ale acestei evolvente sînt :

$$x = r \cos\varphi_g$$
$$y = r \sin\varphi_g \qquad (2)$$
$$z = 0$$

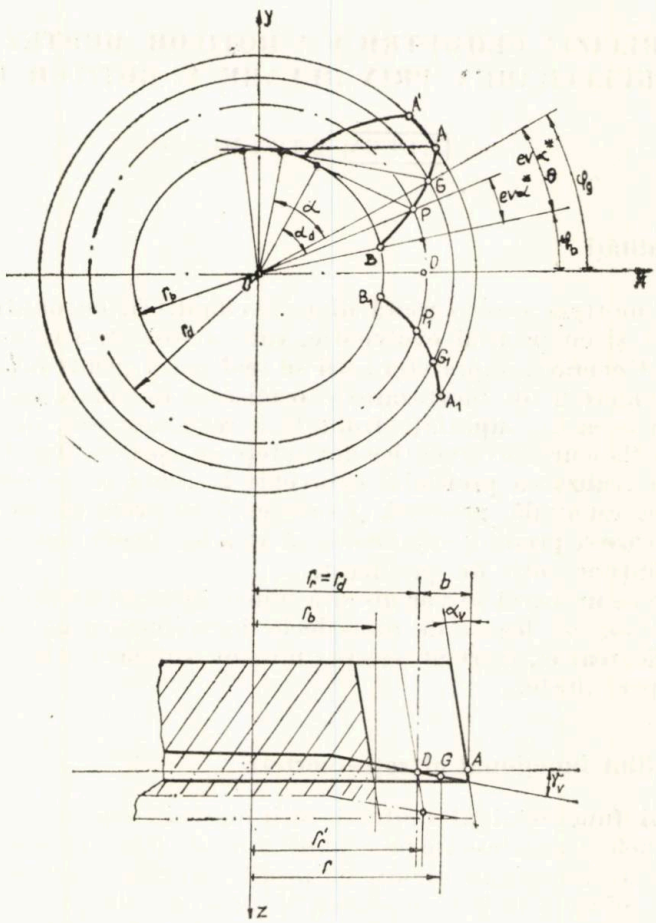


Fig. 1

în care : r și φ_g sînt coordonatele punctului curent G al generatoarei evolventice considerate BGA, în planul $z = 0$.

Din figura 1 se poate observa că :

$$\varphi_g = \varphi_b + \theta = \frac{\widehat{PD}}{r_d} - \theta_d + \theta \qquad (3)$$

în care $\widehat{PD}$ este un sfert din pasul circular, adică

$$\frac{P_c}{4} = \frac{2\pi r_d}{4z} \tag{4}$$

$$\frac{\widehat{PD}}{r_d} = \frac{\pi}{2z} \text{ şi } \varphi_b = \frac{\pi}{2z} - \theta_a$$

$$\theta = \text{ev}\alpha^* = \text{tg}\alpha^* - \alpha^* = \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r_b} - \text{arc tg}\frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r_b} \tag{5}$$

$$\theta_d = \text{ev}\alpha_d^* = \text{tg}\alpha_d^* - \alpha_d^* = \frac{\sqrt{r_d^2 - r_b^2}}{r_b} - \text{arc tg}\frac{\sqrt{r_d^2 - r_b^2}}{r_b}$$

Cu această relaţie expresia (3) devine

$$\varphi_g = \frac{\pi}{2z} - \text{ev}\,\alpha_d^* - \text{ev}\,\alpha^* \tag{6}$$

sau ţinînd seama de (4) şi (5) :

$$\varphi_g = \frac{\pi}{2z} - \frac{\sqrt{r_d^2 - r_b^2}}{r_b} + \text{arc tg}\frac{\sqrt{r_d^2 - r_b^2}}{r_b} + \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r_b} - \text{arc tg}\frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r_b} \tag{7}$$

din care reiese că unghiul polar φ_g al profilului este funcţie de raza curentă r.

Introducînd expresia (6) a unghiului φ_g în (2), ecuaţiile generatoarei evolventice BGA, sau ale liniei profilului funcţional din planul $z = 0$, devin :

$$x_g = r\cos\left(\frac{\pi}{2z} - \text{ev}\,\alpha_d^* - \text{ev}\,\alpha^*\right)$$

$$y_g = r\sin\left(\frac{\pi}{2z} - \text{ev}\,\alpha_d^* - \text{ev}\,\alpha^*\right) \tag{8}$$

$$z_g = 0$$

3. Faţa de degajare şi ecuaţia ei

Faţa de degajare a roţii-morteză, comună tuturor dinţilor, este o suprafaţă conică circulară, care conţine cercul de divizare de rază r_d din planul xOy considerat ca secţiune de referinţă. Generatoareleconu lui fac cu planul xOy unghiul de degajare pozitiv γ_c.

Ecuațiile acestei suprafețe conice în sistemul de referință $Oxyz$, vor fi:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= (r - r_d) \operatorname{tg} \gamma_v - t \end{aligned} \tag{9}$$

în care t poate lua valori pozitive sau negative, fiind egal cu zero în secțiunea de referință ($t \gtrless 0$),.

4. Muchia necesară a tăișului dintelui ia naștere prin intersecția suprafeței primare (8) cu suprafața de degajare (9).

$$\begin{aligned} x_{mt} &= r \cos\left(\frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha_d^* - \operatorname{ev} \alpha^*\right) \\ y_{mt} &= r \sin\left(\frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha_b^* - \operatorname{ev} \alpha^*\right) \\ z_{mt} &= (r - r_d) \operatorname{tg} \gamma_v - t \end{aligned} \tag{10}$$

5. Flancul detalonat al dintelui și profilul tehnologic

Pe porțiunea de tăiș evolventică APB (fig. 1) de pe flancul dintelui, unghiul de așezare necesar poate fi realizat prin mai multe modalități, dintre care cele mai uzuale, realizabile cu mașini unelte curente de rectificat danturi, sînt:

1. Formarea flancurilor ca niște suprafețe evolventice elicoidale cu directoare elicoidale cilindrice, fiecare dintre acestea avînd înclinarea spre interiorul corpului dintelui, adică cele două elicoide ale celor două flancuri avînd sensuri de rotire opuse.

2. Formarea flancurilor ca niște suprafețe evolventice riglate după directoare rectilinii, paralele între ele și înclinate față de axa Oz a sculei cu unghiul α_v ca și generatoarea conului exterior al roții-morteză (analog ca în cazul cuțitului pieptene).

În cele ce urmează se vor examina abaterile profilului funcțional real al muchiei sculei față de profilul funcțional necesar definit prin relațiile (10), mărimea lor fin d în funcție de procedeul de prelucrare a flancurilor laterale detalonate ale dinților.

5.1. *Flancuri formate din suprafețe evolventice elicoidale cilindrice (avînd ca directoare elici cilindrice).*

Flancul dintelui roții morteză este determinat de muchia tăișului cu profilul evolventic necesar, definit prin ecuațiile (10) și de o familie de

directoare elicoidale cilindrice $\Delta - \Delta$ care se sprijină pe această muchie (fig. 3).

Ecuaţiile parametrice ale familiei de directoare elicoidale, care trec prin punctul curent M al muchiei avînd coordonatele variabile $x_m\ y_m\ z_m$ sau $r_m\ \varphi_m\ z_m$ scriindu-se explicitat :

$$x_\alpha = r \cos \varphi$$

$$y_\alpha = r \sin \varphi \tag{11}$$

$$z_\alpha = (r - r_d) \operatorname{tg} \gamma_v - p_e \left[\varphi - \left(\frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha_d^* - \operatorname{ev} \alpha^* \right) \right]$$

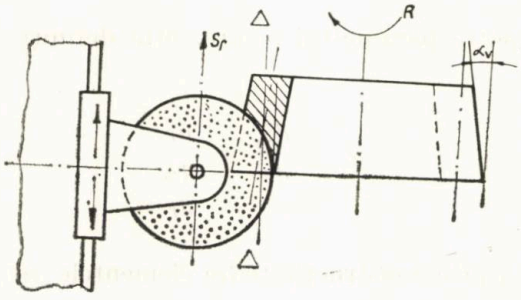


Fig. 2

Acestea reprezintă şi ecuaţiile flancului elicoidal cilindric, în care : x, y, z, r şi φ sînt coordonatele curente ale suprafeţei ; $\varphi_m = \varphi_g$ şi z_m sînt coordonatele curente ale muchiei necesare, definite prin ecuaţiile (6) şi (110) ;

$p_e = \dfrac{P}{2\pi}$ este parametrul elicei cilindrice P_e fiind pasul acesteia în direcţie paralelă cu axa cilindrului.

În secţiunea $N - N$ din fig. 1 se vede că unghiul de aşezare α_N se poate exprima prin :

$$\operatorname{tg} \alpha_N = \frac{d\rho}{dz_\alpha}$$

unde ρ este raza vectoare şi developanta evolventei AB care rulează fără alunecare pe cercul de bază r_b, creşterea ei $d\rho$ este egală cu creşterea $dS = r_b \times d\varphi$ a arcului de cerc de pe cercul de bază la o creştere $d\varphi$ a unghiului de rulare. Prin urmare :

$$d\rho = r_b\, d\varphi$$

$$\operatorname{tg} \alpha_N = \frac{r_b\, d\varphi}{dz_\alpha} = \frac{r}{\dfrac{dz_\alpha}{d\varphi}} \tag{12}$$

unde, $\frac{dz_\alpha}{d\varphi}$ se obține derivînd în raport cu φ funcția z din grupul de ecuații (11) adică $\frac{d\varphi}{dz_\alpha} = p_e$, așa că egalitatea (12) devine

$$\operatorname{tg} \alpha_N = \frac{r_b}{p_e} = \frac{r_d \cos \alpha_d^*}{p_e} \tag{13}$$

$$p_e = \frac{r_d \cos \alpha_d^*}{\operatorname{tg} \alpha_N} \tag{14}$$

Pe de altă parte parametrul p_e are, prin definiție, expresia:

$$p_e = \frac{dz_e}{d\varphi} = \frac{\frac{dz_\alpha}{dr}}{\frac{d\varphi}{dr}} \tag{15}$$

Observînd că prin construcție toate elementele roții morteză satisfac egalitatea

$$\frac{dr}{dz_\alpha} = \operatorname{tg} \alpha_v \tag{16}$$

iar pe flancuri $\frac{d\varphi}{dr}$ este derivata în raport cu r a funcției $\varphi_0(r)$ definită sub (6) și (7) adică:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r\, r_b}$$

și observînd că prin construcția evolventică elicoidală a flancurilor în orice plan secant $z = \text{const.}$ raportul $\frac{d\varphi}{dr}$ este constant atunci

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sqrt{r_a^2 - r_b^2}}{r_d\, r_a^2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_d^*}{r_d} \tag{17}$$

deducîndu-se,

$$p_e = r_d \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha_N - \operatorname{ctg}^2 \alpha_v} \tag{18}$$

La prelucrarea flancurilor dinților roții morteză definite mai înainte prin ecuațiile (12), rularea, între profilul rectiliniu de cremalieră a discu-

rilor abrazive şi flancurile evolventoidale, avînd loc în plane frontale, rezultă că profilul flancurilor în plane frontale trebuie să fie evolventice. Profilul frontal rezultă prin intersecţia flancului (11) cu un plan frontal $z = \text{const.} = 0$, aşa că linia de intersecţie va fi exprimată prin ecuaţiile :

$$x_p = r \cos \varphi_p$$

$$y_p = r \sin \varphi_p$$

$$z_p = 0$$

Deci cu $z_\alpha = z_p = 0$ în (11) rezultă

$$\varphi_p = \varphi_g - \frac{(r - r_d) \operatorname{tg} \gamma_v}{p_e} \tag{19}$$

în care se observă că unghiul polar φ_p al liniei de profil diferă de unghiul de profil evolventic φ_g definit prin ecuaţiile (6) şi (7), deci profilul nu mai este evolventic, ci diferit de acesta cu abaterea :

$$\Delta\varphi = \frac{(r - r_d) \operatorname{tg} \gamma_v \alpha_v \alpha_d^*}{r_a} \tag{20}$$

Deci, pentru ca la prelucrarea flancurilor prin rulare discul abraziv să poată avea profil rectiliniu, este necesar să se înlocuiască profilul din acest plan frontal cu profil evolventic „de înlocuire" cît mai apropiat de cel obţinut în (19). În acest scop evolventa de înlocuire se poate alege astfel ca în punctul P (la $r = r_d$) să aibă punct comun şi tangentă comună cu linia de profil abătută (φ_p), ceea ce poate exprima prin egalitatea de condiţie :

$$\left(\frac{r\, d\, \varphi_e}{dr}\right)_{r=r_a} = \left(\frac{r\, d\, \varphi_p}{dr}\right)_{r=r_d} \tag{21}$$

în care primul membru este tocmai tangenta unghiului de angrenare $\alpha_{d_1}^*$ al evolventei de înlocuire căutate, iar membrul al doilea se obţine derivînd în raport cu r funcţia (19) cu termenul φ_g dat de funcţia (6)—(7), şi anume :

$$\frac{d\, \varphi_p}{dr} = \frac{d\,(ev\, \alpha^*)}{dr} - \frac{\operatorname{tg} \gamma_v}{p_e}$$

care după derivarea primului termen şi înlocuind p_e devine :

$$\frac{d\, \varphi_p}{dr} = \frac{\sqrt{r^2 - r_b^2}}{r\, r_b} + \frac{\operatorname{tg} \gamma_v \operatorname{tg} \alpha_v \operatorname{tg} \alpha_d^*}{r_d}$$

La raza $r = r_d$ rezultă egalitatea de condiţie (21) devine :

$$\operatorname{tg} \alpha_{d_1}^* = \operatorname{tg} \alpha_d^* (1 + \operatorname{tg} \gamma_v \operatorname{tg} \alpha_v) \tag{22}$$

care exprimă mărimea unghiului de angrenare $\alpha_{d_1}^*$ a evolventei de înlocuire care va constitui generatoarea pentru generarea prin rulare a flancurilor evolventice — elicoidale ale mortezei — roată. Această evolventă se defineşte complet prin raza r_{b_1} a cercului de bază :

$$r_{b_1} = r_d \cos \alpha_{d_1}^* \tag{23}$$

şi prin unghiul φ_{b_0} al originei ei B_0 pe cercul de bază :

$$\varphi_{b_1} = \frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha_{d_1}^* \tag{24}$$

cu care se poate scrie ecuaţia ei

$$\varphi_e = \frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha_{d_1}^* + \operatorname{ev} \alpha_1^* \tag{25}$$

unde :

$$\operatorname{ev} \alpha_1^* = \frac{\sqrt{r^2 - r_{b_1}^2}}{r_{b_1}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{r^2 - r_{b_1}^2}}{r_{b_1}} \tag{26}$$

Noul flanc al dinţilor, generat efectiv pin rularea de elicile cilindrice, de acelaşi parametru p , sprijinite pe această generatoare evolventică de înlocuire va fi definit prin ecuaţiile :

$$x = r \cos\varphi ; \quad y = r \sin \varphi ; \quad z = p_e (\varphi - \varphi_e) \tag{27}$$

iar muchia de tăiş efectivă ce se obţine la intersecţia acestui flanc cu conul feţei de degajare (9) va fi definit prin ecuaţiile :

$$x = r \cos \varphi_{m_1} ; \quad y = r \sin \varphi_{m_1} ; \quad z = (r - r_d) \operatorname{tg} \gamma_v$$

unde φ_{m_1} rezultă ca soluţie comună a ecuaţiilor (9) şi (27)

$$\varphi_{m_1} = \varphi_e + \frac{(r - r_d)}{p_e} \operatorname{tg} \gamma_v \tag{28}$$

sau explicitat

$$\varphi_{m_1} = \frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha_{d_1}^* + \operatorname{ev} \alpha_1^* + \frac{r - r_d}{r_d} \operatorname{tg} \gamma_v \operatorname{tg} \alpha_v \operatorname{tg} \alpha_d^* \tag{28'}$$

Această ecuaţie reprezentînd unghiul polar (cilindric) al muchiei efective exprimă în acelaşi timp şi noul profil funcţional al mortezei - roată, care se vede că diferă de profilul funcţional necesar (10) respectiv (6), prin abaterea inerentă $\Delta\varphi_{m_1} = \varphi_{m_1} - \varphi_m$ adică :

$$\Delta\varphi_{m_1} = \frac{r - r_d}{p_e} \operatorname{tg}\gamma_v - (\operatorname{ev}\alpha_1^* - \operatorname{ev}\alpha^*) - (\operatorname{ev}\alpha_{d_1}^* - ev\,\alpha_d^*) \qquad (29)$$

Această abatere este o funcţie de r a cărei variaţie apare în graficul fig. 6 (curbele φ_{m_1} şi $\Delta\varphi_{m_1}$).

5.2. Flancuri formate din suprafeţele evolventice riglate

După cum s-a mai amintit, în acest caz flancurile sînt determinate de o familie de directoare rectilinii $\Delta - \Delta$ paralele între ele sprijinite pe o generatoare situată pe suprafaţa conică a feţei de degajare şi a cărei proiecţie pe planul frontal trebuie să fie evolventică (fig. 3). Din cauză că maşinile curente de rectificat danturi (Niles, Maag etc.) nu posedă un avans radial mecanic, pentru materializarea acestor directoare înclinate, se obişnuieşte să încline axa roţii morteză cu unghiul corespunzător α_e (fig. 3), aşa că realizarea directoarelor rectilinii înclinate are loc numai cu ajutorul avansului longitudinal de rectificare s , concomitent cu rularea.

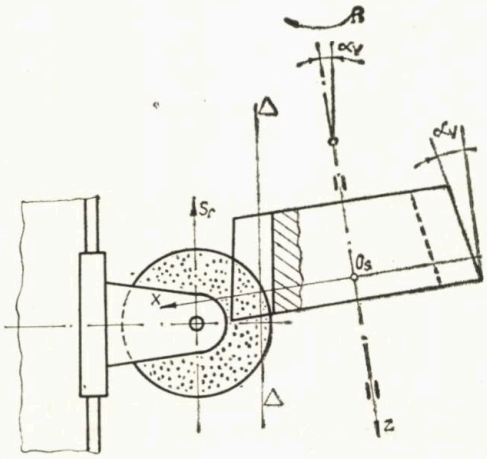


Fig. 3

Profilarea se produce prin rularea între profilul discului de rectificat şi flancurile dintelui roţii morteză aşezată înclinat şi anume în virtutea rulării alunecare dintre cercul de rulare $O_s\ P_0$ a roţii şi linia de divizare $L - L$ a cremalierei (fig. 4). Deoarece profilul discului de rectificat este rectiliniu şi corespunzător profilului cremalierei de referinţă în planul său axial YOO_d, se va considera că rularea are loc în acest plan şi anume între linia de rulare $L - L$ şi o curbă de rulare $\mathcal{R} - \mathcal{R}$ situată în planul YOO_d, şi constituită din elipsa de intersecţie a conului, avînd axa $O_s z$ şi generatoarea $\Delta_p - \Delta_p$ cu planul YOO_d.

Raza vectoare R_r (în raport cu centrul O) a acestei elipse se poate deduce riguros din ecuația elipsei :

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

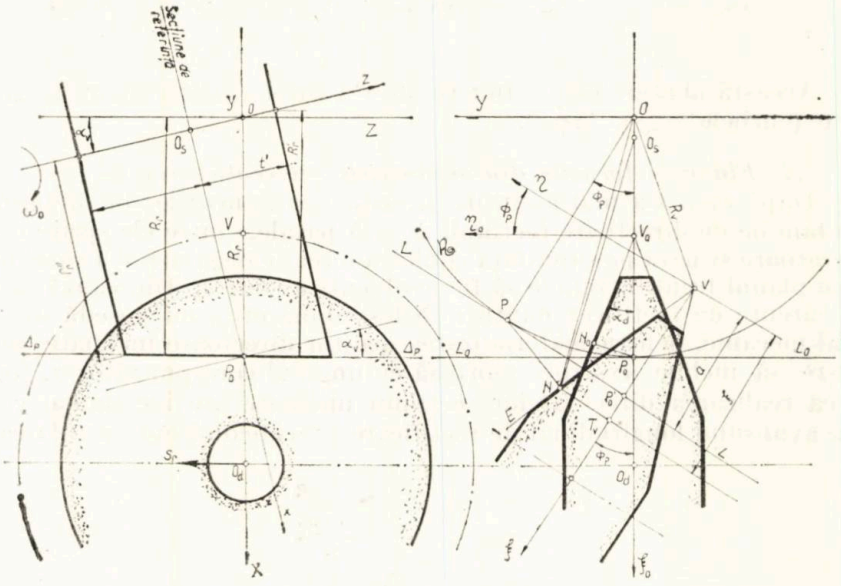


Fig. 4

din care, punînd $X = R_r \cos \Phi_p$ și $Y = R_r \sin \Phi_p$ cu semiaxele : $B = r_r$ și $A = \dfrac{r_r}{\cos \alpha_v}$ rezultă :

$$R_r = \frac{r_r}{\sqrt{\sin^2 \Phi_p \sin^2 \alpha_v + \cos^2 \alpha_v}} = f(\Phi_p) \tag{30}$$

Se poate considera, ca în fig. 4, că linia de rulare $L - L$ a profilului rectiliniu VE al discului de rectificat rulează pe curba de rulare fixă $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}$, solidar cu sistemul de axe mobile $V\xi\eta$. Astfel la un moment dat cînd linia de rulare $L - L$ este tangentă la curba de rulare $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}$ în punctul O axele mobile și profilul rectiliniu al discului vor ocupa pozițiile instantanee $V\xi\eta$ și respectiv VNE.

Dacă în sistemul mobil de axe $V\xi\eta$ linia de profil rectilinie este definită de ecuația :

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha_d^* \tag{31}$$

atunci în sistemul fix de axe OXY ea va fi definită prin ecuațiile parametrice

$$X_N = X_V - \xi a_\xi + \eta a_\eta ; \quad Y_N = Y_V + \xi b_\xi + \eta b_\eta \tag{32}$$

în care cosinusurile directoare au valorile instantanee ce rezultă din figura 4.

$$a_\xi = \cos \Phi_p \qquad a_{\eta_i} = -\sin \Phi_p \tag{33}$$

$$b_{\eta_i} = \sin \Phi_p \qquad b_{\zeta_i} = \cos \Phi_p$$

iar coordonatele instantanee X_v și Y_v ale originei V se pot determina proiectînd succesiv laturile poligonului închis $OVP'_0\ PO$ pe axele OX și OY, de unde rezultă:

$$X_v = X_p - YP'_0 \cos \Phi_p - PP'_0 \sin \Phi_p \tag{34}$$

$$Y_v = Y_p - VP'_0 \sin \Phi_p - PP'_0 \cos \Phi_p$$

în care:

$$VP'_0 = a = \frac{p}{4} \operatorname{ctg} \cos \alpha_d^* = \frac{\pi r_d}{2z} \operatorname{ctg} \alpha_d^* \tag{35}$$

$$\overline{PP'_0} = PP_0 = R_i \Phi_p$$

unde: p este pasul circular al danturii roții-morteză în planul ei de referință în care raza cercului de rulare r_r este egală cu raza cercului de divizare r_d

$$R_i \cong \frac{r_r}{\cos \alpha_v} \tag{36}$$

este raza arcului de cerc cu care se înlocuiește raza elipsei $R - R$ pe porțiunea relativ mică pe care are loc rularea

Φ_p este unghiul polar curent al polului de rulare curent

$$\overline{PP_0} = R_i \Phi_p \tag{37}$$

este lungimea aproximativă a arcului de elipsă $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}$ pe care se produce rularea liniei $L - L$, egală cu segmentul PP'_0 de pe aceasta, conform legilor rulării.

Cu acestea și cu observația că $X_p = R_i \cos \Phi_p$ și $Y_p = R_i \sin \Phi_p$ egalitățile (35) devin:

$$X_v = R_i \cos \Phi_p - \cos \Phi_p - R_i \Phi_p \sin \Phi_p \tag{38}$$

$$Y_v = R_i \sin \Phi_p - a \sin \Phi_p - R_i \Phi_p \cos \Phi_p$$

iar ecuațiile (32) la rîndul lor devin:

$$X_N = (R_i + \xi - a) \cos \Phi_p + (R_i \Phi_p - \xi \operatorname{tg} \alpha_d^*) \sin \Phi_p \tag{39}$$

$$Y_N = (R_i + \xi - a) \sin \Phi_p - (R_i \Phi_p - \xi \operatorname{tg} \alpha_d^*) \cos \Phi_p$$

$$Z_N = 0$$

în care mărimea $\xi = VN \cos\alpha_d^*$ poate fi exprimată proiectînd laturile poligonului închis $VNPP_{Po}\ V$ pe axele $V\xi$ și $V\eta$ adică,

$$VN \cos \alpha_d^* - NP \sin \alpha_d^* - P_0' V = 0 \tag{40}$$

$$VN \sin \alpha_d^* + NP \cos \alpha_d^* - PP_0' = 0$$

de unde, eliminînd NP și ținînd seama de relația (36) se obține :

$$\xi = (a \cos \alpha_d^* + R_i\Phi_p \sin \alpha_d^*) \cos\alpha_d^* \tag{41}$$

Trecînd în sistemul O_sxyz al sculei, coordonatele punctului curent N al profilului generat vor avea expresiile ce rezultă prin transformarea de coordonate și anume :

$$\begin{aligned} x_N &= (X_N - X_{os})a_x + (Y_N - Y_{os})b_x + (Z_N - Z_{os})c_x \\ y_N &= (X_N - X_{os})a_y + (Y_N - Y_{os})b_y + (Z_N - Z_{os})c_y \\ z_N &= (X_N - X_{os})a_z + (Y_N - Y_{os})b_z + (Z_N - Z_{os})c_z \end{aligned} \tag{42}$$

în care conform fig. 5, parametrii poziției axelor O_sxyz sînt :

$$X_{os} = \frac{r_r \sin^2\alpha_v}{\cos\alpha_v}; \quad Y_{os} = 0; \quad Z_{os} = -r_r \sin\alpha_v \tag{43}$$

$$\begin{aligned} a_x &= \cos\alpha_v & b_x &= 0 & c_x &= \sin\alpha_v \\ a_y &= 0 & b_y &= 1 & c_y &= 0 \\ a_z &= -\sin\alpha_v & b_z &= 0 & c_z &= \cos\alpha_v \end{aligned}$$

în care ecuațiile parametrice (42) ale profilului flancurilor dintelui roții-morteză în sistemul O_sxyz devin :

$$x_N = X_N \cos\sigma_v; \; y_N = Y_N; \; z_N = r_r \operatorname{tg}\alpha_v - X_N \sin\alpha_v \tag{44}$$

unde X_N, Y_N și Z_N sînt funcțiile definite prin (39) și care se pot scrie și sub forma

$$\begin{aligned} X_N &= [(R_i - a)\cos\Phi_p - R_i\Phi_p \sin\Phi_p] + \xi(\cos\Phi_p - \operatorname{tg}\alpha_d^* \sin\Phi_p) = A - \xi B \\ Y_N &= [(R_i - a)\sin\Phi_p - R_i\Phi_p \cos\Phi_p] + \xi(\sin\Phi_p + \operatorname{tg}\alpha_d^* \cos\Phi_p) = C - \xi D \\ Z_N &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

în care pentru simplificare s-au notat cu A, B, C și D funcțiile :

$$\begin{aligned} A &= (R_i - a)\cos\Phi_p + R_i\Phi_p \sin\Phi_p \\ B &= \cos\Phi_p - \operatorname{tg}\alpha_d^* \sin\Phi_p = \frac{\cos(\Phi_p + \alpha_d^*)}{\cos\alpha_d^*} \\ C &= (R_i - a) \text{ si n } \Phi_p - R_i\Phi_p\cos\Phi_p \\ D &= \sin\Phi_p + \operatorname{tg}\alpha_d^*\cos\Phi_p = \frac{\sin(\Phi_p + \alpha_d^*)}{\cos\alpha_d^*} \end{aligned} \tag{46}$$

Cu relațiile (44) — (46) se poate exprima raza r_N la punctul curent de profil $N(x_N y_N z_N)$ și anume :

$$r_N^2 = x_N^2 + y_N^2 = X_N^2\cos^2\alpha_v + Y_N^2 = (A + B\xi)^2\cos^2\alpha_v + (C + D\xi)^2$$

din care rezultă ecuația în ξ ca funcție de r_N

$$(B^2\cos^2\alpha_v + D^2)\xi^2 - 2(AB\cos^2\alpha_v - CD)\xi + A^2\cos^2\alpha_v + C^2 - r_N^2 = 0 \tag{47}$$

a cărei soluție este :

$$\xi = \frac{+(AB\cos^2\alpha_v - CD) \pm \sqrt{r_N^2(B^2\cos^2\alpha_v + D^2) - (AD + BC)^2\cos^2\alpha_v}}{B^2\cos^2\alpha_v + D^2} \tag{48}$$

în care grupele de termeni, prin înlocuirile cu (46) și după simplificări capătă expresiile de sub forma (49).

Întrucît unghiul polar Φ_p este mic se poate face uz de aproximațiile :

$$\sin\Phi_p \cong \Phi_p \quad \text{și} \quad \cos\Phi_p \cong 1 - \frac{\Phi_p^2}{2}$$

Eliminînd pe ξ din expresiile sale (48) și (41) se obține egalitatea :

$$\begin{aligned} &(a\cos^2\alpha_d^* + R_i\Phi_p\sin^2\cos\alpha_d^*)(B^2\cos^2\alpha_v + D^2) + (AB\cos^2\alpha_v - CD)^2 = \\ &= r_N^2(B^2\cos^2\alpha_d^* + D^2) - (AD + BC)^2\cos^2\alpha_v \end{aligned}$$

din care renunțînd la termenii n Φ^4 și Φ^3, rezultă ecuația de gradulII în Φ_p.

$$\begin{aligned} &\Phi_p^2(R_i d + ae)^2 + 2(R_i - a)(R_i f + ag) - (r_N^2 h - R_i^2\cos^2\alpha_v) - \\ &- 2\Phi(R_i d + ac)(R_i f + ag) - R_i(R_i - a)\operatorname{tg}\alpha_d^* - r^2 j - (R_i f + \mathrm{ag})^2 + \\ &+ (R_i - a)^2\operatorname{tg}^2\alpha_d^*\cos\alpha_v - r^2\mathrm{k} = 0 \end{aligned}$$

a cărei soluţie este :

$$\Phi_p = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$$

în care M, N, P, a, e, f, j sînt termeni grupaţi funcţie de raza curentă r, α_v, α_d^* etc.

Ducînd, prin punctul curent M al profilului astfel obţinut, directoarea rectilinie curentă $\Delta - \Delta$ (pe direcţia de rectificare s_r) avînd cosinusurile directoare :

$$a_\Delta = \sin\alpha_v, \qquad b_\Delta = 0, \qquad c_\Delta = \cos\alpha_v \tag{50}$$

se obţin ecuaţiile parametrice ale flancului care se sprijină pe această linie de profil şi anume :

$$\frac{x - x_N}{\sin\alpha_v} = \frac{y - y_N}{0} = \frac{z - z}{\cos\alpha_v}$$

sau

$$z_\alpha = (x - x_N)\ \mathrm{ctg}\alpha_v + z_N$$

$$y_\alpha = y_N \tag{51}$$

Egalînd z_α din (51) cu z_γ din (9) se obţine :

$$(r\cos\varphi - x_N)\ \mathrm{ctg}\alpha_v + z_N = (r - r_r)\ \mathrm{tg}\ \gamma_v + t$$

din care, separînd pe φ, se obţine expresia unghiului polar (de profil) muchiei reale căutate -şi anume :

$$\cos\varphi_{m_2} = \frac{1}{r}\left[x_N^{\cdot} + \frac{(r - r_r)\,\mathrm{tg}\,\gamma_v + t - z_N}{\mathrm{ctg}\alpha_v}\right] \tag{53}$$

şi respectiv :

$$\varphi_{m_2} = \arccos\left\{\left[\left(1 - \frac{r_r}{r}\right)\mathrm{tg}\,\gamma_v + \frac{t}{r}\right]\mathrm{tg}\,\alpha_v - \frac{1}{r}\,(z_N\mathrm{tg}\alpha_v - x_N)\right\} \tag{54}$$

Comparînd această linie de profil funcţional al dintelui mortezei cu profilul evolventic corectat din cazul precedent (cu evolventa de înlocuire) se constată o abatere unghiulară :

$$\Delta\varphi_{m_2} = \varphi_{m_2} - \varphi_e$$

care trecută în diagrama fig. 5 (curbele φ_{m_2} şi $\Delta\varphi_{m_2}$) se constată că este sensibil mai mare decît abaterea inerentă realizată prin primul procedeu, chiar şi în secţiunea de referinţă.

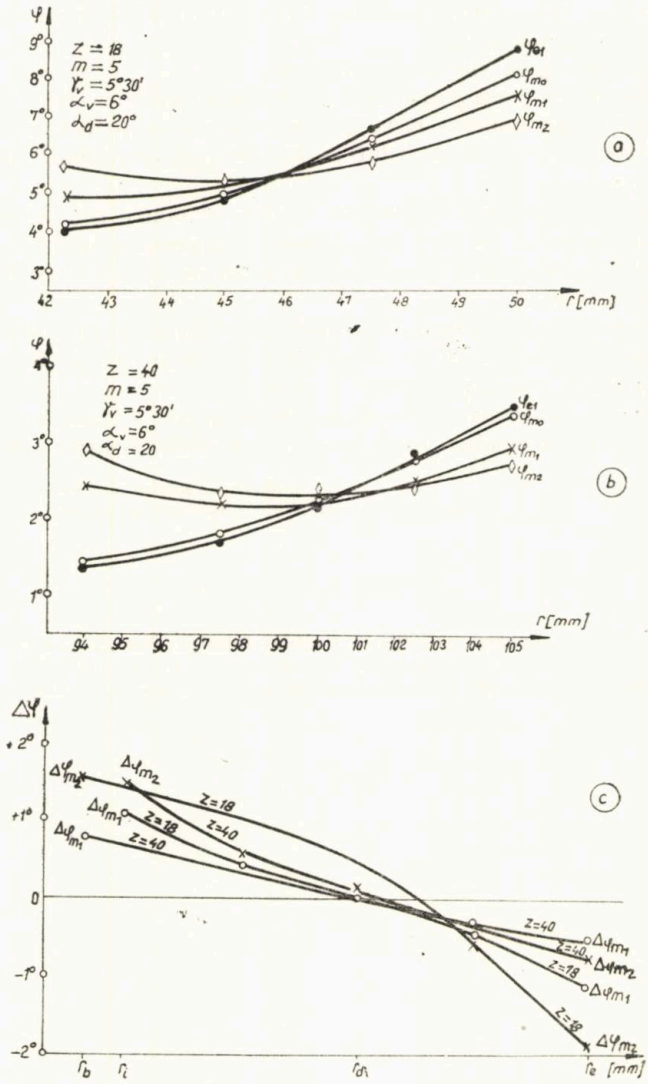


Fig. 5

În figura 5 au fost reprezentate diagramele curbelor de profil date de relaţiile : (6) (25), (28) şi (54) (fig. 5 a şi b) precum şi abaterile ce apar pentru două forme de flancuri (fig. 5 c) . Calculele au fost efectuate pentru două roţi morteză cu $z = 18$ şi 40 dinţi, $\alpha_d^* = 20°$, $\alpha_v = 6°$ şi $\gamma_v = 5°30'$ (fig. 5 a şi b).

Curbele ρ_{m_0} reprezintă evolventa necesară avînd unghiul $\alpha_d^* = 20°$.

Curbele φ_{e_1} reprezintă evolventa de înlocuire avînd unghiul $\alpha^*_{d_1}$.

Curbele φ_{m_1} reprezintă profilul funcţional al mortezei pentru cazul flancurilor elicoidal cilindrice.

Curbele φ_{m_2} reprezintă profilul funcţional al mortezei pentru cazul flancurilor evolventice riglate.

Se poate observa de asemenea că :

— abaterile au o creştere mai mare spre periferia roţii morteză ;

— ea creşte pe măsura reascuţirilor succesive prin faptul că variază continuu şi raza de rulare la rularea din timpul rectificării dinţilor roţii-morteză.

Ca concluzie practică a acestui studiu se poate reţine faptul că rectificarea roţii morteză cu cel de al doilea procedeu trebuie considerată ca o soluţie de improvizaţie care dă erori mari de profil al roţilor prelucrate cu asemenea sculă.

Corectarea acestor erori mari prin rectificarea sau şeveruirea roţii prelucrate, necesită un timp de rectificare (şeveruire) mai mare şi consum mai mare de scule (piatră abrazivă şi şever).

În plus, la şeveruire solicitarea mai mare a dinţilor şeverului la vîrful şi la piciorul dintelui poate provoca şi deteriorarea acestuia.

Catedra de maşini unelte scule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. *Duca Zoltan* — Teoria sculelor aşchietoare Editura tehnică. Bucureşti 1967.
2. *Matiuşin V. M.* Mortezarea rotilor dinţate (trad. l. rusă) I.D.T. 1953.
3. *Botez, E.* — Maşini-unelte vol. I Cinematica Ed. tehnică Bucureşti, 1969.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 1

TRANSPORTURI

C. Z. 625.2

CONTRIBUȚII LA STABILIREA VARIAȚIEI DE SARCINĂ PE OSIILE LOCOMOTIVELOR DE TOTALĂ ADERENȚĂ CU MOTOARE SEMISUSPENDATE LA DEMARARE

ALEXANDRU NEAGU

1. Considerații generale

Părțile componente ale unei locomotive sînt astfel dispuse încît să satisfacă și condiția ca greutatea ei să se distribuie în stare statică pe cît posibil în mod egal pe osii.

În momentul în care circuitul de forță al locomotivei este pus sub sarcină — cînd locomotiva dezvoltă forță de tracțiune la obadă — se încalcă echilibrul static al repartiției greutății locomotivei pe osii. Schimbarea modului de repartiție a greutății locomotivei pe osii se datorește acțiunii cuplurilor dezvoltate la arborii motoarelor electrice de tracțiune, acțiunii cuplului datorat tracțiunii înalte, precum și datorită situării în plane orizontale diferite a punctelor de aplicare a forței de tracțiune în lagărele pivoților și în ghidajele cutiilor de osie.

Modificarea repartiției greutății locomotivelor pe osii este însoțită de schimbarea ponderii forțelor de tracțiune limitate de aderență ale osiilor în cadrul forței de tracțiune limitate de aderență a locomotivei. De aceea pentru utilizarea completă a greutății aderente a locomotivei, concomitent cu evitarea patinării roților pe șine, ar fi necesară luarea de măsuri constructive pentru ca cuplul dezvoltat de fiecare motor de tracțiune să se modifice în funcție de sarcina la șină a osiei pe care o antrenează. Modificarea aceasta a valorilor cuplurilor ar fi destinată deci satisfacerii, la orice viteză de circulație, a condiției globale pentru locomotivă

$$\sum_{i=1}^{n} F_{oi} = \sum_{i=1}^{n} F_{ai}, \tag{1}$$

unde :

$\sum_{i=1}^{n} F_{oi}$ reprezintă forța de tracțiune la obadă a locomotivei,

$\sum_{i=1}^{n} F_{ai}$ — forța de tracțiune limitată de aderență a locomotivei,

$i = 1, 2, \ldots, n$- numărul de osii ale locomotivei.

* Manuscris predat redacției la data de 10 martie 1972

Îndeplinirea condiției (1) conduce la utilizarea completă a greutății aderente a locomotivei, deoarece, indiferent de modul de distribuire a greutății lcomotivei pe osii, suma sarcinilor pe osii este constantă, și egală cu greutata aderentă.

Legea de variație a cuplurilor motoare cu viteza de circulație ar trebui să fie similară cu aceea a produsului dintre coeficientul de aderen-

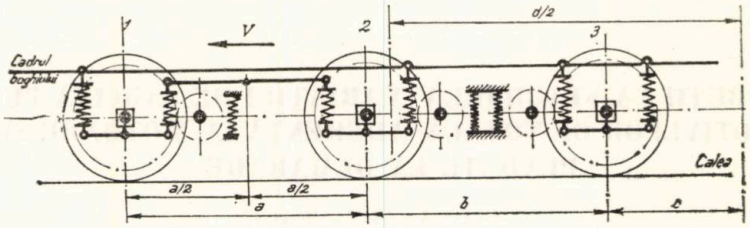


Fig. 1

ță și sarcina pe osie; aceasta pentru că valoarea cuplurilor trebuie să fie în concordanță cu aceea a sarcinii pe osie și a coeficientului de aderență.

La locomotivele care nu au posibilități pentru potrivirea cuplurilor dezvoltate de motoare în funcție de sarcinile pe osiile antrenate, și la care în condiții normale de funcționare cuplurile motoare sînt egale între ele, trebuie cercetată variația de sarcină pe fiecare osie în funcție de forța de tracțiune și să se stabilească dependența dintre cuplul motor, viteza de circulație și tonajul trenului, dependență care să asigure utilizarea într-o proporție cît mai mare posibilă a greutății aderente a locomotivei, fără ca să apară patinare la vreuna din roți. Într-un astfel de caz, regimurile de sarcină maximă ale motoarelor locomotivei se stabilesc în funcție de sarcina pe osia limitatoare-osia care se descarcă cel mai mult.

Pentru cercetarea variației sarcinii pe osiile locomotivelor se pleacă de la dispoziția osiilor locomotivei și de la dimensiunile constructive corespunzătoare. Relațiile de calcul se vor stabili pentru o locomotivă cu șase osii motoare grupate în două boghiui a cîte trei osii (fig. 1), la care legătura elastică dintre boghiuri nu transmite forță de tracțiune și nu realizează forțe de rapel în plan vertical.

2. Cuplul motor, regimul de mers și variația de sarcină pe osie

În mod obișnuit, pentru studiul influenței cuplului motor asupra sarcinii pe osie se consideră regimurile de mișcare stabilizate, se neglijează pierderile din transmisia intercalată între motor și osie. În aceste ipoteze simplificatoare se stabilește că în cazul antrenării individuale a unei osii cu un motor semisuspendat, fig. 2, sarcina pe osie variază față de sarcina statică cu

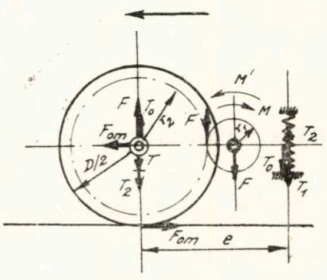


Fig. 2

$$T_0 = j\frac{i}{e}M = j\frac{D}{2e}F_{om}, \qquad (2)$$

unde:

D este diametrul roții motoare;

e — distanța dintre punctele de sprijin ale motorului pe osie și pe cadrul boghiului;

F_{om} — forța de tracțiune dezvoltată de motor la obadă;

i — raportul de transmitere al atacului de osie;

j — factor unitar ce ține seama de poziția motorului față de osia pe care o antrenează: $j = +1$ pentru cazul cînd motorul este așezat după osie și $j = -1$ pentru cazul cînd motorul este așezat înaintea osiei.

În aceeași ipoteză se arată că asupra cadrului de boghiu, în punctul de suspendare a motorului, acționează o forță

$$T_0' = -j\frac{i}{e}M = -j\frac{D}{2e}F_{om}. \tag{3}$$

În cazul general, însă, al unui regim de mișcare nestaționar, variabil, cum este cazul mișcării accelerate din perioada de demarare, o parte din cuplul motor la arbore M se consumă pentru accelerarea maselor în mișcare de rotație și pentru acoperirea pierderilor din atacul de osie. De aceea, dacă se ține seama de cuplul rezistent introdus de inerția maselor în mișcare de rotație ale motorului și de pierderile din atacul de osie, cuplul la arbore transmisibil se va reduce de la valoarea M la valoarea

$$\left(M - J_r\frac{d\omega_r}{dt}\right)\eta_a \quad \text{sau} \quad \left(M - \frac{2iJ_r}{D}\cdot\frac{dv}{dt}\right)\eta_a,$$

J_r reprezintă momentul de inerție al rotorului motorului, inclusiv al pinionului atacului de osie;

$\frac{d\omega_r}{dt}$ — accelerația unghiulară a rotorului motorului de tracțiune, inclusiv a pinionului atacului de osie;

$\frac{dv}{dt}$ — accelerația trenului la demarare;

η_a — randamentul atacului de osie.

Aceasta face ca forțele F, T și T_1 care reprezintă acțiunea pinionului asupra roții dințate mari a atacului de osie, acțiunea palierelor de sprijin ale motorului asupra osiei și respectiv acțiunea consolei de sprijin a motorului asupra sistemului elastic de suspendare pe boghiu, toate datorită cuplului activ al motorului, să primească valorile:

$$F = \frac{1}{r_1}\left(M - \frac{2iJ_r}{D}\frac{dv}{dt}\right)\eta_a, \tag{4}$$

$$T = \frac{e-(r_1+r_2)}{er_1}\cdot\left(M - \frac{2iJ_r}{D}\frac{dv}{dt}\right)\eta_a, \tag{5}$$

$$T_1 = \frac{r_1+r_2}{er_1}\left(M - \frac{2iJ_r}{D}\cdot\frac{dv}{dt}\right)\eta_a. \tag{6}$$

Mărimile e, r_1, r_2, și D din aceste relații au semnificația din fig. 2. Cu valorile stabilite pentru F, T și T_1 și cu aceea a forței $T_2 = \frac{M}{e}$, introdusă de cuplul reactiv în cele două puncte de reazim ale motorului, rezultă că mărimea forțelor T_0 și T_0' va fi:

$$T_0 = j\left(k_1 M - k_1' \frac{dv}{dt}\right), \tag{7}$$

$$T_0' = -j\left(k_1 M - k_1' \frac{dv}{dt}\right), \tag{8}$$

unde:

$$k_1 = \frac{\eta_a(r_1 + r_2)}{e r_1}; \quad k_1' = \frac{2 J_r i \eta_a (r_1 + r_2)}{e r_1 D}.$$

Pentru a exprima pe T_0 și T_0' în funcție de forța de tracțiune la obadă ținem seama de relația de legătură dintre cuplul M și F_{om}, relație care ia în considerare faptul că o parte din cuplul transmis osiei se consumă pentru accelerarea osiei montate și pentru învingerea frecării din palierele osiei:

$$M = \frac{D}{2 i \eta_a} F_{om} + \frac{2(J_r i^2 \eta_a + J_0)}{i D \eta_a} \cdot \frac{dv}{dt} + M_f, \tag{9}$$

în care:

J_0 este momentul de inerție al osiei motoare, inclusiv al roții dințate mari a ataculuí de osie;

M_f — cuplu rezistent introdus de frecările din palierele orsiei.

Cu acestea relația (7) și (8) devine:

$$T_0 = j\left(k_2 F_{om} + k_2' \frac{dv}{dt} + k_2''\right), \tag{10}$$

$$T_0' = -j\left(k_2 F_{om} + k_2' \frac{dv}{dt} + k_2''\right), \tag{11}$$

în care, dacă se consideră că η_a și M_f sînt constante,

$$k_2 = \frac{D[\eta_a(r_1 + r_2) - r_1]}{2 e r_1 i \eta_a},$$

$$k_2' = \frac{2}{e r_1 D}\left\{\frac{[\eta_a(r_1 + r_2) - r_1](J_r i^2 \eta_a + J_0)}{i \eta_a} + J_r i \eta_a (r_1 + r_2)\right\},$$

$$k_2'' = \frac{\eta_a (r_1 + r_2) - r_1}{e r_1} M_f.$$

Din cele prezentate anterior rezultă că, în cazul aşezării motoarelor electrice de tracţiune faţă de osii ca în fig. 1, variaţia de sarcină pe osie introdusă de acţiunea cuplului motor se produce astfel:

— osiile 1, 2, şi 4 se descarcă cu T_0;

— osiile 3, 5, 6 se încarcă cu T_0.

3. Variaţia de sarcină pe osii datorită forţelor exterioare care acţionează asupra cutiei locomotivei

La demarare, imprimîndu-se trenului o mişcare accelerată cu acceleraţia $\frac{dv}{dt}$, rezultă că din forţa de tracţiune la obada o parte se va consuma pentru învingerea rezistenţelor la mers şi a inerţiei masei locomotivei. De asemenea, forţa de tracţiune la cîrligul locomotivei se va consuma pentru învingerea rezistenţelor la înaintare şi pentru accelerarea mişcării convoiului de vagoane remorcate.

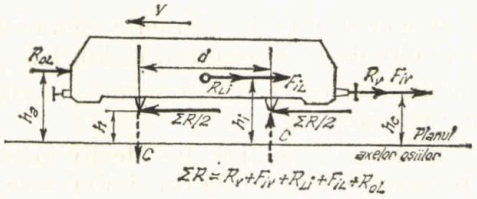


Fig. 3

Schema de încărcare cu forţe exterioare a cutiei locomotivei este dată în fig. 3, pe care s-a notat cu:

ΣR — forţa care acţionează între cadrul boghiului şi şasiul locomotivei;

R_v — rezistenţa la înaintarea convoiului de vehicule remorcate pe un profil oarecare;

R_{Ii} — rezistenţa la înaintarea părţii suspendate pe boghiuri a locomotivei datorită declivităţii elementului de profil pe care se demarează;

R_{al} — rezistenţa la înaintarea locomotivei datorită aerului;

F_{il} şi F_{iv} — rezistenţa la înaintare introdusă de inerţia părţii suspendate pe boghiuri a locomotivei şi respectiv de inerţia convoiului de vehicule remorcate;

h_a — înălţimea centrului de greutate al secţiunii transversale a locomotivei faţă de planul axelor osiilor;

h_i — înălţimea centrului de greutate al cutiei locomotivei faţă de planul axelor osiilor;

h_c — înălţimea aparatelor de tracţiune şi legare faţă de planul axelor osiilor;

h — înălţimea punctului de aplicare a forţei de tracţiune în pivoţi faţă de planul axelor osiilor.

Pentru calculul forţelor care acţionează asupra cutiei locomotivei se folosesc relaţiile:

$$R_v = G_v\left(m + \frac{v^2}{m_1} + r_i\right); \quad F_{iv} = 1\,000\,\frac{(1+\gamma_v)G_v}{g}\cdot\frac{dv}{dt};$$

$$R_{li} = G'_l r_i; \quad F_{il} = 1\,000\,\frac{G'_l}{g}\cdot\frac{dv}{dt};$$

$$R_{al} = \alpha A v^2;$$

$$\Sigma R = R_v + F_{iv} + R_{li} + R_{al} + F_{il} = k_3 v^2 + k'_3\frac{dv}{dt} + k''_3$$

În aceste relaţii s-au notat cu:

G_v — greutatea convoiului de vehicule remorcate, în tf;
v — viteza de circulaţie a trenului, în km/h;
m şi m_1 — coeficienţii constanţi ce ţin seama de structura convoiului vehicule remorcate;
r_i — forţa specifică introdusă de declivitatea elementului de profil pe care se demarează (în simbol este inclus şi semnul);
$(1 + \gamma_v)$ — factorul de masă al vehiculelor remorcate;
G'_L — greutatea în stare de serviciu a părţii suspendate pe boghiuri a locomotivei, în tf;
α — coeficient ce ţine seama de forma şi greutatea locomotivei şi de densitatea aerului;
A — suprafaţa transversală maximă a locomotivei, în m²;

$$k_3 = \frac{1}{d}\left[\frac{G_v(h_c - h)}{m_1} + \alpha A(h_a - h)\right];$$

$$k'_3 = \frac{1\,000}{gd}\left[G_v(1+\gamma_v)(h_c - h) + G'_l(h_i - h)\right];$$

$$k''_3 = \frac{G_v(h_c - h)}{d}(m + r_i) + \frac{G'_l r_i(h_i - h)}{d}.$$

Demararea realizîndu-se în domeniul vitezelor mici şi medii, se poate adopta pentru exponentul n valoarea 2.

Forţele care acţionează asupra cutiei, lucrînd în plane orizontale diferite, dau naştere unui cuplu de răsturnare a cărei valoare este:

$$(R_v + F_{iv})(h_c - h) + (R_{li} + F_{il})(h_i - h) + R_{al}(h_a - h).$$

Acest cuplu modifică încărcarea verticală a celor două boghiuri cu o forţă,

$$C = k\left(k_4 v^2 + k'_4\frac{dv}{dt} + k''_4\right). \qquad (12)$$

În rel. (12):

$$k_4 = \frac{1}{d}\left[\frac{G_v(h_c - h)}{m_1} + \alpha A(h_i - h)\right],$$

$$k_4' = \frac{1\,000}{gd}[G_v(1 + \gamma_v)(h_c - h) + G_t'(h_i - h)],$$

$$k_4'' = \frac{1}{d}[G_v(h_c - h)(m + r_i) + G_t' r_i(h_i - h)],$$

k — factor unitar ce ține seama de poziția boghiului la locomotivă față de sensul de mers; $k = +1$ pentru boghiul din spate, $k = -1$ pentru boghiul din față.

Repartiția forței C pe osiile boghiului depinde de modul de suspendare a cadrului de boghiu pe acestea. Așa de exemplu, pentru cazul bo-

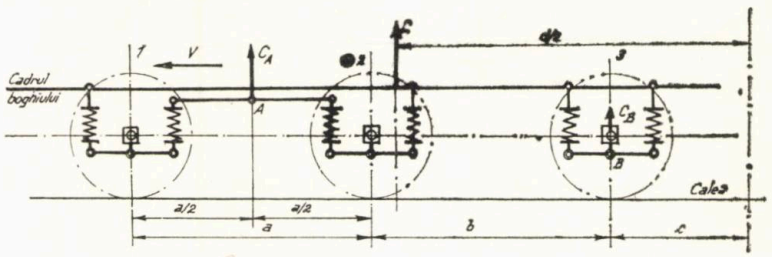


Fig. 4

ghiului din fig. 4 — boghiul locomotivei diesel electrice 060 DA CFR — forța C dă naștere în cele două puncte de suspendare A și B componentelor:

$$C_A = k\left(k_5 v^2 + k_5' \frac{dv}{dt} + k_5''\right), \tag{14}$$

$$C_B = k\left(k_6 v^2 + k_6' \frac{dv}{dt} + k_6''\right). \tag{14}$$

În aceste relații:

$$k_5 = \frac{d - 2c}{2b + a} k_4, \quad k_5' = \frac{d - 2c}{2b + a} k_4', \quad k_5'' = \frac{d - 2c}{2b + a} k_4'',$$

$$k_6 = \frac{a + 2(b + c) - d}{2b + a} k_4, \quad k_6' = \frac{a + 2(b + c) - d}{2b + a} k_4', \quad k_6'' = \frac{a + 2(b + c) - d}{2b + a} k_4''.$$

Dacă se analizează modul de suspendare a cadrului de boghiu pe osii, rezultă că osia 3 se descarcă cu o forță egală cu C_B, iar osiile 1 și 2, avînd arcurile de suspendare legate între ele prin balanciere longitudinale cu brațe egale, se vor descărca în mod egal și anume cu $C_A/2$. Datorită unui aranjament simetric al osiilor celui de al doilea boghiu față de osile primului boghiu, osia 4 se va încărca cu o forță egală cu C_B iar osiile 5 și 6 se vor încărca cu $C_A/2$.

4. Variația de sarcină pe osii datorită forțelor exterioare care acționează asupra cadrului de boghiu.

În regim de demaraj, asupra cadrului unui boghiu, de exemplu al acelui din spate, acționează forțele exterioare din fig. 5. În afara notațiilor

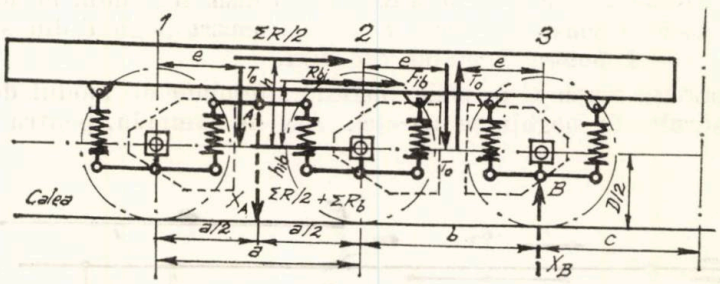


Fig. 5

deja utilizate, sau a căror semnificație rezultă de pe figură, s-au mai notat cu :

$F_{ib}=1\,000\,\frac{G'_b}{g}\,\frac{dv}{dt}$ — rezistența la înaintare introdusă de inerția părții suspendate a boghiului; G'_b fiind greutatea părții suspendate a boghiului, în *tf*;

$R_{bi}=G'_b r_i$ — rezistența la înaintarea părții suspendate a boghiului, datorită declivității elementului de profil pe care se demarează;

$R_b=F_{ib}+R_{bi}=k_7\,\frac{dv}{dt}+k'_7$ — rezistența la înaintare a părții suspendate a boghiului datorită accelerării mișcării și declivității $\left(k_7=1\,000\,\frac{G'_b}{g}\;;\; k'_7=G'_b r_i\right)$;

h_{ib} — înălțimea centrului de greutate al părții suspendate a boghiului față de planul axelor osiilor.

Forțele exterioare care acționează asupra cadrului de boghiu dau naștere unui cuplu de rotație a cadrului, modificînd astfel tensiunile din arcurile de suspendare. Datorită acestui cuplu în cele două puncte de sus-

pendare A și B vor apare forțele:

— în punctul de suspendare A,

$$X_A = \varepsilon_1 \left(k_8 v^2 + k'_8 \frac{dv}{dt} - k''_8 F_{om} + k'''_8 \right), \tag{15}$$

unde:

$$k_8 = \frac{k_3 h}{2b + a};$$

$$k'_8 = \frac{2}{2b + a} \left[\frac{k'_3 h}{2} + k_7 h_{ib} - k'_2 \ (a + 2b - 3e) \ \right];$$

$$k''_8 = \frac{2k_2 \ (a + 2b - 3e)}{2b + a},$$

$$k'''_8 = \frac{2}{2b + a} \left[\frac{k''_3 h}{2} + k'_7 h_{ib} - k''_2 \ (a + 2b - 3e) \right];$$

ε_1 — factor unitar ce ține seama de poziția punctului de suspendare pe boghiu față de sensul de mers; $\varepsilon_1 = -1$ pentru boghiul din față, $\varepsilon_1 = +1$ pentru boghiul din spate;

— în punctul B,

$$X_B = \varepsilon_2 \left(k_9 v^2 + k'_9 \frac{dv}{dt} - k''_9 F_{om} + k'''_9 \right), \tag{16}$$

unde:

$$k_9 = k_8;$$

$$k'_9 = \frac{2}{2b + a} \left[\frac{k'_3 h}{2} + k_7 h_{ib} - k'_2 \left(\frac{a}{2} + b - 3e \right) \right];$$

$$k''_9 = \frac{k_2 \ (a + 2b - 6e)}{2b + a};$$

$$k'''_9 = \frac{2}{2b + a} \left[\frac{k''_3 h}{2} + k'_7 h_{ib} - k''_2 \left(\frac{a}{2} + b - 3e \right) \right];$$

ε_2 — coeficient unitar ce ține seama de poziția punctului de sprijin pe boghiu față de sensul de mers; $\varepsilon_2 = +1$ — pentru boghiul din față; $\varepsilon_2 = -1$ pentru boghiul din spate.

Forța X_A acționînd în punctul de suspendare rezultat din suspensiile a două osii se va repartiza în mod egal pe acestea.

5. Variația de sarcină rezultantă pe osie

Variația de sarcină rezultantă pe osie rezultă din însumarea algebrică a variațiilor de sarcină parțiale determinate în parg. 2, 3 și 4. Astfel:

— pentru osiile 1 și 2,

$$\Delta Q_{1,2} = -\left(T_0 + \frac{C_A}{2} + \frac{X_A}{2}\right) = -$$

$$-\left(k_{10}F_{om} + k'_{10}v^2 + k''_{10}\frac{dv}{dt} + k'''_{10}\right), \tag{17}$$

unde:

$$k_{10} = \frac{1}{2}(2k_2 - k''_8); \quad k'_{10} = \frac{1}{2}(k_5 + k_8);$$

$$k''_{10} = \frac{1}{2}(2k'_2 + k'_5 + k'_8); \quad k'''_{10} = \frac{1}{2}(2k''_2 + k''_5 + k'''_8);$$

— pentru osia 3,

$$\Delta Q_3 = T_0 - C_B - X_B = k_{11}F_{om} - k'_{11}v^2 + k''_{11}\frac{dv}{dt} - k'''_{11}, \tag{18}$$

unde:

$$k_{11} = k_2 + k''_9; \quad k'_{11} = k_6 - k_9;$$

$$k''_{11} = k'_2 - k'_6 + k'_9; \quad k'''_{11} = k''_2 + k''_6 - k''_9;$$

— pentru osia 4,

$$\Delta Q_4 = -\Delta Q_3; \tag{19}$$

— pentru osiile 5 și 6,

$$\Delta Q_{5,6} = -\Delta Q_{1,2}. \tag{20}$$

6. Concluzii

Sub aspect cantitativ, relațiile (17) — (20) scot în evidență faptul că:

— osiile 1 și 2 se descarcă, iar osiile 5 și 6 se încarcă, față de sarcina statică cu $\Delta Q_{1\,2}$;

— osia 3 se descarcă, iar osia 4 se încarcă cu ΔQ_3.

Sub aspect calitativ, aceleași relații arată că variațiile de sarcină pe osii sînt influențate de forța de tracțiune la obadă și parametrii construc-

tivi ai locomotivei, viteza de circulație, accelerația, declivitatea pe care se demarează și tonajul trenului. De aci rezultă că metoda prezentată permite să se stabilească legătura variației de sarcină pe osie nu numai cu parametrii constructivi ai locomotivei și cu forța ei de tracțiune ci și cu greutatea convoiului de vehicule efectiv remorcate de locomotivă, viteza de circulație, declivitatea profilului liniei pe care trenul circulă, accelerația de mișcare a trenului.

Metoda permite totodată să se analizeze influența separată a cabrajului cutiei locomotivei și cabrajului boghiului asupra sarcinilor pe osii.

Relațiile obținute dau posibilitatea să se cerceteze problema utilizării greutății aderente a locomotivei în cazul unei legi date de variație a accelerației la demarare. Deasemenea, ele constituie relații de bază în cercetarea problemei automatizării demarajului, în sensul stabilirii legii optime de variație a forței de tracțiune și a accelerației la demarare.

Catedra de material rulant
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București.

BIBLIOGRAFIE

1. *Bossier Alfred* — Achsdruckänderungen bei elektrischen Lokomotiven mit Einzelachsantrieb. Deutsche Eisenbahntechnik Nr. 2, 1956.
2. *Muller Paul* — Elektrische Fahrzeugantrieb. Grundzüge der theorie und Berechnung. Munchen R. Oldenbourg, 1960
3. *Zăgănescu, I* și *Hoancă, V.* — Utilizarea greutății de aderență la locomotivele diesel-electrice cu referire specială la locomotivele CFR 060—DA. Buletinul științific și tehnic al Institutului politehnic Timișoara. Tom. 9 (23), 1964.
4. *Borgeaud Gaston* — Achslanständerungen infolge Zugkraft an Locomotiven mit zwei Triebgestellen.
5. *Minov*, D. K. — Povîșenie tiagovîh svoistv electrovozov i teplovozov s electricescoi peredacei. Izdatelstvo „Transport" — Moscva, 1965.

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele şi iniţialele de prenume ale autorului, titlul şi volumul lucrării. editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40 820

Tiparul executat la Întreprinderea Poligrafică „Informaţia" c. 2173

1973 AUG 1 0

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV NUMĂRUL 2 ANUL 1973,
MARTIE – APRILIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодиуеских журналов „Bulletin de Mathèmatiques et de Physique pures et appliquèes и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel q'il se présente, il refléte en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'instiut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXXV—NUMĂRUL 2

MARTIE — APRILIE

1 9 7 3

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. ing. *Petru Baltă*; Prof.dr. docent ing. *George Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua*; Conf. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific); Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu*; Prof. ing. *Ștefan Mantea*; Prof. dr. ing. *Marius Preda*; Prof. ing. *Mihai Renert*; Conf. dr. ing. *Mircea Soare*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*.

Redactor responsabil

Rector

Prof. dr. docent *Radu Voinea*

membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

C. Radu

Dependența tensiune — deformație pentru materialele polimere cristaline 21

C. Bucur

Formula de aproximare de tip interpolativ pentru funcții discontinue . . . 29

FIZICA

G. C. Moisil

Reciprocitatea potențialului electric și a conductivității în medii neomogene în regim staționar 33

Cornelia Moțoc, G. Teodorescu, Gabriela Cone

Efecte de iradiere pe cristalele de fosfat monoacid de amoniu 37

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

F. M. Albert

Despre calculul formulelor moleculare ale substanțelor organice din masa moleculară și din rezultatele analizei funcționale 43

I. Drimuș, I. Iliuță,

Naphthenic Nitriles and Naphthenic Amines 51

Silvia Daneș, F. Daneș

Ioniți lichizi — considerații fizico-chimice asupra utilizării în tehnologia chimică 59

MECANICA

N. I. Pandrea

O metodă grafică generală pentru analiza cinematică a mecanismelor plane 65

I. Roșca

Studiul deplasărilor într-un cilindru solicitat de un cîmp de temperaturi axial simetric 79

MECANICA FINĂ

T. Demian, E. Curatu, D. Tudor

Sinteza mecanismelor de amplificare cu pîrghii din aparatele de măsură cu sensibilitate în trepte 83

AVIAȚIE

C. Guță

Unele probleme ale dirijării navelor cosmice la reintrarea în atmosferă . . 91

REZISTENȚA MATERIALELOR

M. Renert, V. V. Jinescu, G. Nucă, V. Chiriac, E. Fischer, D. Flondor

Solicitări în zonele reazemelor laterale ale recipientelor cilindrice verticale . 99

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

N. Apostolescu, B. Grünwald

The Estimation of the Gas Temperature Within the Cylinder of a Compression Ignition Engine 111

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

I. Gheghea

Calculul pierderilor volumice prin fante inter-ovale subțiri cu ovalitate mică la curgerea în direcție tangențială 121

AUTOMATICA

A. Petrescu

Model electric pentru studiul unor probleme de tracțiune electrică 131

MANAGEMENT

Al. Popa, A. Carabulea

Contributions to the Study of the Operational Duty Optimizing of the Electric Traction 141

Резюме

Д.К. 517.5

К. Раду

Зависимость напряжения — деформация, для полимерно-кристаллических материалов.

В работе указана функциональная зависимость между напряжением и деформацией для полимерно-кристалических тел аналогичная предложенной Б. Колеманом зависимости (3) длу больших деформацией.

Указывается, что в диабатическом и реверрсивном процессе закон $P(\varepsilon\rho)=U(\varepsilon)$, в котором $P(\varepsilon)=W(\varepsilon)$ является полной энергией, а $U(\varepsilon)$ является внутренней энергией не может быть полученным из уравнения сохранности, в которое входит внутренняя энергия; для его получения строится другая форма уравениясохранности (консервации).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Nr. 3/1973

Д.К. 517

К. Букур

Формула приближения интерполяционного типа для прерывистых функций

Определяется частично — полиноминальное приближение интерполяционного типа, имеющее одинаковое поведение с данной функцией в точках прерывистости.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

Д.К. 537.213

Г. К. Моисил

Взаимная связь электрического потенциала и проводимости в неоднородных средах в стационарном режиме.

Проводящей, линейной, изотропной, неоднородной средой проводимости считается среда $\sigma_{(X,Y,Z)}$ в которой система стационарных источников определяет электрический потенциал... $V_{(X,Y,Z)}$.

Указывается, что этой среде можно уподобить двойственную среду с проводимостью $\sigma_{(x,y,z)}\equiv V_{(x,y,z)}$ в которой выгодно выбранная система источников объемной плотности определяет потенциал $V_{(x,y,z)} \equiv \sigma_{(x,y,z)}$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Nr. 3/1973

Д.К. 539.16

К. Моцок, Г. Теодореску, Г. Коне

Эффелты облучения электронами на кристаллах монокислотного фосфата аммония.

Изучаются моноструктурные изменения в монокислотном фосфате аммония, облученного электронами с энергией 60 Kv. Указывается, что одни из вызванных дефектов сходственны с дефектами, в стречаемыми в щелочных галогенах, облученных электронами или тяжелыми частицами. Эффект местного нагрева, вызванный электронным пучком, обсуждается, так как вместе с другими механизмами он отвечает за появление дефектов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Nr. 3/1973

Summary

D.C. 517.5

C. Radu

The Dependence Stress Strain in for the Polymer Crystaline Material

In the paper we can find a functional dependence between stress and strain for the polymer crystaline similar to dependence proposed by B.Coleman [3] for big stvains.

It is shown that in the adiabatice and veritible processes the law

$$P\{\varepsilon\} = \rho U\{\varepsilon\}$$

In which $P\{\varepsilon\} = w\{\varepsilon\}$ is the total energy and $U\{\varepsilon\}$ is the internal energy it cannot be obtained from the ecuation of conservation in which it's included the internal energy for it obtaining another from of the ecuation of conservation is built.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 517

C. Bucur

Approximation Formula of Interpolated Type for Discontinuous Functions

A partially polynomial approximation of interpolated type having the same behaviour as the function given in the discontinuity points is determined.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 537.213

G. C. Moisil

Reciprocity of the Electric Potential and of the Conductivity in Inhomogeneous Media in Steady-state Condition

We consider a conducting, lineary, isotropic and inhomogeneous medium of the conductivity $\sigma(x, y, z)$ where a system of stationary sources are determining the electric potential $V(x, y, z)$. We attach to this medium a dual medium of the conductivity $\sigma(x, y, z) \equiv V(x, y, z)$ where a system of sources of szuitably selected volumetric density determines a potential $V(x, y, z) \equiv \sigma(x, y, z)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 539.16

C. Moţoc, G. Teodorescu, G. Cone

Radiation Effects on Ammonium Dihydrogen Phosphate by Electron Irradiation

Microstructural changes in ammonium dihydrogen phosphate irradiated with electrons of energy ~60 keV are examined. It is shown that some of the induced defects are similar to those encountered in alkali halides irradiated with electrons or heavy particles. The effect of local heating due to the electron beam is discussed in order to account altogether with other mechanisms for the induced defects.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 547.1

Фр. Алберт

Растет молекулярных формул орланических соединений цо молекулярным весам и по функционфльному анализу

В работе показано, гто все углеводороды можно предетавиты единой общей формулой $C_nH_{2n+\alpha}$, где $\alpha = 2,0,-2,-4,\ldots-2n$ и определяет класс г углеводорода. Еслеи известен молекулярный вес M, можно рассдитать n и α, прн помощи выражения $n = (M-\alpha)/14$.

Для функциональных производных можно преставить единую общую формулу $C_nH_{2n+\alpha-\beta}F'_{\gamma_1}F''_{\gamma_2}\ldots F^m_{\gamma_n}$ где F^i функции, γ_i функциональные показатели, ыражающие исло функций, а H исло замещенных атомов водорова.

Можно рассдитать n и α, при помощи выражения $n = (M - -\alpha+\beta-\Sigma\gamma_iM_i/14)$ где M_i массы функциональных групп.

Если можно калидественно определить функцональные группы и если погрешность определения молекуляриого веса $\Sigma>1$, можно рассдитать молекулярную формулу соединения и, в некаторых слудаях избежать элемэнтарный анализ.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 547.654.1

И. Дримущ, И. Илиуце

Нафетновые нитрилы и нафтеновые амины

В начале статьи дается обзор работ, посвященных синтезу нафтеновых нитрилов, затем описываются работы проведенные авторами по синтезу нафтеновых нитрилов из румынских нафтеновых кислот на опытной установке. Условия работы: температура 250—320°С, давление — атмосферное. Аммонолиз тяжелых фракций протекает без катализатора, а легкие фракции пропускаются над катализатором $Ал^1O_3$ при 350°С. Выход продукта 95%.

Подчеркивается, что жирные амины (полученные из природных или синтетических жирных кислот) дают био-деградируемые продукты, между тем как продукты, получаюшиеся из нафтеновых аминов не поддаются биологическому разложению.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 541.1:66

С. Данеш, Ф. Данеш

Жидкие иониты. Физико-химические основы технологического применения.

В работе представлены свойства применения жидких ионотов в технологических процессах отделения, в зависимости от структуры ионитов, применяемого растворителя, концентрации органической фазы и рода водяных газов.

Указываются условия, в которых имеет место появление некоторых эмульсий и новых фаз, а также и возможности избежания этого явления. Обсуждается применимость жидких ионотов при отделениях, в свете степени ассоциации в органичексой фазе селективности экстракции, объеммной способности обмена и других физико-химических характеристик изучаемой системы.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 621—52

А. Петреску

Электрическая модель для изучения некоторых вопросов тяги.

В работе представлен оригинальный аналоговый механизм расчета, который может быть применен при проектировании и в эксплуатации электрических линий железнодорожной тяги.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 547.1

Fr. Albeft

The Calculation of Molecular Formulas from the Molecular weight and the Functional Analysis.

It is shown that all hydrocarbons may be represented by a general, unique formula $C_nH_{2n+\alpha}$ where $\alpha = 2{,}0 - 2, -4, \cdots -2n$ and determines the hydrocarbon. class If the molecular weight M is known n and α can be calculated from the relation : $n = (M - \alpha)/14 = N/14$.

For functional derivatives a general, unique formula of the form $C_nH_{2n+\alpha-\beta}F'_{\gamma_1}F''_{\gamma_2}\cdots F^n_{\gamma_n}$ may be written, where F^i are the functions γ_i are the functional indexes, representing the number of functions and β is the number of substituted H atoms.

The values n and α can be calculated from the relation : $n = (M - \alpha + \beta - \Sigma\gamma_i M_i)/14$ where M_i are the weights of the functional groups.

If the functional groups can be quantetively determined and if the error of molecular weight determination is $\varepsilon < 1$, the molecular formula of the combination can be calculated avoiding sometimes the elementar analysis.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej, Bucureşti Nr. 3/1973

D.C. 547.654.1

I. Drimuş, I. Iliuţă

Naphthenic Nitriles and Naphthenic Amines

A survey of the works treating of the naphthenic nitrile synthesis is made, then the works of the authors concerning the naphthenic nitrile synthesis from Romanian naphthenic acids are described. In a pilot plant, batchwise, under the following conditions : 250 — 320°C, atmospheric pressure, the heavy fractions are subjected to ammonolysis without a catalyst, and the light fractions are passed over a Al_2O_3 catalyst at 350°C, obtaining a 95% yield.

It is pointed out that the fatty amines (obtained from natural and synthetic fatty acids) give products that can be biologically degraded, while the products obtained from naphthenic amines are not biologically degradable.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.C. 541.1:66

S. Daneş, F. Daneş

Liquid Ionites. Physico-chemical Bases for Technological Application

The particularities of using liquid ionites in the separation operating processes is exhibited in terms of the ionite structure, solvent used, concentration of the organic phase and nature of the aqueous phase. Conditions are shown where the appearance of some emulsions and of the new phases and the possibilities of avoiding this phenomenon are shown. The liquid ionites applicability to separations is discussed in the light of the degree of associations in the orgaanic phase, of the extraction selectivity, of the volumetric exchange capacity and of the other physico-chemical characteristics of the investigated systems.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.C. 621—52

A. Petrescu

Electrical Model for the Study of Some Traction Problems

An original computation analogic device, which may be used in designing and operating of railroad traction electric lines, is presented in this paper.

Bul. Inst. politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

Д.К. 621—23

Н. Пандря

Графический общий метод кинематического анализа плоски механизмов.

В настоящей работе излагается прямой общий графический метод, для кинематического анализа плоских механизмов,

Метод состоит из графического решения системы уравнений предрисанных условий для всех независимых циклов механизма.

Практическая метода работы указана в примерах в последней части работы.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

Д.К. 681.2

И. Рошка

Изучение перемещения цилиндра под влиянием осевого симметричного температурного поля.

Настоящая работа является продолжением предыдущих работ автора, указанных в библиографии и представляет численое определение перемещений в одном цилиндре под влиянием осевого, симметричного температурного поля, при отсутствии механических поверхностных нагрузок. Работа выделяет влияние крайних частей цулиндра на его деформацию.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3 /1973

Д.К. 621=75

Т. Демиан, Е. Курату, Д. Тудор

Синтез механизмов усиления с рычагами в конструкции аппаратов измерения со ступенчатой чувствительностью.

В работе, впервые в литературе по специальности, представлен приближенный метод вычисления усилительных механизмов с рычагами со ступенчатой чувствительностью.

Обращаясь к конструкторам аппаратов, работа приводит большое количество вариантов вычислений. Кроме того анализируются преимущества и недостатки различных возможных конструктивных решений.

Окончательные выводы позволяют проектировщикам аппаратов выбрать в короткое время оптимальное решение механизмов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

Д.К. 629.13

К. Гуцэ

Некоторые вопросы управления космических кораблей при возвращении в воздушную атмосферу

В работе определяются величины характерные процессу управления используя функцию X, определённую выражением (19). Здесь же представлмяется единный метод расчёта.

Решение установленных уравнений (37—41) и (43) (45) производится аналитически или же применением электронной техники расчета.

Таким образом можно определить касательное ускорение, позиционный угол, изменение плотности воздуха или израсходоввнное время на опрезка списка.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.C. 621—23

N. Pandrea

A General Graphic Method for the Kinetic Analysis of Plane Mecanisms

This paper exposes a new general graphic method for the direct kinetic analysis of plane mechanisms.

The method consists in the graphic solutioning of the condition equation system written for all the mechanism independent cycle.

The practical working manner is shown in the applications at the paper final part.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 681.2

I. Roşca

Study of the Shifts in a Cylinder where an Axially Symmetric Temperature Field is Applied

This work is continuing the previous papers of the author listed in the bibliography and deals with the numerical determination of the shiftings in a cylinder where the stress of an axially symmetric temperature field is applied in the absence of the surface mechanical loads. This paper emphasizes the influence of the cylinder extremities on its strains.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 621.75

T. Demian, E. Curatu, D. Tudor

Synthesis of Liver Amplification Mechanisms used in Measuring Apparatuses Having Step Sensitivity

This paper presents for the first time in the speciality literature a general analytical method and a approximate calculation method for lever amplification mechanisms having step sensitivity.

It is to be used by apparatus designer presenting a great number of computation variants.

There were analysed as well the advantages and disadvantages of different constructive possibilities.

The final condusions permit to the designer to choose in shortest time the optimum solution.

Bul. Inst. politehnic„Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 629.13

G. Guţă

Some Problems Regarding the Spacecraft Control on Reentering the Atmosfere

The work determines the characteristic magnitudes of the control process by using the x function defined by the (19) expression.

The author advances a unique method of calculus.

The set equations (37—41) and (43) (45) are either analytically solved or by resorting to the electronical tecnique of calculus.

Thus, the tangential acceleration, the positional angle, the variation of air density or the time spent on the descending segment, may be determined.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 620.1

Ренерт М., и колектив

Напряжение в зонах боковых опер вертикальных цилиндрических сдеудов.

Теорепшчески и экспериментально расематриваейся еффект дискретного числа боковых опор, на напряжённое состояние в стене вертикального цилиндрилеского сосуда.

Теортичес кие результаты были проверены экспериментальными даными палученными электротенсометригескими измерниями на моделях ис полненых на сокращеном масштабе. В иду облегчения расчоте состояния нипряжения, был разработан для Э В М програм которвт позволил определенис максимального напряжения на цилиндригеской стене.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 621.43.016

У. Апостолеску, Б. Грунвалд

Оценка температуры газов в цилиндре двигателя с зажиганием посредством сжатия.

В работе реально устанавливается уровень температуры газов, сжигаемых в цилиндре двигателя с зажиганием методом сжатия, посредством термического дифференцирования рабочей жидкости на основе двухзональной модели сгорания.

Вычисления показывают, что почти половина массы сгоревших газов, в начале сгорания имели температуру на 400—500°К большую чем пиковая температура, определенная классическим методом, на основе уравнения состояния. Результаты вычислений сравниваются с экспериментальными данными. В заключении приводится новое выражение производства механической работы в цилиндре двигателя во время сгорания.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 621.9

И. Гегя.

Расчет объемных потерь через узкие внутриовальные трещины небольшой овальности на течение в тангенсном направлении.

В работе выведены соотношения для расчета потерь жидкости через скважины овальные внутри небольшой овальности на пластинчатое течение в тангенсном направлении. На основе цифровых расчетов, проделанных электронным калькулятором, набросаны графиии вариаций обьемных потерь в случае эксцентричности, овальности и длины скважины.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

Д.К. 621.33

А. Попа А. Караб уля

К оптимальному изучению электрической тяги методами операционального исследования

Представлены математические модели и логическая схема с целью оптимального изучения электрической тяги посредством методов операционального исследования.

Соображенный алгоритм позволяет учесть все затраты, вызланные применением операционального исследования и изучению оптимизации электрической тяги и облевчает уточнение структуры себестоимости исследовательских работ, работ проэктирования, монтажа эксплуатации и развития осуществляемых обуектов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.C. 620.1

M. Renert, V. V. Jinescu, G. Nucă, V. Chiriac, E. Fischer, D. Flondor

Stresses and Strains in Laterally Supported Vertical Cylindrical Pressure Vessels

The effects of a discrete number of lateral supports, concerning the state of stresses and strains in the wall of the vessel, are theoretically evaluated. By using resistive strain gauges, the computed values were checked with those measured and a correlation coefficients established.

A computer program, involving a strategy for the research of the maximum stresses in the wall, was also established.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.C.621.43.016

N. Apostolescu, B. Grünwald

The Estimation of the Gas Temperature within the Cylinder of a Compression Ignition Engine

In this paper a realistic view of the temperature level of the burned gases in the cylinder of a compression ignition engine is obtained by thermal differentiation of the working gases based on a two space model of combustion.

The calculations show that almost one half of the amount of the burned gases have, at the beginuing of the combustion, a 400 — 500°K greater temperature than the peak determined by the classical method, based on the state equation

The calculation results are compared to experimental data Finally, a new interpretation of the process of producing mechanical work in the engine cylinder, during the combustion is given .

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej "Bucureşti Nr. 3/1973

D.C. 621.9

I. Gheghea

The Computation of Volumetric Losses Through thin Inter-oval Slits of Smal Ovality in the Flow in Tangential Direction

In this paper are deduces the relations for computing the losses of fluids through small-ovality inter-oval slits in the laminar flow, in tangential direction. On the basis of the digital calculations carried out with a computer, diagrams of volumetric-loss variations interms of slit length eccentricity and ovality, are plotted.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.C. 621.33

Al. Popa, A. Carabulea

Contributions to the Study of the Operational Duty Optimizing of the Electric Traction

The present paper tries to present the mathematic models, taking account of the whole range of expenses during the design-construction-mounting and wosking cycle of the electric traction.

The algorithm conceived and tested on a calculus exemple, basis starts from a series of inedited premises concerning all the expenses for the railway electrification consideration and provides the design and operating practice by neu means of investigation the field of the technico-economic optimization at the lever of scientific research and the achieving of the new goals by mathematic simulation and digital computers utilization.

Bul. Inst. politehnic .„Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti Nr. 3/1973

Résumé

C.D. 517.5

C. Radu

Dépendance tension-déformation pour les matériaux polymeres cristallins

On trouve dans ce travail une dépendance fonctionnelle entre la tension et la déformation pour les corps polymères cristallins, analogue à la dépendance proposée par B. Coleman [3] pour de grandes déformations. On montre que, dans les processus adiabatiques et réversibles, la loi

$$P(\varepsilon) = \rho U(\varepsilon).$$

où $P(\varepsilon) = W(\varepsilon)$ est l'énergie totale et $U(\varepsilon)$ est l'energie interne, ne peut pas être obtenue à partir de l'équation de conservation dans laquelle entre l'énergie interne pour l'obtenir, on construit une autre forme de l'équation de conservation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 517

C. Bucur

Formule d'approximation de type d'interpolation pour fonctions discontinues

On détermine une approximation partiellement polynominale de type d'interpolation, dont le comportament est le même que celui de la fonction donnée dans les points de discontinuité.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 537.213

G. C. Moisil

Reciprocite du potentiel electrique et de la conductivite en milieux non-homogenes en regime stationnaire

On considére un milieu conducteur, linéaire, isotrope en non-homogène, de conductivité σ ($(x.\ y,\ z)$, dans lequel un systhème de sources stationnaires détermine le potentiel électrique $V(x,\ y,\ z)$. On montre qu'on peut associer à ce milieu un milieu double, de conductivité $\sigma(x,\ y,\ z) \equiv V(x,\ y,\ z)$ dans lequel un système de sources de densité volumétrique convenablement choisie détermine un potentiel $V(x,\ y,\ z) \equiv \sigma(x,\ y,\ z)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 539.16

C. Moţoc, G. Teodorescu, G. Cone

Effets d'irradiation a electrons sur des cristaux de phosphate monoacide d'ammonium

Les auteurs étudient les modifications microstructurelles dans le phosphate monoacide d'ammonium irradié avec des électrons à énergie de 60 keV. Ils montrent que quelques und des défauts induits ressemblent à ceux qu'on peut rencontrer dans les halogénures alcalines irradiés avec des électrons ou des particules lourdes. L'effet de l'échauffement dû au fascicule électronique est mis en discussions, car, en même temps que les autres mécanismes, il est responsable de la production des défauts.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

Zusammenfassung

D.K. 517.5

C. Radu

Spannung Déformationsabhängigkeit für polymerkristalline Materialien

Im Aufsatz wird für polymer-kriszalline Materialien eine funktionelle Abhängigkeit zwischen Spannung und Deformation, ähnlich mit der von B. Coleman [3] für grössere Deformationen vorgeschlagenen Abhängigkeit, festgestellt.

Es wird gezeigt, dass in adiabatischen und reversiblen Prozessen das Gestz $P\{\varepsilon\}=\rho U\{\varepsilon\}$
wo $P(E) = W(\varepsilon)$ die Gesamtenergie und $U(\varepsilon)$ die innere Energie bedeuten, nicht aus der Konservierungsgleichung, die in die innere Energie eingeht, erhalten werden kann; für dessen Erhalten wird eine andere Form der Konservierungshleichung aufgebaut.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 517

C. Bucur

Approximationsformel vom Interpolativen Typ für diskontinuerlichen Funktionen

Es wird eine teilweise-polynomialischer Approximation des Interpolations-Types bestimmt, die mit der gegebenen Funktion in diskontinuerlichen Punkten dieselbe Haltung besitzt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 537.213

G. C. Moisil

Wechselseitigkeit zwischen electrischen Potential und leitungsfahigkeit in inhomogenes Medium in beständiges Regime

Es wird ein leitungfähiges, lineares, isotropisches und inhomogenes Medium $\sigma(x, y, z)$ angenommen, in das ein System von beständigen Quellen das elektrische Potential $V(x, y, z)$ bestimmt. Es wird gezeigt, dass diesem medium ein duales Medium zugeführt werden kann, mit einer Leitungsfähigkeit $\sigma(x, y, z) = V(x, y, z)$ in das ein System von Quellen mit einer passend-gewählten volumischen Dichtigkeit das Potential $V(x, y, z) = \sigma(x, y, z)$ bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 539.16

C. Motoc, G. Teodorescu, G. Cone

Strahlungswirkungen mit Elektronen auf kristallen aus Ammoniummonosaurephosphat

Es werden die mikrostrukturelle Anderung des Ammoniummonosäurephosphates die durch Bestrahlung mit Elektronen mit einer Energie von 60 keV entstehen, geprüft. Es wird gezeigt, dass einige Induktionsfehler ähnlich derer die durch schwere Punkten bestrahlenen alkalinische Haloiden, sind. In Zusammenhang wird auch die durch elektronische Bündel entstandenen lokale Erwärmungswirkung besprochen, da diese samt mit anderen Mechanismen verantwortlich für das Defektionsentstehen ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Nr. 2/1973

C.D. 541.1:66

S. Daneş Fl. Daneş

Exchangeurs d'ions liquids. Bases physico-chimiques de l'applicationtechniques

On présente les particularités de l'utilisation des ionites liquids dans les processus technologiques de separation, en fonction de la structure des échangeurs d'ions, du solvent employé de la concentration en phase organique et de la nature de la phase aqueouse. On montre les conditions de l'apparition des emulsions et des nouvelles phases et les possibilités d'éviter ce phenomène. On discute l'applicabilité des échangeurs d'ions liquids dans les séparations, en tenant compte du degré d'association en phase organique, de la sélectivité, de la capacité volumaire d'échange et des autres caractéristiques physico-chimiques des sistemes étudiés.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 547.1

Fr. Albert

Sur le mode de calculer les formules moléculaires des composés organiques à base du poids moléculaires et de l'analyse fonnctionnelle

On peut représenter toutes les hidrocarbures par un formule générale unique $C_nH_{2n+\alpha}$ ou $\alpha = 2,0,-2,\cdots-2n$. Si on connait le poids moléculaire M on peut calculer n et α avec la relation $n = (M-\alpha)/14$.

Pour les dérivés fonctionnels on peut écrir la formule générale unique $C_nH_{2n+\alpha-\beta}F'_{\lambda_1}F''_{\gamma_2}\cdots F^n_{\gamma_n}$ ou F^i sont des fonctions monovalentes. γ_i est le nombre des fonctions et β le nombre des atomes de hydrogène substitués. On peut calculer n et α avec la relation $n = (M-\alpha+\beta-\Sigma\gamma_i\mu_i)/14$ ou M_i sont les poids des groupes fonctionnels.

Si l'analyse cantitative des groupes fonctionnels est possible et si l'erreur de déterminaison du poids moléculaire et $\varepsilon < 11$, on peut établier la fomule moleculaire de la substance et quelquefois on peut éviter l'analyse élémentaire.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 547.654.1

I. Drimuş, I. Iliuţă,

Nitrilles naphthéniques et amines naphthéniques

On passe en revue les ouvrages traitant de la synthèse des nitriles naphthéniques, puis on décrit les travaux des auteurs concernant la synthèse des nitriles naphténiques en partant d'acides naphténiques roumains. Dans une installation pilote, discontinue, dans les conditions suivantes : température 250 à 320°C, pression atmosphérique, les fractions lourdes sont soumises à l'ammonolyse sans catalyseur, et les fractions légères sont passées sur un catalyseur d'Al_2O_3 à 350°C, en obtenant un rendement de 95%.

On souligne le fait que les amines des acides gras (obtenues à partir d'acides gras naturels ou synthétiques) donnent des produits qui peuvent être dégradés biologiquement, tandis que les produits obtenus à partir des amines naphthéniques ne subissent pas la dégradation biologique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 621–52

A. Petrescu

Modéle électrique pour l'étude de certains problèmes de traction

Dans cet ouvrage on présente un dispositif analogique de calcul, original, qui peut etre utilisé pour le projet et l'exploitation des lignes électriques de traction féroviale.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 541.1:66

S. Daneş, Fl. Daneş

Flüssige Ionenaustauscher Physikalisch-chemische Grundlagen der technischen Anwendung

Die Eigentümlichkeiten der Anwendung von flüssigen Ionenaustauschern in technischen Trennungsverfahren werden in Abhängigkeit von der Ionitstruktur, dem Lösungsmittel, der Konzentration in organischer Phase und der Art der wässrigen Phase vorgestellt. Die Bedingungen der Entstehung der Emulsionen und neuer Phasen werden angegeben, sowir die Möglichkeiten, diese Erscheinungen zu vermieiden. Die Anwendbarkeit der flüssigen Ionenaustaucher für Trennungen werden diskutiert, und dabei werden die Assoziierung in organischer Phase, die Selektivität, die volumare Austauschkapazität und andere phy siko-chemische Kennzeichen der untersuchten Systemen in Betracht gezogen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.K. 547.1

Fr. Albert

Über die Möglichkeit die Molekularformeln aus dem Molekulargewicht und der funktionellen Analyse zu berechnen

Ea wird gezeigt dass elle Kohlenwasserstoffe durch eine einzige allgemeine chemische Formel dargestellt werden können $C_nH_{2n+\alpha}$, wo $\alpha = 2{,}0 - 2{,}4, \cdots -2n$ und die Klasse des Kohlenwasserstoffs bestimmt, wenn das Molekulargewicht M bekannt ist, kann man n und α aus der Gleichung $n = (M - \alpha)/14$ berechnen.

Für die Funktionen enthaltenden organischen Verbindungen kann man eine allgemeine Formel schreiben, $C_nH_{2n+\alpha-\beta}F'_{\gamma_1}F''_{\gamma_2}\cdots F^{n}_{\gamma_n}$, wo F^i die Funktionen bedeuten, γ_i die funktionellen Indizes, die Zahl der Funktion und β die Zahl der substituierten Wasserstoffatome ist. Für Berechnung von n und α gilt die Gleichlng $n = (M - \alpha + \beta - \Sigma\gamma_i M_i)$ /14, wo M_i die Gewichte der Funktionen sind.

Wenn man die funktionellen Gruppen bestimmen kann und wenn die Abweichung bei der Molekulargewichtsbestimmung $\varepsilon < 1$ ist, kann man die Molekularformel der Verbindung berechnen und die Elementaranylyse kann in manchen Fällen ausfallen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.K. 547.654.1

I. Drimuş, I. Iliuţă,

Naphthensäurenitrile und Naphthensäureamine

Nach Übersicht der Literatur über die Synthese von Naphthensäurenitrilen, werden die Arbeiten der Autoren bezüglich der Synthese der Naphthensäurenitirle aus rumänischen Naphthensäuren beschrieben. In einer diskontinuierlichen Versuchsanlage, unter folgenden Bedingungen: Temperatur 250 — 320°C, atmosphärischer Druck, werden die schweren Fraktionen der Ammonlyse ohne Katalysator unterworfen, während die leichten Fraktionen über einen Al_2O_3-Katalysator bei 350°C geführt wer-.n, vobei eine 95% ige Ausbeute erreicht wird.

Die Tatsache wird betont, dass aus Fettsäureaminen (aus natürlichen oder synthetischen Fettsäuren erhalten) Produkte erzeugt werden, die biologisch abgebaut werden können, während die aus Naphthensäureaminen erhaltenen Produkte den biologischen Abbau nicht erleiden.

l. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.K. 621—52

A. Petrescu

Elektrisches Modell für Lösen einer Traktionsfrage

In Aufsatz wird eine originelle Einrichtung für analogische Berechnung dargestellt, die auch bei Entwicklungsarbeiten und Betrieb von elektrischen Linien für Zugbeförderung angewendet sein kann.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 621—23

N. Pandrea

Une méthode graphique générale pour l'analyse cinématique des mécanismes plans

On expose, dans le présent ouvrage, une nouvelle méthode graphique générale directe pour l'analyse cinématique des mécani smes plans.

La méthode réside dans la résolution graphique du système d'équations de condition, écritent pour tous les cycles indépendents du mécanisme.

La modalité pratique de travail est démontrée dans les applications de la partie finale de l'ouvrage.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 681.2

T. Demian, E. Curatu, D. Tudor

La synthèse des mécanismes avec amplification du leviers utilisées dans la construction des apparcelles des mésures avec sensibilité en escalier

Le travail represinte une de premières méthode, analytique et générale, comme dans la literature de specialité, et de même une méthode de calcul approximative pour les mécanismes avec amplification à leviers avec sensibilité en escalier.

Il s'adresse à constructeurs des appareilles, elle prezinte un grand nombre des variants des calculs.

On presente les avantages et les désavantages pour des différantes solutiones posibles.

Les conclusions permetent une choix rapide pour la solution optime du mécanisme.

Bul. Inst. politehnic ,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 621=75

I. Roşca

Étude des deplacements dans un cylindre sollicité par un champ de températures axialement symetrique

Ce travail est la suite des travaux antérieurs de l'auteur indiqués dans la bibliographie et présente la détermination numérique des déplacements dans un cylindre sollicité par un champ de températures axialement symétrique, en l'absence des chargements mécaniques sur la surface. L'ouvrage met en évidence l'influence des extrémités du cylindre sur ses déformations.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

C.D. 629.13

C. Guţă

Quelques problèmes de la direction des vaisseaux cosmiques à la rentrée dans l'atmosphère

Dans notre travail on détermine les grandeurs caractéristiques au procès de direction en employant la fonction X, définie dans l'expression (19). On présente une méthode unique de calcul.

La résolution des équations établies sous (37—41) et (43), (45) se fait analitiquement ou par l'application de la technique électronique de calcul.

C'est ainsi qu'on peut déterminer l'accélération tangentielle, l'angle de position, la variation de la densité de l'air ou le temps parcouru sur le segment de descente.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.K. 621—23

N. Pandrea

Allgemeines graphisches Verfahren für die kinematischen Analyse der ebenen Getriebe

In der gegenwärtigen Veröffentlichung wird ein neues, allgemeines, graphisches und, direktes Verfahren für die kinematische Analyse der ebenen Getriebe vorgestellt.

Das Verfahren besteht aus der graphischen Lösung des Systems von Bedingungsgleichungen, welche für alle unabhängigen Zyklen des Getriebes geschrieben wurden.

Die praktische Arbeitsmethode wird durch Anwendungsbeispiele, die im letzten Teil des Schreibens zu finden sind, erklärt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 681.2

T. Demian, E. Curatu, D. Tudor

Synthese von Mechanismen mit Hebelmultiplikation die in bau von messgeraten mit Stufenempfindlechkeit verwendte werden

Die Arbeitbehandelt, zum ersten male in der Fachliteratur, eine allgemeine analytische Methode und eine ungefähre Berechnunsmethode der Mechanismen mit Hebelmultiplikation mit Stufenempfindlichkeit.

Sie wendet pich an Gerätekonstrukteure, da sie eine grosse Zahl von Berechnungsvarianten umfasst.

Es werden auch die Vor-und Nachteile, der verschiedenen, möglichen konstruktionen Lösungen untersucht.

Die Schlussfolgerungen gestatten den Projektanten eine rasche wahl der optimalen Lösung des Mechanismus.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 621=75

I. Rosca

Studium uber die Verstellungen in einem Zylinder das von einem Axialsymetrischen Temperaturfeld angesprochen ist

Der Aufsatz ist eine Fortsetzung der in der Bibliographie aufgezeichneten Arbeiten des Verfassers und stellt die numerische Bestimmung der Verstellungen in einem Zylinder das von einer axial-symetrischen Belastung auf der Fläche angesprochen ist, dar. Der Aufsatz hebt den Einfluss der Zylinderenden auf derer Deformation, hervor.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 629.13

C. Guţă

Einige Probleme der Leitung der Raumschiffe beim Eingang in die Atmosphäre

In der Arbeit werden die charakteristischen Grössen des Leitungsprozesses bestimmt, indem man die Funktion X, die im Ausdruck (19) definiert ist, gebraucht. Es wird eine Einzelrechenmethode dargestellt, Die Lösung der festgestellten Gleichungen (37—41) und (43), (45) wird analytisch oder durch den Gebrauch der elektronischen Rechentechnik ausgeführt.

So kann man die tangentiale Beschleunigung, den Lagewinkel, die Schwankung der Luftdensität oder die aif Niederführungsstrecke zurückgelegte Zeit bestimmen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 621.9

I. Gheghea

Le calcul des pertes de volume par fentes inter-ovales minces a ovalite reduite pour l'ecoulement en direction tangentialle

Dans cet ouvrage en déduit les relations pour le calcul des pertes fuites de liquide par fentes inter-ovales à ovalité réduite pour l'écoulement laminé en direction tangetielle. Sur la base des calculs numériques effectués sur le calculateur électronique on trasse des graphiques de variation des pertes de volume en fonction de l'excentricité, de l'ovalité et de la longueur de la fente.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 620.1

M. Renert, V. V. Jinescu, G. Nucă, V. Chiriac, E. Fischer, D. Flondor

Contraintes et deformations dans les parois cylindriques des réeipients sous pressions, munies de supports latéraux

L'état des contraintes et des déformations dans la paroi cylindrique à supports latéraux en nombre discret, est étudiée théoriquement. Les valeurs des déformations, calculées pour un modéle à échelle réduite sont comparées à celles mesurées à l'aide de gauges résistives. Un coefficient de correction est déduit.

Un programme pour calculateur est établi, comprenant une stratégie pour la recherche des contraintes maximum dans la paroi.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 621.43.016

N. Apostolescu, B. Grünwald

Evaluation de la température des gaz à l'intérieur du cylindre d'un moteur à allumage par compression

Dans ce travail, les auteurs déterminent d'une manière plus réaliste le niveau de température des gaz brûlés dans le cylindre d'un moteur à allumage par compression par la différentiation thermique du fluide moteur à base d'un modèle bizonal de combustion. Les calculs montrent que près de la moitié de la masse des gaz brûles se trouve au début de la combustion à une température de 400 — 500 °K plus élevée que la pointe de température déterminée selon la méthode classique à base de l'équation d'état. Les résultats des calculs sont comparés aux données expérimentales. On donne à la fin une nouvelle interprétation du processus de production du travail mécanique dans le cylindre du moteur dans la période de combustion.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

C.D. 621.33

Al. Popa A. Carabulea

Contributions à l'étude optimale de la traction électrique par des méthodes de recherche opérationnelle

L'on présente des méthodes mathematiques et le schema logique pur l'étude optimale de la traction électrique a l'aide des méthodes de recherche operationnelle.

L'algorythme ainsi conçu permet la prise en considération de toutes les dépluses occasionnées par l'application de la recherche opérationnelle à l'étude eucun d'optimisers la traction électrique rende plus facile la precision de la structure du point de revenu des travaux de recherche, projets, montage, exploatation et développement des objectifs à realiser.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 2/1973

D.K. 621.9

I. Gheghea

Berechnung des Volumenverlustes durch dünne Inter-Ovale Schlitze mit kleiner Ovalität bei Strömmungen in tangentieller Richtung

Im Aufsatz werden die Verhältnisse für die Berechnung des Flüssigkeitsverlustes durch Inter-Ovale Schlitze mit kleiner Ovalität bei laminäre Strömmung in tangentieller Richtung hergeleitet. Auf Grund numerischer Berechnung die über eine elektronische Digitalrechenmaschine durchgeführt worden sind, werden Variationsschaubilder von Volumenverluste in Abhängigkeit von Exzentrizität, Ovalität und Länge der Schlitze aufgestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.K. 620.1

M. Renert, V. V. Jinescu, G. Nucă, V. Chiriac, E. Fischer, D. Flondor

Spannungen und Dehnungen in seitlich abgestützten zylindrische Mänteln von Druckgefässen

Der Spannungs-und Dehnungszustand im seitlich abgestützten zylindrischen Mantel wird theoretischen untersucht. Die für ein Modell berechneten Werte der Dehnungen werden mit mittels Dehnmesstreifen ermittelten Werten verglichen und ein Korrekturfaktor bestinnt.

Ein Rechenprogramm, eine Strategie zum Aufsuchen der maximalen Spannung im Mantel enthaletend wird aufgestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Fej" Bucureşti Nr. 3/1973

D.K. 621.43.016

A. Apostolescu, B. Grünwald

Auswerkung der Gasentemperatur aus ein em mit Kompressionszundung versehenden Motorzylinders

Im Aufsatz wird das Temperaturniveau der ausgebrannten Gase im Zylinder eines Motors mit Kompressionzündung realistischer festgestellt u. zw. durch Temperaturdifferenz der Motorflüssigkeit, auf Grund eines bizonales Ausbrandmodels, Die Berechnungen ergaben, dass fast ein halb der ausgebrannten Gase am Anfang des Brennens mit einer Temperatur von 400 — 500°K, als bei durch klassischen Systemen bestimmten Höchsttemperatur hoher liegt, auf Grund der Standgleichung. Die Berechnungsergebnisse sind mit erfahrungsmässige Daten gegenübergestell. Zum Schlus, wird eine neue Auslegung des Prozesses der mechanischen Arbeit im Motorzylinder während des Brennens, dargestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Buureşti Nr. 3/1973

D.K. 621.33

Al. Popa, A. Carabulea

Beitrag zum optimalen Studium des elektrisehen Antriebes mit Hilfe von operationellen Forschugsmetboden

In der Arbeit werden die mathematischen Medelle und das logische Schema für das optimale Studium des electrischen Antriebes mit Hilfe von operationellen Forschungsmethoden beschrieben.

Der ausgearbeitete Algorithmus erlaubt die Berücksichtigung aller Ausgaben, welche durch die Anwendung der operationellen Forschung im Studium der Optimisierung des elektrischen Antriebes anfalllen, und erleichtert die Festlegung der Struktur des Kostenpreises der Arbeiten, welche für die Erforschung, die Konstruktion, die Montage, den Betrieb und die Weiterentwicklung, des zu realisierenden Objektives nötig sind.

Bul. Inst. politehnic ‚Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 3/1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.5

DEPENDENȚA TENSIUNE — DEFORMAȚIE PENTRU MATERIALE POLIMERE CRISTALINE *

CONSTANTIN RADU

Existența în macro molecula unui material polimer a unui însemnat număr de grade interne de libertate explică particularitățile intermoleculare ale lanțurilor polimere.

Avînd în vedere aceste particularități W. Kuhn [1] găsește expresia energiei libere a unui lanț cu articulații libere în funcție de lungimea vectorului care unește capetele lanțului. Mai departe, E. Guth și H. Mark [2], dezvoltînd teoria lui W. Kuhn, reușesc să stabilească pe baza datelor experimentale, o legătură între tensiune și energia liberă a lanțului molecular (o lege empirică)

Ținînd seama de particularitățile intermoleculare ale lanțurilor polimere cristaline introducem ipotezele următoare:

1. Deformațiile sînt mici.
2. Procesele care iau naștere în corpul polimer la deformații mici sînt adiabatice și reversibile.

În lucrarea de față ne propunem să găsim o dependență funcțională între tensiune și deformație, pentru corpurile polimere cristaline, asemănătoare cu dependența propusă de B. Coleman [3] pentru deformații mari din corpurile micromoleculare.

1. Energia liberă

În lucrarea [3], pentru deformații mari, B. Coleman propune ca energie liberă funcționala $P\{y^i_{,j}\}$, care definește componentele tensorului tensiune t^i_j prin relația:

$$t^i_j = \frac{\partial_N P\{y^h_k\}}{\partial_N y^i_{,r}} y^j_{,r} \tag{1.1}$$

unde,

$$y^i_{,j} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

* Manuscris predat redacției la data de 12 noiembrie 1971

iar,

$$y^i = y^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t) \tag{1.2}$$

sînt coordonatele convective legate de corp. Derivata $\frac{\partial_N P\{y,^h_k\}}{\partial_N \dot{y},^i_r}$ este derivata lui Noll [4], definită de egalitatea:

$$\frac{\partial_N P\{y,^h_k\}}{\partial_N y,^i_r}\,\delta y,^i_r = \delta_N P\{y,^h_k\} \equiv \frac{d}{ds} P\{y,^h_k + s\delta y,^h_k\}\,|_{s=0} \tag{1.3}$$

Vom introduce, pentru deformații mici, relații analoage cu relația (1.1). Pentru aceasta vom scrie ecuația de conservare a energiei sub forma:

$$\delta \int_V W\{\varepsilon\} dV + \int_V \rho \frac{\partial U_i}{\partial t}\,\delta U_i dV = \int_V f_i \delta U_i dV + \int_S T_i \delta U_i dS \tag{1.4}$$

în care V este domeniu mărginit de suprafața S, iar U energia intrenă.

Folosind ecuațiile de mișcare și condițiile la limită ecuația (1.4) se poate pune sub forma [3], [4]:

$$\delta W\{\varepsilon\} = \sigma_{ij}\{\varepsilon\}\,\delta\varepsilon_{ij}(t) \tag{1.5}$$

Dacă în (1.5) avem $\delta = \delta_N$ (formal), $W\{\varepsilon\} = P\{\varepsilon\}$ unde δ_N se determină din (1.3), se obține:

$$\delta_N P\{\varepsilon\} = \sigma_N\{\varepsilon\}\,\delta_N \varepsilon_{ij}(t) \tag{1.6}$$

Avînd în vedere definiția (1.3), din ecuația (1.6) se găsește:

$$\sigma_{ij}\{\varepsilon\} = \frac{\partial_N P\{\varepsilon\}}{\partial_N \varepsilon_{ij}(t)} \tag{1.7}$$

Asemănător, dacă în ecuația (1.5) considerăm (formal) $\delta = dt \cdot \frac{d}{dt} = \delta_t$ $W\{\varepsilon\} = \rho U\{\varepsilon\}$, unde $U\{\varepsilon\}$ este energia internă, de densitate ρ obținem:

$$dt \frac{d}{dt}\,\rho U\{\varepsilon\}] = \sigma_{ij}\{\varepsilon\} d\varepsilon_{ij}(t) = \delta_t \rho U\{\varepsilon\} \tag{1.8}$$

Din egalitățile (1.6) și (1.8) urmează:

$$\delta_N P\{\varepsilon\} = \delta_N \rho U\{\varepsilon\} \tag{1.9}$$

Din această relație nu urmează, ca urmare a determinărilor diferite a operatorilor δ_N și δ_t, egalitatea:

$$P\{\varepsilon\} = \rho U\{\varepsilon\}$$

Această egalitate ar fi posibilă numai în cazul cînd P și ρU ar fi funcții, deoarece în acest caz operatorii δ_N și δ_t ar coincide cu δ. Prin urmare în procesele adiabatice și reversivile ecuația (1.7) nu poate fi obținută din ecuația de conservare în care să intre energia internă; pentru obținerea ei va fi necesară o altă formă a ecuației de conservare. În paragraful următor vom încerca acest lucru.

2. Potențialul tensiune. Energia internă

Vom considera un potențial tensiune care să difere de potențialul care intră în relația (1.7); și pentru aceasta, în prealabil, vom da cîteva definiții.

1°. Numim funcțională tensiune $\sigma_{ij}\{\varepsilon, t\}$ de ε_{ij} și t, funcțională care poate fi reprezentată sub forma unei serii Fréchet [5]:

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} K_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)\varepsilon_{i_1j_1}(\varepsilon_1)\ldots\varepsilon_{i_nj_n}(\tau_n)d\tau_n \tag{2.1}$$

în care nucleul $K_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau)$ (ce reprezintă istoria deformației) poate fi eventual de tipul funcției δ a lui Dirac.

Dependența $\sigma \sim \varepsilon$ sub forma (2.1) constituie o transcriere a principiului determinismului. Conform acestei transcrieri există un număr infinit de timpuri intermediare $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, în care starea de tensiune la momentul t, influențează starea de deformație la momentul τ_1, unde $0 \leqslant \tau_1 \leqslant t$; apoi starea de deformație la momentul τ_1 influențează starea de deformație la momentul τ_2, unde $0 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_1$; ...; starea de deformație la momentul τ_{n-1} influențează starea de deformație la momentul τ_{n-1} în care $0 \leqslant \tau_n \leqslant \tau_{n-1}$;

2°. Funcționala $\sigma_{ij}\{\dot{\varepsilon}, \varepsilon, t\}$ de $\dot{\varepsilon}_{ij}$, ε_{ij} și t va fi funcționala care admite o dezvoltare de forma (2.1) în care nucleul K poate fi de tipul funcției δ, și poate avea o particularitate de tipul primei derivate a funcției δ (în raport cu primul argument t).

3°. Funcționala $\Phi\{\varepsilon, t\}$ o vom numi funcțională $\Phi\{\varepsilon\}$ de ε_{ij} dacă satisface egalitatea:

$$\frac{d\Phi\{\varepsilon\}}{dt} = F_{ij}\{\varepsilon, t\}\dot{\varepsilon}_{ij}(t) \tag{2.2}$$

unde $F_{ij}\{\varepsilon, t\}$ este funcțională de ε_{ij} și t.

4°. Funcționala $F\{\varepsilon, t\}$ din formula (2.2) se numește derivata funcționalei $\Phi\{\varepsilon\}$ în raport cu $\varepsilon_{ji}(t)$,

$$F_{ij}\{\varepsilon, t\} = \frac{D\Phi\{\varepsilon\}}{D\varepsilon_{ii}(t)} \tag{2.3}$$

Expresia (2.2) este derivata totală a funcționalei $\Phi\{\varepsilon\}$ în raport cu timpul t. Derivata totală în raport cu timpul a funcționalei $\Phi\{\varepsilon, t\}$ are forma :

$$\frac{d\Phi\{\varepsilon, t\}}{dt} = F_{ij}\{\varepsilon, t\}\dot{\varepsilon}_{ij} + f \tag{2.4}$$

unde f nu se poate descompune în forma : $f = f_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ și este dată de :

$$f = \frac{D\Phi\{\varepsilon, t\}}{Dt}$$

5°. Mărimile $F_{ij}\{\varepsilon, t\}$ și f din formula (2.4) se numesc derivatele parțiale ale funcționalei $\Phi\{\varepsilon, t\}$ în raport cu $\varepsilon_{ij}(t)$ și respectiv în raport cu timpul t,

$$F_{ij}\{\varepsilon, t\} = \frac{D\Phi\{\varepsilon, t\}}{D\varepsilon_{ij}(t)}\ ; \quad f = \frac{D\Phi\{\varepsilon, t\}}{Dt} \tag{2.5}$$

6°. Definim potențialul tensiune $W\{\varepsilon, t\}$ printr-o integrală curbilinie din funcționala $\sigma_{ij}\{\varepsilon, \tau\}$ pe drumul $C_{[\varepsilon_{ij}(0),\, \varepsilon_{ij}(t)]}$ din spațiul ε_{ij} :

$$W\{\varepsilon,t\} = \int_{C[\varepsilon_{ij}(0)\varepsilon_{ij}(t)]} \sigma_{ij}\{\varepsilon,\tau\}d\varepsilon_{ij}(\tau) = \int_0^t \sigma_{ij}\{\varepsilon,\tau\}\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau. \tag{2.6}$$

Dacă $\sigma_{ij}\{\varepsilon, \tau\}$ se reduce la o funcție de ε_{ij} atunci expresia (2.6) devine o expresie cunoscută din teoria potențialului. Din (2.6) obținem derivata potențialului tensiune în raport cu timpul t sub forma :

$$\frac{dW}{dt} = \sigma_{ij}\{\varepsilon,t\}\,\dot{\varepsilon}_{ij}(t) \tag{2.7}$$

7°. Dacă tensorul tensiune σ_{ij} $\{\varepsilon,t\}$ este o funcțională de ε_{ij} și t și integrala curbilinie din (2.6) nu depinde de drumul de integrale, atunci potențialul tensiune este funcțională numai de ε_{ij} astfel încît are loc egalitatea :

$$\sigma_{ij}\{\varepsilon,t\} = \frac{DW\{\varepsilon\}}{D\varepsilon_{ij}(t)} \tag{2.8}$$

Comparînd relațiile (2.7) și (1.8) se poate trage concluzia că în procesele adiabatice și reversibile potențialul tensiune W definit de relația (2.6) coincide cu energia internă ρU. Așadar am reușit să definim o funcțională care să îndeplinească rolul energiei interne, fără a mai folosi ecuația de conservare sub forma (1.4); adică tocmai ce ne propusesem la finele paragrafului 1. Putem generaliza acest rezultat enunțînd *teorema* :

„Dacă tensorul tensiune σ_{ij} $\{\varepsilon,t\}$ este o funcțională de ε_{ij} și t definită de o relație de forma (2.1), în care nucleul $K_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)$

nu este de tipul funcției δ în raport cu primul argument t, atunci egalitatea (2.8) este adevarată".

Demonstrație

Înlocuind expresia (2.1) a funcționalei σ_{ij} în expresia (2.6) și integrînd prin părți obținem:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_0 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} \Big\{ K_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)[\delta(t-\tau_0) -$$

(2.9)

$$-\delta(\tau_0 - \tau_1)] - \frac{\partial}{\partial \tau_0} K_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n \Big\} \varepsilon_{ij}(\tau_0)\varepsilon_{i_1j_1}(\tau_1)\ldots\varepsilon_{i_nj_n}(\tau_n)d\tau_n$$

Din expresia obținută se vede că W este funcțională numai de ε_{ij} și atunci conform definiției 7°, egalitatea (2.8) are loc. Pînă acum am considerat nuclee $K_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ care nu sînt de tipul funcției δ în raport cu primul argument t și mai departe vom considera nuclee $K^1_{ij i_1j_1\ldots i_nj_n}(t_1\tau_1, \ldots, \tau_n)$ care să posede această particularitate, căutînd să separăm această particularitate.

Anume, alegem $K^1_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ de forma [7]:

$$K^1_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \tau_1, \ldots, \tau^u) =$$

(2.10)

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \delta(t-\tau_1) \prod_{r=1}^{k-2} \delta(\tau_r - \tau_{r+1}) K^{(1,k)}_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \ldots, t, \tau_k, \ldots \tau_n)$$

în care nucleul $K^{(1,k)}_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \ldots, t, \tau_k, \ldots, \tau_n)$ numai are particularitatea funcției în raport cu primul argument t. Înlocuind nucleul dat de expresia (2.10) în egalitatea (2.1) obținem o nouă expresie a potențialului tensiune, pe care o notăm cu $\sigma^1_{ij}(t)$,

$$\sigma^1_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{n+2} \int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k+1} \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} K^{(1,k)}_{iji_1j_1\ldots i_nj_n}(t, \ldots, t_1, \tau_k, \ldots, \tau_n) \times$$

(2.11)

$$\times \varepsilon_{i_1j_1}(t)\varepsilon_{i_2j_2}(t)\ldots\varepsilon_{i_kj_k}(\tau_k)\ldots\varepsilon_{i_nj_n}(\tau_n)d\tau_n$$

Avînd în vedere valoarea lui W din egalitatea (2.6) obținem valoarea potențialului tensiune,

$$W^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{n} \int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k+1} \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} P^{(k)}_{i_kj_ki_{k+1}j_{k+1}\ldots i_nj_n}(t, \tau_k, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_n) \times$$

(2.12)

$$\times \varepsilon_{i_kj_k}(\tau_k)\varepsilon_{i_{k+1}j_{k+1}}(\tau_{k+1})\ldots\varepsilon_{i_nj_n}(\tau_n)d\tau_n$$

unde,

$$P \equiv P^{(k)}_{i_k j_n \ldots i_n j_n}(t, \tau_h, \ldots, \tau_n) = \int_{\tau_k}^{t} K^{(1,k)}_{ij i_1 \ldots i_n j_n}(\tau, \tau, \ldots, \tau_h, \varepsilon, \ldots, \tau_n)$$

(2.13)

$$\cdot \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\varepsilon_{i_1 j_1}(\tau) \ldots \varepsilon_{i_{k-1}}\varepsilon_{j_{k-1}}(\tau)d\tau.$$

Cu privire la funcţionala P putem enunţa *lema* :

Condiţia necesară şi suficientă ca funcţionala P, definită de egalitatea (2.13), să fie funcţională de ε_{ij} şi t în sensul definiţiei 1° este ca nucleul $K^{(1,\alpha)}$, să admită o reprezentare de formă :

$$K^{(1,\alpha)}_{ij i_1^{j_1} \ldots i_\alpha^{j_\alpha} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \ldots, \tau, \tau_k, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_n) =$$

(2.11)

$$= \sum_{k+1}^{k-1} H^{(1,\alpha)}_{i_1^{j_1} \ldots i_h^{j_h} i j i_{h+1}^{j_{h+1}} \ldots i_k^{j_k} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n) + H^{(1,\alpha)}_{ij i_1^{j_1} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n)$$

unde nucleul $H^{(1,\alpha)}_{ij i_1^{j_1} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n)$ nu are particularitatea funcţiei δ în raport cu argumentul τ.

Demonstraţie.

Necesitatea condiţiei reiese din faptul că funcţionala P, definită de egalitatea (2.13), trebuie, cu ajutorul integrării prin părţi să capete forma :

$$P = \int_x^t \{H^{(1,)}_{ij i_1^{j_1} i_2 \ldots i_{k-1}^{j_{k-1}} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n)\ [\delta(t - \tau) - \delta(\tau - \tau_k)]$$

(2.15)

$$+ M^{(1,\alpha)}_{ij i_1 \ldots i_{k-1}^{j_{k-1}} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n)\} \varepsilon_{ij}(\tau)\varepsilon_{i_1 j_1}(\tau) \ldots \varepsilon_{i_{k-1}^{j_{k-1}}}(\tau)\ d\tau.$$

În caz contrar, conform definiţiei 2°, funcţionala P ar putea fi funcţională de ε_{ij}, ε_{ij}, t, ceea ce ar fi în contradicţie cu condiţiile lemei.

Pentru a demonstra suficienţa condiţiei introducem valoarea nucleului $K^{(1,\alpha)}$ dat de relaţia (2.14) în egalitatea (2.13) şi integrăm prin părţi,

$$P = \int_{\tau k}^{t} H^{(1,k)}_{ij i_1^{j_1} \ldots i_{k-1}^{j_{k-1}} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n)\ d[(\tau)\varepsilon_{ij}(\tau) \ldots \varepsilon_{i_1^{j_1}}(\tau)] =$$

2.16)

$$= \int_{\tau_k}^{t} H^{(1,k)}_{ij i_1^{j_1} \ldots i_{k-1}^{j_{k-1}} \ldots i_n^{j_n}}(\tau, \tau_k, \ldots, \tau_n)\varepsilon_{ij}(\tau)\varepsilon_{i_1^{j_1}}(\tau) \ldots \varepsilon_{i_{k-1}^{j_{k-1}}}(\tau)d\tau.$$

Așa dar dacă nucleul H nu are particularitatea funcției δ în raport cu argumentul τ, atunci din (2.16) și definiția 1°urmează că P este funcțională de ε_{ji} și t.

Folosind afirmația lemei cu privire la funcționala P care intră în egalitatea (2.12) se poate enunța teorema :

Condiția necesară și suficientă ca integrala curbilinie $W^{(1)}$ determinată de expresia (2.6) (în care $\sigma_{ij} = \sigma^1_{ij}$), să nu depindă de drum, în sensul definiției 7, este ca nucleul ce intră în expresia (2.10) să poată fi reprezentat în forma (2.14).

Catedra de matematici IV
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *W. Kuhn*, Kolloid. Z, 68, 2, 1934.
2. *E. Guth, H. Mark*, Monatsh, 56, 93, 1934.
3. *B. Coleman*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, 17, 3, 230.
4. *W. J. Noll*, Rat. Mech. Anal, 1955, 4, 1, 3.
5. *M. Fréchet*, Sur les fonctionneles continues Ann de L'Ecole Normale Sup. 3 series, 27, 1910.
6. *B. Coleman, M. Gurtin*, Mechanics, 1967, 136.
7. *P. Lévy*, Problems concrets d'analyse fonctionnelle Paris, 1951.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

C.Z.: 517

FORMULĂ DE APROXIMARE DE TIP INTERPOLATIV PENTRU FUNCȚII DISCONTINUE*.

CONSTANTIN M. BUCUR

1. **Formularea problemei.**

Se consideră funcția $f : [-1, +1] \to R$, mai puțin punctele $x_j^{(0)}$; se cunosc valorile $\{f(x_i)\}$ în punctele diviziunii $d_{[-1,+1]} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ și valorile $\{f(x_j^{(0)} - 0)\}$, $\{f(x_j^{(0)} + 0)\}$ în punctele de discontinuitate $x_j^{(0)}$, $x_j^{(0)} \in [-1, +1]$, $x_j^{(0)} \notin d_{[-1,+1]}$, $(1 \leqslant j \leqslant s)$.

Pentru $f(x)$ se construiește pe $[-1, +1]$ o aproximare de tip interpolativ $\psi(x)$ parțial polinomială, având aceleași discontinuități cu $f(x)$.

2. **Determinarea aproximării** $\psi(x)$.

Se definește funcția

$$\sigma(x - x_j^{(0)}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{pentru} \quad x < x_j^{(0)} \\ 0 & \text{pentru} \quad x = x_j^{(0)} \\ +\dfrac{1}{2} & \text{pentru} \quad x > x_j^{(0)}, \end{cases}$$

$x, x_j^{(0)} \in [-1, +1]$, cu ajutorul căreia se construiește funcția discontinuităților $g(x)$ polinomială pe subintervale, având în punctele $x_j^{(0)}$ aceleași salturi ca și $f(x)$:

$$\delta_j = f(x_j^{(0)} + 0) - f(x_j^{(0)} - 0) = g(x_j^{(0)} + 0) - g(x_j^{(0)} - 0).$$

Folosind notația

$$p_j(x) = \frac{(x - x_1^{(0)})\,(x - x_2^{(0)}) \ldots (x - x_{j-1}^{(0)})(x - x_{j+1}^{(0)}) \ldots (x - x_s^{(0)})}{(x_j^{(0)} - x_1^{(0)})(x_j^{(0)} - x_2^{(0)}) \ldots (x_j^{(0)} - x_{j-1}^{(0)})(x_j^{(0)} - x_{j+1}^{(0)}) \ldots (x_j^{(0)} - x_s^{(0)})}$$

va rezulta că funcția $g(x)$ este de forma

$$g(x) = \sum_{j=1}^{s} \delta_j p_j(x)\, \sigma(x - x_j^{(0)}).$$

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice, din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București 1971.

Într-adevăr, poate fi demonstrată propoziția: funcția $g(x)$ este polinomială pe subintervale, iar în $x_j^{(0)}$ are aceleași salturi ca și $f(x)$

Deoarece

$$\sigma(x - x_j^{(0)}) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}\,(x - x_j^{(0)}) = \pm\frac{1}{2},\ (x \neq x_j^{(0)}),$$

rezultă că $g(x)$ este un polinom pentru $x \neq x_j^{(0)}$.

Calculînd saltul în punctul $x_j^{(0)}$ și ținînd seamă că

$$p_k(x_j^{(0)}) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k=j \\ 0 & \text{pentru } k\neq j, \end{cases}$$

se verifică a doua afirmație:

$$g(x_j^{(0)} + 0) - g(x_j^{(0)} - 0) = \sum_{k=1}^{s} \delta_k p_k\,(x_j^{(0)})[\sigma(x_j^{(0)} - x_k^{(0)} + 0) -$$

$$- \sigma(x_j^{(0)} - x_k^{(0)} - 0)] = \delta_j p_j\,(x_j^{(0)})\ [\sigma(+0) - \sigma(-0)] = \delta_j.$$

În continuare se consideră egalitatea

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{pentru } x \neq x_j^{(0)} \\ h_j = \dfrac{1}{2}\,[f(x_j^{(0)} + 0) + f(x_j^{(0)} - 0)] & \text{pentru } x = x^{(0)}{}_j, \end{cases}$$

care definește o funcție continuă pe $[-1, +1]$. Aceasta, deoarece f, g sînt continue pentru $x \in [-1, +1]$, $x \neq x_j^{(0)}$, iar

$$\lim_{x \nearrow x_j^{(0)}} \varphi(x) = f(x_j^{(0)} - 0) - g(x_j^{(0)} - 0) = f(x_j^{(0)} - 0) + \frac{1}{2}\,\delta_j = h_j = \varphi(x_j^{(0)}),$$

$$\lim_{x \searrow x_j^{(0)}} \varphi(x) = f(x_j^{(0)} + 0) - \frac{1}{2}\,\delta_j = h_j = \varphi(x_j^{(0)}).$$

Pentru funcția $\varphi(x)$ și diviziunea $\tilde{d}_{[-1,+1]} = d_{[-1,+1]} \cup \{x_j^{(0)}\} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, $(\tilde{x}_k < \tilde{x}_r$ dacă $k < r$; $m = n + s)$, se scrie polinomul Lagrange de interpolare, cunoscîndu-se valorile $\varphi\,(\tilde{x}_k)$, $(x_k \in \overline{d}_{[-1,+1]})$:

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\varphi(\tilde{x}_k), \text{ unde s-a considerat}$$

$$p_k(x) = \frac{(x - \tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_1)\ldots(x - \tilde{x}_{k-1})(x - \tilde{x}_{k+1})\ldots(x - \tilde{x}_m)}{(\tilde{x}_k - \tilde{x}_0)(\tilde{x}_k - \tilde{x}_1)\ldots(x - \tilde{x}_{k-1})(\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k+1})(\ldots(\tilde{x}_k - \tilde{x}_m)}$$

Rezultă că $\varphi(x) \approx L_m(x)$ pe $[-1, +1]$, sau $f(x) \approx L_m(x) + g(x)$.

Aproximarea funcției $f(x)$, $\psi(x) = L_m(x) + g(x)$, este de tip interpolativ și satisface condițiile impuse:

$\psi(x_i) = L_m(x_i) + g(x_i) = \varphi(x_i) + g(x_i) = f(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, deoarece $x_i \neq x_j^{(0)}$ prin ipoteză, iar

$$\psi(x_j^{(0)} - 0) = L_m(x_j^{(0)}) + g(x_j^{(0)} - 0) = \varphi(x_j^{(0)}) + \delta_j \sigma(-0) =$$

$$= h_j - \frac{1}{2}\delta_j = f(x_j^{(0)} - 0),$$

$$\psi(x_j^{(0)} + 0) = L_m(x_j^{(0)}) + g(x_j^{(0)} + 0) = \varphi(x_j^{(0)}) + \delta_j \sigma(+0) =$$

$$= h_j + \frac{1}{2}\delta_j = = f(x_j^{(0)} + 0).$$

Din ultimele egalități rezultă că $\psi(x)$ are aceeași comportare cu $f(x)$ în punctele de discontinuitate $x_j^{(0)}$.

Formula de aproximare de tip interpolativ are deci forma

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\varphi(\tilde{x}_k) + \sum_{j=1}^{s} \delta_j p_j(x)\sigma(x - x_j^{(0)}).$$

Catedra de matematici
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

FIZICĂ

C.Z.: 537.213

RECIPROCITATEA POTENȚIALULUI ELECTRIC ȘI A CONDUCTIVITĂȚII ÎN MEDII NEOMOGENE ÎN REGIM STAȚIONAR *

GEORGE C. MOISIL

1. Fie un mediu conductor, izotrop, linear, dar neomogen în care injecția și absorbția curentului se face în regim staționar, prin surse de densitate volumică ρ_J legate de densitatea de curent prin relația

$$\nabla \bar{J} = \rho_J \tag{1}$$

Dacă sursele sînt cuasipunctiforme, ρ_J se poate exprima cu ajutorul funcției generalizate a lui Dirac

$$\rho_J = \sum_{k=1}^{n} I_k \delta(\bar{r} - \bar{r}_k) \tag{2}$$

Conservarea sarcinei electrice impune în plus condiția

$$\int_{\infty} \rho_J d\tau = 0 \tag{3}$$

În cazul surselor cuasipunctiforme, această relație se reduce la teorema întîi a lui Kirchhoff:

$$\int_{\infty} \sum_{k=1}^{n} I_k \, \delta(\bar{r} - \bar{r}_k) \, d\tau = \sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \tag{4}$$

Densitatea de curent fiind legată de potențialul electric prin relația

$$\bar{J} = -\sigma \nabla V \tag{5}$$

în care σ este conductivitatea mediului funcției de poziție, din (1) rezultă ecuația cu derivate parțiale satisfăcută de potențialul electric [1, 2]:

$$\sigma \nabla^2 V + \nabla \sigma \nabla V = -\rho_J \tag{6}$$

* Manuscris predat redacției la data de 20 aprilie 1971.

Sabba Ştefănescu [3], introduce parapotenţialul:

$$\psi = \alpha V \tag{7}$$

în care

$$\alpha = + \sqrt{\sigma} \tag{8}$$

Întrucît avem identitatea

$$\alpha^2 \nabla \psi = \alpha \nabla^2 (\alpha V) = \psi \nabla^2 \alpha + \sigma \nabla^2 V + \nabla \sigma \nabla V$$

ţinînd seama de (6) rezultă:

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} - \frac{\nabla^2 \alpha}{\alpha} = - \frac{\rho_J}{\sigma V} \tag{9}$$

În regiunile din afara surselor de curent, ψ şi α satisfac teorema lui Sabba Ştefănescu:

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{\nabla^2 \alpha}{\alpha} \tag{10}$$

Această teoremă este satisfăcută şi în cazul în care ψ şi α sînt funcţii armonice.

Simetria remarcabilă dintre ψ şi α s-a dovedit foarte utilă pentru rezolvarea repartiţiei potenţialului electric V în medii neomogene în care $\sigma\,(x, y, z)$ are o formă destul de complicată [4].

Să înmulţim ambii membri ai relaţiei (9) cu σV şi să integrăm pe un domeniu Δ, limitat de frontiera închisă Σ:

$$\int_\Delta (\alpha \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \alpha) d\tau = - \int_\Delta \rho_J d\tau \tag{11}$$

Aplicînd a II-a formulă a lui Green, se obţine

$$\oint_\Sigma (\alpha \nabla \psi - \psi \nabla \alpha) d\tau = - \int_\Delta \rho_J \, d\tau$$

şi întrucît

$$\alpha \nabla \psi - \psi \nabla \alpha = \sigma \nabla V = - \bar{J}$$

$$\oint_\Sigma \bar{J} \overline{dA} = \int \rho_J d\tau \tag{12}$$

Dacă este satisfăcută relaţia (3)

$$\oint_\Sigma \bar{J} \overline{dA} = 0 \tag{13}$$

Relaţiile (12), (13) arată comportarea curentului electric ca un fluid incompresibil.

2. Fie cîmpul scalar

$$\Phi = \sigma V \tag{14}$$

Introducem un sistem de surse de densitate ρ, astfel alese încît peste tot

$$\nabla^2\Phi = -\rho_\Phi \tag{15}$$

Ţinînd seama că

$$\nabla^2\Phi = \nabla^2(\sigma V) = -\nabla\bar{J} + \nabla(V\nabla\sigma) = -\rho_J + \nabla(V\nabla\sigma)$$

şi punînd

$$\rho_\sigma = \rho_\Phi - \rho_J \tag{16}$$

rezultă

$$V\nabla^2\sigma + \nabla V\nabla\sigma = -\rho_\sigma. \tag{17}$$

Simetria dintre relaţia (17) şi relaţia (6) este isbitoare. Introducînd mărimile

$$\varkappa = \beta\sigma \tag{18}$$

$$\beta = +\sqrt{V} \tag{19}$$

analoge lui ψ şi α şi urmînd acelaşi raţionamente ca la punctul 1, găsim

$$\frac{\nabla^2\varkappa}{\varkappa} - \frac{\nabla^2\beta}{\beta} = -\frac{\rho\sigma}{\sigma V} \tag{19}$$

analogă relaţiei (9). În sfîrşit, în regiunile exterioare surselor ρ_σ

$$\frac{\nabla^2\varkappa}{\varkappa} = \frac{\nabla^2\beta}{\beta} \tag{21}$$

această relaţie fiind satisfăcută şi în cazul în care $\varkappa$ şi β sînt funcţii armonice. Aşadar perechea de mărimi $\varkappa$ şi β satisfac deasemenea teorema lui Sabba Ştefănescu.

Integrînd (20) pe un domeniu Δ şi aplicînd a II-a formulă a lui Green obţinem

$$\oint_\Sigma (\beta\nabla\varkappa - \varkappa\nabla\beta)\,\overline{dA} = -\int_\Delta \rho_\sigma \tau d \tag{22}$$

Punînd

$$\bar{J}_\sigma = -V\nabla\sigma \tag{23}$$

rezultă

$$\oint_{\Sigma} \overline{J_\sigma} \overline{dA} = \rho_\sigma d\tau \tag{24}$$

Simetria dintre $V(x, y, z)$ și $\sigma(x, y, z)$ ne arată că fiecărui mediu caracterizat printr-o conductivitate $\sigma(x, y, z)$ și în care un sistem de surse de curent creiază un potențial $V(x, y, z)$ i se poate asocia un mediu *dual* de conductivitate

$$\overset{*}{\sigma}(x, y, z) \equiv V(x, y, z) \tag{25}$$

în care un sistem de surse de curent de densitate

$$\overset{*}{\sigma}_j \equiv \rho \tag{26}$$

creiază un potențial

$$\overset{*}{V}(x, y, z) \equiv \sigma(x, y, z). \tag{27}$$

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Kirchhoff, G. R.* Ann. Phys. u Chem. (1843) p. 497.
2. — Enc. der Math. Wiss. vol. V—2 p. 395—437.
3. *Sabba Ştefănescu S.* Inst. Geologic Român Studii Tehn. și Econom. seria D Nr. 2 (1950)
4. *Trân ngoc Toán,* Contribuții la modelarea analitică a problemelor de prospecțiuni electrice cu curent continuu. Teza I. P. G. G. Buc. 1970

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

C.Z.: 539.16

EFECTE DE IRADIERE PE CRISTALELE DE FOSFAT MONOACID DE AMONIU.

CORNELIA MOȚOC, G. TEODORESCU, GABRIELA CONE

Introducere

Interacțiunea electronilor cu corpul solid este un proces complex a cărui explicare necesită luarea în considerare a proceselor primare și secundare ale iradierii.

În cadrul proceselor primare sînt incluse procesele de excitare a electronilor păturilor atomice, ionizarea atomilor sau moleculelor iradiate și deplasarea atomilor din pozițiile normale ale rețelei cristaline cu formare de defecte punctuale : vacanțe și atomi interstițiali [1, 2, 3].

În cadrul proceselor secundare sînt incluse efectele care au ca urmare transmiterea perturbației primare în regiunile vecine și formarea unei cascade de deplasări. Se arată că defectele punctuale interacționează cu defectele existente în rețeaua cristalină, cum ar fi dislocațiile, limitele de grăunți, suprafața cristalului etc. Vom menționa că suprafața cristalului constituie o porțiune în care defectele produse de iradiere pot fi puse în evidență fie direct, fie folosind metode de atac cu reactivi chimici corespunzători. Ionizarea atomilor constituie forma cea mai importantă de interacțiune a electronilor cu substanța în cazul cînd energiile electronilor sînt mai mici decît 1 MeV [4]. Această situație este cea care intervine cînd proba se iradiază în microscopul electronic. În acest caz defectele de iradiere apar ca urmare a ruperii legăturilor chimice prin perturbarea configurației electronice. Ele pot fi puse în evidență prin metode de microscopie electronică și metalografică.

În lucrare se examinează modificările microstructurii unor cristale de fosfat monoacid de amoniu (ADP) ca urmare a iradierii în microscopul electronic TESLA care permite o accelerare a electronilor cu energii pînă la 60 keV. Se arată că unele din efectele observate sînt asemănătoare cu cele obținute pe halogenuri alcaline iradiate cu electroni sau cu particule grele. Rezultatele sînt interpretate ținînd seama de specificul substanței și de teoria generală a defectelor de iradiere.

Manuscris predat redacției la data de 22 februarie 1972

Metoda şi rezultatele experimentale.

Cristalele de ADP au fost obţinute din soluţie apoasă prin evaporare lentă. La temperatura camerii ADP cristalizează în sistemul tetragonal aparţinînd clasei D_{2d} — 42 m şi se obţine faza neferoelectrică. Forma de echilibru a cristalului este un paralelipiped mărginit de feţele (100) şi avînd la cele două capete două prisme tetragonale mărginite de feţele (110).

Cristalele au fost examinate metalografic înainte şi după iradierea lor în microscopul electronic TESLA. Iradierea s-a făcut cu electroni acceleraţi la tensiunea de 50 keV timp de 10 pînă la 30 minute. Efectele observate sînt de mai multe tipuri :

Pe feţele (100) apar creşteri superficiale sub forma unor mici cristale paralelipipedice ale căror laturi sînt orientate paralel respectiv perpendicular pe direcţia (100). Aceste creşteri apar de preferinţă în şiruri paralele cu direcţia (010) şi sînt foarte asemănătoare celor întîlnite în cazul autoepitaxiei cînd cristalele sînt crescute din soluţie (fig. 1). În acest caz, creşterea epitaxială este indusă de iradiere; probele neiradiate nu prezentau aceste forme de creştere.

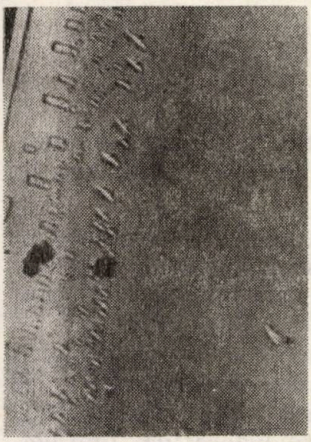
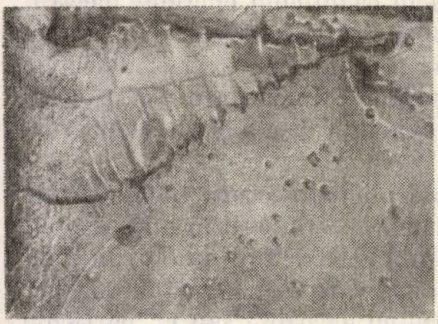


Fig. 1

Concomitent cu formele de creştere dispuse epitaxial apar şi forme neregulate de creştere dispuse fie dezordonat (fig. 2) fie în şiruri paralele cu o direcţie cristalografică (100) sau (110) (fig. 3). Ele sînt specifice cristalelor iradiate cu particule grele şi forma lor este asemănătoare figurilor de atac obţinute ca urmare a unor tratamente cu reactivi chimici.

În cazul în care fasciculul electronic este focalizat pe suprafaţa cristalului apar defecte superficiale sub forma unor adînciturі (pori) de forma unei calote sferice ale căror dimensiuni variază între 0,1 μm şi 50 μm (fig. 4a şi 4b).



Fig, 2

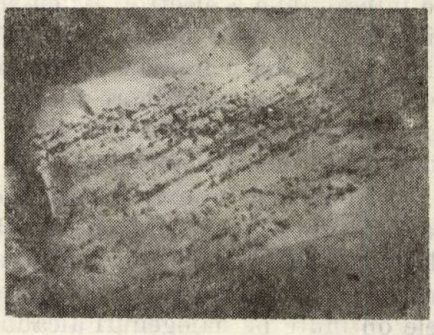


Fig. 3

Un alt aspect caracteristic apare cînd iradierea este concentrată pe una din treptele de creştere caracteristice cristalului de ADP. După cum arată fig. 5, aliura treptei de creştere este modificată : într-o primă etapă

a iradierii apare o deformare a acesteia în sensul producerii unei poligonizări iar apoi, la iradieri de mai lungă durată apar creşteri neregulate care nu prezintă caracteristici ale structurii cristaline.

S-au examinat şi figurile de atac ale cristalelor neiradiate şi iradiate folosind reactivi chimici corespunzători (acid fosforic în soluţie de alcool-

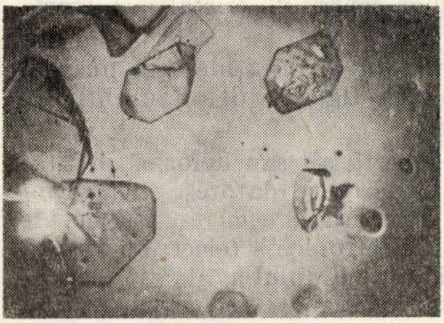


Fig. 4a

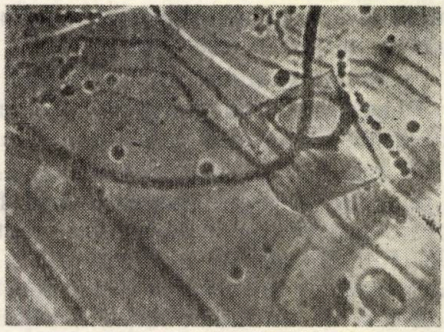


Fig 4b

apă distilată, clorură ferică şi acid clorhidric în soluţie de alcool-apă distilată).

Figurile de atac ale probelor iradiate diferă de ale probelor neiradiate ; sînt puse în evidenţă modificări ale densităţii de dislocaţii precum şi modificări ale straturilor de creştere ca urmare a aglomerării defectelor punctuale produse de iradiere.

Discuţii

Defectele punctuale în cristalele de ADP se produc prin ruperea legăturii chimice ca urmare a excitării produse de bombardamentul electronic. Remarcăm faptul că, spre deosebire de legătura ionică, legătura de hidrogen specifică cristalului de ADP este cu mult mai slabă. Acest lucru face ca un număr mare de defecte punctuale să poată fi produs cu uşurinţă şi să apară în acelaşi timp şi complexe de defecte. Spre deosebire de cristalele ionice, în cristalele de ADP nu se produc centrii de culoare în urma iradierii.

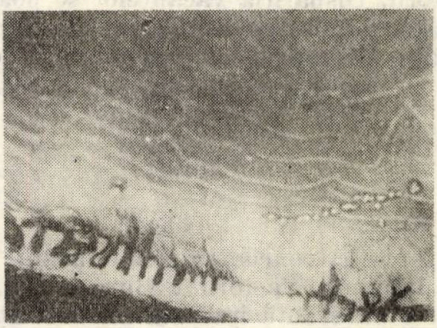


Fig 5

Creşterile superficiale regulate sau neregulate se datoresc migrării înspre suprafaţă a defectelor punctuale şi acumulării acestora în jurul unui defect existent pe suprafaţă, care favorizează formarea în regiunea respectivă a unui centru de cristalizare. Creşterea nucleului de cristalizare la dimensiuni macroscopice este favorizată de faptul că datorită iradierii are loc o difuzie mărită a defectelor în special

în direcţia unei dislocaţii sau a unei trepte de creştere. Aceste creşteri superficiale pot fi interpretate şi ca procese de recristalizare.

Menţionăm că este cunoscută cristalizarea din fază amorfă a unor straturi subţiri de seleniu sub acţiunea unui fascicul electronic [5] precum şi germaniului amorf [6] sau a bioxidului de siliciu [7] ca urmare a unui bombardament ionic. Numeroase experienţe [8, 9] arată că centrii de culoare cu sarcină negativă joacă rolul unor centrii de cristalizare foarte activi în depunerile epitaxiale.

Apariţia unui alt tip de defecte cum sînt dislocaţiile este pusă în evidenţă în mod indirect prin modificarea figurilor de atac obţinute ca urmare a acţiunii unor reactivi chimici.

Efectele legate de apariţia porilor superficiali sau deformările graniţelor de creştere ilustrate prin fig. 4 şi fig. 5 se datoresc încălzirilor locale provocate de fasciculul electronic. Prin iradiere cu un fascicul de electroni focalizat se formează „vîrfuri electronice" (electron spikes) care constau în încălziri locale foarte rapide (de ordinul a 10^{-8} s) la temperaturi de ordinul a 1000°K deci cu mult mai mari decît temperatura de topire a cristalului.

Fenomene similare pot apărea şi în absenţa iradierii ca urmare a efectuării unor tratamente termice foarte apropiate de temperatura de topire a cristalului cum ar fi aluminiul [10] sau clorura de potasiu [11].

Apariţia figurilor de atac termic în cazul cristalelor iradiate este un proces mai complicat care poate fi explicat examinînd contribuţiile simultane a următorilor factori : a) condensarea vacanţelor ca urmare a răcirii bruşte a cristalului de la o temperatură foarte înaltă la temperatura camerii, b) evaporarea termică a cristalului în conformitate cu mecanismul propus de Sears [12], care necesită prezenţa unor dislocaţii care să intersecteze suprafaţa cristalului.

În cristalele iradiate la temperaturi înalte se formează vacanţe în echilibru termic şi vacanţe în exces ca defecte de iradiere. Cînd temperatura cristalului scade, apare o suprasaturare a concentraţiei vacanţelor, care tinde să se anihileze cînd cristalul revine la starea sa de echilibru. Dispariţia vacanţelor se poate face prin migrarea lor înspre suprafaţă unde se pot condensa sub formă de pori deşi există şi o altă posibilitate : dispariţia lor prin formare de bucle sau inele de dislocaţie.

Se ştie că densitatea de dislocaţii este dată de :

$$\rho = \frac{C - C_0}{2rb} \qquad (1)$$

cu $c - c_0$ concentraţia de vacanţe în exces, r raza buclei de dislocaţie şi b lungimea vectorului Burgers. Cum r şi b sînt caracteristice materialului la o substanţă iradiată concentraţia de dislocaţii ar varia direct proporţional cu concentraţia de vacanţe în exces conform (1).

Totuşi condensarea vacanţelor nu este singura sursă de producere şi nici cea mai importantă a dislocaţiilor. La temperaturi înalte deformarea plastică a cristalului este favorizată ; apar tensiuni mecanice în special în cazul cînd iradierea se face sub fasciculul electronic focalizat pe cristal

gradientul de temperatură este foarte mare. Tensiunea mecanică produsă de gradientul de temperatură este dată de :

$$S = E \alpha \Delta T \tag{2}$$

în care E este modulul lui Young, α coeficientul de dilatare liniar şi ΔT diferenţa de temperatură în cristal. Cu $\Delta T = 1000°K$, S are valori de ordinul a 10^9 N/m^2 şi deci foarte mari în comparaţie cu limita de rupere a cristalului la temperatura camerii. Revenirea cristalului la forma iniţială se va face prin deformare plastică (curgere plastică) şi generare de dislocaţii. Se ştie că densitatea de dislocaţii este dată de :

$$\nu = \frac{\alpha}{b} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \tag{3}$$

cu $\delta \left(\frac{dT}{dr} \right)$ variaţia gradientului termic.

Este greu de afirmat care din cele două procese (a) sau (b) este preponderent în formarea porilor sau în deformarea treptelor de creştere. Dificultatea principală constă în imposibilitatea de a determina exact temperatura locală a fasciculului electronic deci a parametrului ΔT care este esenţial în generarea de dislocaţii prin cel de-al doilea mecanism.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. *G. J. Diens, G. H. Vineyard*, Radiation Effects in Solids Interscience, New York, 1957.
2. *D. S. Billington, J. H. Crawford jr.*, Radiation Damage in Solids Princeton, New York, 1961.
3. *C. Moţoc*, Acţiunea radiaţiilor nucleare asupra corpului solid Ed. Academiei, Bucureşti, 1964.
4. *H. Kelly*, Interaction of Radiation with Solids
5. *Makoto Shiojiri et al*, Jap. J. Appl. Phys. 8 1077
6. *J. R. Parson, R. W. Balluffi*, J. Phys. Chem. Solids *25* (1964) 263
7. *S. Weissmann, K. Nakajima*, J. Appl. *34*, (1969) 3152
8. *Ryuzo Ueda, Tadao Inuzuka, J.* Crystal Growth 3, 4, (1968) 175
9. *G. I. Distler*, J. Crystal Growth *3*, 4, (1968) 191.
10. *P. E. Doherty, R. S. Davis*, Acta Met. *3* (1959) 64
11. *P. G. Deo, Sutendra Kumar*, J. Crystal Growth *3*, 4 (1968) 694.
12. *G. Sears*, Journ. Chem. Phys., *27* 6 (1957) 1308

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 547.1

DESPRE CALCULUL FORMULELOR MOLECULARE ALE SUBSTANȚELOR ORGANICE, DIN MASA MOLECULARĂ ȘI DIN REZULTATELE ANALIZEI FUNCȚIONALE *

F. M. ALBERT

Se poate demonstra printr-un calcul elementar că la stabilirea formulelor moleculare ale substanțelor organice s-ar putea evita în unele cazuri analiza elementară.

Demonstrația se va face pentru cazul mai simplu al hidrocarburilor și apoi pentru derivații funcționali.

1. *Hidrocarburi*

Formulele moleculare ale diferitelor clase de hidrocarburi, C_nH_{2n+n}, C_nH_{2n}, C_nH_{2n-2}, ... C_nH_{2n-2n}, se pot exprima cu ajutorul unei formule generale unice (1):

$$C_nH_{2n+\alpha} \tag{1}$$

unde $\alpha = 2, 0, -2 \ldots -2n$.

Termenul α caracterizează clasa hidrocarburii.

Fiind dată masa moleculară M a hidrocarburii, se poate scrie relația

$$M = 12n + 2n + \alpha = 14n + \alpha = N + \alpha \tag{2}$$

de unde

$$n = \frac{M - \alpha}{14} = \frac{N}{14}; \quad M = N + \alpha; \quad N = 14n \tag{3}$$

Se vede că N este un număr divizibil cu 14. Problema se reduce la calcularea numerelor n și α. Pentru aceasta trebuie să se găsească un număr N divizibil cu 14 (tabela 1), astfel încît să fie satisfăcută relația (3). Dacă $N = 14\,n$ este valoarea cea mai probabilă pentru numărul divizibili cu 14 căutat, alte valori posibile din șirul de numere divizibile cu 14 vor fi:

$$N - 14n, \ldots N - 2 \cdot 14, N - 14, N + 14, N + 2 \cdot 14, \ldots N + 14n$$

* Manuscris predat redacției la data de 15 mai 1971.

sau

$$14(n-n),\ \ldots\ 14(n-2),\ 14(n-1),\ 14n,\ 14(n+1),$$

$$14(n+2),\ \ldots\ 14(n+n)$$

Fie N numărul căutat. Atunci, conform relaţiei (3), $M > N$ cînd α e pozitiv, $M < N$ cînd α e negativ, sau $M = N$ cînd $\alpha = 0$.

Tabela 1

Numere divizibile cu 14

14	84	154	224	224	364	434	504
28	98	168	238	308	378	448	518
42	112	182	252	322	392	462	523
56	126	196	266	336	406	476	546
70	140	210	280	350	420	490	560

Apar deci trei cazuri:

a) $M > N$, $\alpha = 2$, $N = M - 2$ (2 fiind singura valoare pozitivă posibilă pentru α) şi hidrocarbura este de forma C_nH_{2n+2}.

b) $M < N$, $\alpha < 0$, $N = M + \alpha$, $\alpha = -2, -4, \ldots -2n$ şi hidrocarbura face parte din una din seriile C_nH_{2n-2}, C_nH_{2n-4}, $\ldots$ C_nH_{2n-2n}.

c) $M = N$, $\alpha = 0$, $N = M$, $n = M/14$ şi hidrocarbura este de forma C_nH_{2n}.

Exemplu. Să se stabilească formula moleculară a unei hidrocarburi a cărei masă moleculară este 128.

Rezolvare.

Numerele divizibile cu 14, mai apropiate de 128 sînt 112, 126, 140 şi 154.

$$n_1 = \frac{128-16}{14} = \frac{112}{14} = 8; \qquad \alpha = 16$$

$$n_2 = \frac{128-2}{14} = \frac{126}{14} = 9; \qquad \alpha = 2$$

$$n_3 = \frac{128+12}{14} = \frac{140}{14} = 10; \qquad \alpha = -12$$

$$n_4 = \frac{128+28}{14} = \frac{154}{14} = 11; \qquad \alpha = -28$$

Ar rezulta următoarele formule moleculare:

$$\underset{\text{I}}{C_8H_{16+16}};\quad \underset{\text{II}}{C_9H_{18+2}};\quad \underset{\text{III}}{C_{10}H_{20-12}};\quad \underset{\text{IV}}{C_{11}H_{22-28}}$$

Se vede că formulele I ($\alpha = 16$) și IV (α) 2n) se exclud și rămîne de ales între formulele II și III

$$C_9H_{20} \text{ și } C_{10}H_8$$

ambele fiind posibile. Prima este un alcan lichid, a doua corespunde naftalinei (solidă).

Cînd există mai multe formule moleculare posibile (în general sînt posibile una sau cel mult două formule), atribuirea formulei corecte se poate face pe baza proprietăților diferite (temperatură de topire sau de fierbere, stare de agregare, densitate, indice de refracție, spectre optice etc) sau a unor reacții chimice specifice.

În tabela 2 s-au înscris masele moleculare ale unor clase de hidrocarburi, pentru care $1 \leqslant n \leqslant 15$ ($n = 1, 2, \ldots n$) și $-16 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Hidrocarburile din ultimile coloane fac parte, în general, dintr-o serie de hidrocarburi aromatice polinucleare. Acestea din urmă se pot deosebi ușor de hidrocarburile din primele coloane (cînd masele moleculare sînt identice) cu ajutorul unor reacții caracteristice.

Tabela 2

Masele moleculare ale unor clase de hidrocarburi

Nr. atomi de carbon	C_nH_{2n-2}	C_2H_{2n}	C_nH_{2n-2}	C_nH_{2n-4}	C_nH_{2n-6}	C_nH_{2n-8}	C_nH_{2n-10}	C_nH_{2n-12}	C_nH_{2n-14}	C_nH_{3n-6}
C_1	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—
C_2	30	28	26	—	—	—	—	—	—	—
C_3	44	42	40	38	—	—	—	—	—	—
C_4	58	56	54	52	50	—	—	—	—	—
C_5	72	70	68	66	64	62	—	—	—	—
C_6	86	84	82	80	78	76	74	—	—	—
C_7	100	98	96	94	92	90	88	86	—	—
C_8	114	112	110	108	106	104	102	100	98	—
C_9	128	126	124	122	120	118	116	114	112	110
C_{10}	142	140	138	136	134	132	130	128	126	124
C_{11}	156	154	152	150	148	146	144	142	140	138
C_{12}	170	168	166	164	162	160	158	156	154	152
C_{13}	184	182	180	178	176	174	172	170	168	166
C_{14}	98	196	194	192	190	188	186	184	182	180
C_{15}	212	210	208	206	204	202	200	198	196	194

2. *Derivaţii funcţionali.*

Pornind de la observaţia că într-un derivat monofuncţional, provenit de la diverse clase de hidrocarburi, funcţiunea monovalentă F înlocuieşte cîte un atom de hidrogen, formulele acestor derivaţi vor fi $C_nH_{2n+1}F$, $C_nH_{2n-1}F$, $C_nH_{2n-2-1}F$ etc. Se poate stabili o formulă moleculară generală (4) pentru derivaţii monofuncţionali, funcţiunea fiind monovalentă, de forma

$$C_nH_{2n+\alpha-1}F \tag{4}$$

Dacă în moleculă există mai multe grupe funcţionale monovalente $F', F'', \ldots F^m$, numărul fiecăreia din ele fiind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, se poate scrie o formulă moleculară generală şi unică pentru toţi derivaţii funcţionali organici.

$$C_nH_{2n+\alpha-\beta}F'_{\gamma_1}F''_{\gamma_2}\ldots F^m_{\gamma n} \tag{5}$$

în care $\gamma_1\,\gamma_2, \ldots \gamma_n$ sînt *indicii funcţionali*, iar $\beta = \Sigma\gamma_i$ este numărul atomilor de hidrogen înlocuiţi şi are valorile numerelor întregi $\beta = 1, 2, \ldots \ldots 12n + \alpha$.

Fiind dată masa moleculară M a substanţei şi notînd cu $M_1, M_2, \ldots \ldots M_n$ masele grupelor funcţionale $F', F'', \ldots F^n$, se poate scrie relaţia :

$$\begin{aligned} M &= 12n + 2n + \alpha - \beta + \gamma_1M_1 + \gamma_2M_2 + \ldots + \gamma_nM_n = \\ &= 14n + \alpha - \beta + \sum_{n=1}^{n}\gamma_iM_i \end{aligned} \tag{6}$$

de unde

$$n = \frac{M - \alpha + \beta - \Sigma\,\gamma_iM_i}{14} = \frac{M' + \alpha}{14} = \frac{N'}{14} \tag{7}$$

şi

$$N' = M + \beta - \Sigma\,\gamma_iM_i - \alpha = M' + \alpha \tag{8}$$

Valoarea $\beta = \Sigma\,\gamma_i$ rezultă din analiza funcţională, iar $\Sigma\gamma_iM_i$ se calculează, M_i fiind cunoscute.

Calcularea lui n şi deci a formulei moleculare se reduce la relaţia (7), asemănătoare cu (3).

Pentru a găsi un mod unitar de exprimare a funcţiunilor organice, ele s-au redus la forme în care grupa funcţională, este monovalentă (tabela 3)

Din cele expuse rezultă că pentru calcularea formulelor moleculare ale substanţelor organice ar fi suficient să se determine experimental masa moleculară M şi numărul grupelor funcţionale $\Sigma\,\beta\gamma = \beta$. Se calculează apoi M' şi N' din relaţia (7) şi în final se află α din relaţia (8) pentru a obţine n.

Tabela 3

Funcţiile *F* monovalente mai importante

F	Denumirea funcţiei *F*	Masa grupei funcţionale	Clasele de substanţe corespunzătoare funcţiei *F*
H	hidrogen	1	hidrocarburi
X	—	—	derivaţi halogenaţi
OH	hidroxil	17	alcooli, fenoli, enoli, eteri
CHO	carbonil	29	aldehide, cetone, chinone, expoxizi
COOH	carboxil	45	acizi carboxilici, esteri
CN	nitril	26	nitrili
NH_2	amină	16	amine primare, secundare şi terţiare
NO_2	nitro	46	nitroderivaţi
NO	nitroso	30	nitrosoderivaţi
$CONH_2$	amidă	44	amide nesubstituite şi substituite
SH	tiol	33	tioalcooli, tioeteri
SO_3H	acid sulfonic	81	acizi sulfonici
SO_2NH_2	sulfonamidă	80	sulfonamide nesubstituite şi substituite
SOH	sulfoxid	49	sulfoxizi
SO_2H	sulfonă	65	sulfone
N_2H_3	hidrazină	31	hidrazine mono—, di—, tri—, şi tetra-substituite

Exemplul I. Se cere formula moleculară a unei substanţe avînd masa moleculară 147 care conţine o grupă carboxil, una eter şi una amină.

Rezolvare.

Substanţa este de forma $C_nH_{2n+\alpha-3}(COOH)(OH)(NH_2)$.

$$M' = 147 + 3 - (45 + 17 + 16) = 72$$

$$N' = 72 - 2 = 70; \quad \alpha = 2; \quad n = 70/14 = 5$$

Formula moleculară este

$$C_5H_{10+2-3}(COOH)(OH)(NH_2) \Rightarrow C_6H_{13}O_3N$$

3. *Limitele de utilizare a formulei de calcul*

Pentru aplicarea relaţiei (7) se impun două condiţii: a) determinarea masei moleculare să se poată efectua cu precizie suficientă, astfel ca eroarea de determinare să fie cuprinsă în limitele $0 < \varepsilon < 1$; b) să

existe posibilitatea de a efectua analiza funcțională cantitativă (pentru care nu se cere o precizie prea mare).

a) Precizia determinării masei moleculare se impune pentru calcularea corectă a lui α.

Pentru o serie de substanțe avînd același număr de atomi de carbon dar valorile lui α diferite (α', α'', ... α^k) și cărora le corespund masele moleculare teoretice M', M'' ... M^k, se pot scrie relațiile:

$$M' - \alpha' = M'' - \alpha'' = \ldots = M^k - \alpha^k \tag{9}$$

(10)

$$M' - M'' = M'' - M''' = \ldots M^{k-1} - M^k = 2 \tag{11}$$

Dacă masa moleculară determinată experimental este M_p, ea trebuie să fie cuprinsă între două valori teoretic posibile, de exemplu M' și M''. Cînd $M' > M''$ și $\alpha' > \alpha''$ (pentru același număr de atomi de carbon în moleculă) rezultă că

$$\alpha' - \alpha'' = M' - M'' = 2 \tag{12}$$

Presupunînd că eroarea ε de determinare a masei moleculare este $\varepsilon = 1$, urmează că

$$M_p = M' - 1 = M'' + 1; \text{ și } M' - M'' = 2 \tag{13}$$

astfel că nu se poate alege între cele două valori teoretic posibile, M' și M''. Cu atît mai mult alegerea este imposibilă cînd $\varepsilon > 1$.

Dacă $\varepsilon > 1$, eroarea determinării experimentale se poate calcula față de M' și M''.

$$\varepsilon_1 = M' - M_p \tag{14}$$

$$\varepsilon_2 = M_p - M'' \tag{15}$$

Adunînd relațiile (14) și (15)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = M' - M'' = 2 \tag{16}$$

se vede că în cazul cînd $\varepsilon_1 < 1$, în mod necesar $\varepsilon_2 > 1$, iar $\varepsilon_1 = 2 - \varepsilon_2 < 1$. Este evident că dintre valorile M' și M'', cea mai probabilă este aceeia pentru care diferența $M - \varepsilon$ este mai mică (în cazul nostru M').

De aceea, criteriul care exprimă condiția necesară și suficientă pentru precizia determinării maselor moleculare poate fi redat prin una din relațiile

$$0 < \varepsilon < 1; \quad M' - \varepsilon > M'' + \varepsilon; \quad M' - M'' - 2\varepsilon > 0 \tag{17}$$

Metodele curente utilizate în laboratoarele de Chimie organică, pentru determinarea maselor moleculare nu oferă întotdeauna certitudinea acestei precizii. Precizia determinării scade cu creșterea masei

moleculare. Pentru substanţele cu mase moleculare $M < 100$, eroarea relativă admisă ar corespunde la 1%, pentru $100 < M < 200$ la 0,5%, pentru $200 < M < 300$ la 0,25% etc. faţă de valoarea teoretică a masei moleculare.

Ţinînd seamă că eroarea relativă general admisă în determinările analitice este de 0,5%, pentru unele substanţe organice cu $M < 200$ s-ar putea folosi relaţia (7) şi s-ar putea evita analiza elementară.

Erorile la determinarea maselor moleculare se datoresc mai ales următoarelor două cauze:

— Imperfecţiunea aparaturii şi metodei;

— Legăturilor noi care se stabilesc între probă şi solvent cînd determinarea masei moleculare se efectuează într-un solvent (metodele crioscopice, ebulioscopice, a presiunii osmotice, etc.).

Pentru mărirea ariei de utilizare a relaţiei (7) s-ar impune în primul rînd perfecţionarea metodelor de determinare a maselor moleculare, cu atît mai mult cu cît analiza elementară a substanţelor organice este lipsită de valoare dacă nu este completată cu o metodă corespunzătoare pentru determinarea maselor moleculare.

Exemplul I. Masa moleculară a unei hidrocarburi, determinată experimental, este 77,6. Să se calculeze formula moleculară a hidrocarburii.

Rezolvare.

$$M' = 78; \quad M'' = 76; \quad \varepsilon = 78 - 77{,}6 = 0{,}4$$

$$M' - \varepsilon = 78 - 0{,}4 = 77{,}6; \quad M'' + \varepsilon = 76 + 0{,}4 = 76{,}4$$

Sînt îndeplinite condiţiile pentru M':

$$\varepsilon = 0{,}4 < 1; \quad M' - \varepsilon = 77{,}6 > M'' + \varepsilon = 76{,}4;$$

$$M' - M'' - 2\varepsilon = 1{,}2 > 0$$

Masa moleculară teoretică este $M' = 78 = M$

$$M - \alpha = 78 - (-6) = 84; \quad \alpha = -6; \quad n = 84/14 = 6$$

Formula hidrocarburii este

$$C_6H_{12-6} \Rightarrow C_6H_6$$

Exemplul II. Masa moleculară a unei substanţe, determinate experimental, este 91,5. Ea conţine trei grupe hidroxil. Se cere formula moleculară a substanţei.

Rezolvare.

Substanţa va fi de forma $C_nH_{2n+\alpha-3}(OH)_3$. Ea provine de la o hidrocarbură a cărei masă moleculară $M_k = M_p - 3\,(17 - 1) = 91{,}5 - 48 = 43{,}5$ (fiecare OH înlocuieşte un H). Masa moleculară teoretică a hidro-

carburii va fi 44 sau 42, iar a substanței date 44 + 48 = 92 sau 42 + + 48 = 90.

$$\varepsilon = 92 - 91{,}5 = 0{,}5 < 1\,; \quad M = 92$$

$$M' = 92 + 3 - 3 \cdot 17 = 44$$

$$N = 44 - 2 = 42\,; \quad \alpha = 2$$

$$n = 42/14 = 3$$

Formula substanței este

$$C_3H_{6-1}(OH)_3 \Rightarrow C_3H_5(OH)_3 \Rightarrow C_3H_8O_3$$

b) Determinarea cantitativă a grupelor funcționale se poate realiza cu metodele curente la majoritatea substanțelor organice, iar rezultatele sînt utilizabile chiar și atunci cînd eroarea de determinare atinge 5 — 10%.

Dificultăți mai însemnate apar în diversele clase de combinații heterociclice.

Determinarea azotului heterociclic, ca funcție amino, nu ridică în general probleme deosebite, azi existînd metode de analiză specifice pentru bazele foarte slabe, mai ales cînd în heterociclu există un singur atom de azot.

Cînd compusul heterociclic conține mai mulți atomi de azot (diazine, triazine, terazine) sau în cazul mai multor heteroatomi diferiți (de exemplu în triazine, oxazine etc.) numărul heteroatomilor nu poate fi stabilit prin analiză funcțională.

Catedra de chimie generală
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

C.Z.: 547.654.1

NAPHTHENIC NITRILES AND NAPHTHENIC AMINES

I. DRIMUS, I. ILIUȚĂ

In literature, very few data are to be found about the manufacture and properties of nitriles and amines obtained from naphthenic acids.

Since certain USSR crude oils contain larger amounts of naphthenic acids than other crudes, to render beneficial these acids from the chemical point of view has occupied especially the Soviet researchers.

In the present work, some problems concerning the preparation of nitriles and amines from naphthenic acids extracted from Romanian crudes have been studied.

Naphthenic nitriles

Naphthenic nitriles are prepared by treating naphthenic acids with ammonia. The following reactions take place :

$$RCOOH \xrightarrow[\sim 80°C]{+NH_3} RCOONH_4 \xrightarrow[\simeq 200°C]{-H_2O} RCONH_2 \xrightarrow[\sim 300°C]{-H_2O} RCN$$

The reaction may be carried out with or without a catalyst, continuously or by the batch process, in the liquid or in the gaseous phase.

Jakushkin and Botchearova (1) have achieved this synthesis in a continuous plant with aluminium oxide as catalyst, using ammonia gas and a commercial naphthenic acid cut, having mean molecular weight 222, acidity index 253 mg KOH/g, and boiling range at 7 mm Hg of 140 to 219°C. The reaction conditions were : rate of feed of the acids 0.3 l/h, temperature 350 to 370°C, molar ratio of acids to ammonia 1 : 10 to 1 : 15, the yield being 96 to 99% and the amide content 0.4 to 0.52%. The catalyst maintained its activity through 280 hours.

The USSR Patent of 1970 (2) proposes a similar way of manufacturing.

Kozlov and Starkova (3) obtained naphthenic nitriles by esterification of naphthenic acids with methyl ether and ammonolysis of the corresponding esters using distilled napthenic acids obtained from a Permsk crude cut. The esterification was carried out at 320°C and 50 at with a 61% yield with respect to the introduced acid, and the esters were

Manuscript received 16 December 1971

treated with ammonia gas at 11 at and 380°C on active aluminium oxide as catalyst, obtaining a 80.7% yield. Three fractions corresponding to the C_{13}, C_{14} and C_{15} acids were separated.

Using Romanian naphthenic acids to obtain naphtenic nitriles, we found that the reaction took place, for a g reat part, without a catalyst at atmospheric pressure and temperature 250 to 320°C, only the light cuts which were vapourized during the process at temperatures above 280°C had to be passed over an aluminium oxide catalyst at 350°C. Thus, the catalyst is less required and implicitly its life increases.

A 95% yield of raw nitriles was attained, the nitriles being distilled at 16 mm Hg to obtain two fractions : the light fraction with distillation range 124 to 180°C and the heavy fraction with distillation range 180 to 230°C.

Overall distillation yields was 82%.

In comparison to the methods described in literature, it was found that the Romanian naphtenic acids are converted to the nitriles under mild conditions, with yields near to those obtained in the conversion to nitriles of other acids and much higher than those obtained in the ammonolysis of esters.

Naphthenic amines

Maas (4) and Prinzler (5) showed that for the synthesis of naphthenic amines the following methods can be used :

a) the Hoffman method of amide degradation

b) the Curtius method

c) the Schmidt method (with a 70% yield, while in the first two methods the yield does not exceed 35—40%).

However, the most advantageous method of obtaining naphthenic amines is that starting from the naphthenic nitriles. To convert the latter to naphthenic amines, some researchers have used the reduction with sodium metal and absolute ethanol, obtaining a 85% yield with respect to the nitriles (3); (15).

But this method is difficult to carry out and expensive.

A Soviet patent (6) showed that naphthenic amines can be obtained by hydrogenation of naphthenic nitriles in the presence of the commercial catalyst nickel on chromium oxide, in an ammonia medium at 120 to 140°C and pressure 50 to 100 at with a 85% yield.

Using naphthenic nitriles with mean molecular weight 198 and distillation range at 10 mm Hg of 105—205°C, under the following conditions : temperature 130°C, pressure 100 at, rate of feed of the nitriles 0.15 1/h, of liquid ammonia 0.3 1/h, and of hydrogen 1.2 m^3/kg of nitrile, a 98 to to 99% yield was obtained, the hydrogenerated product containing 74% of primary amines and 26% of secondary amines, which can be separated by distilation, the primary naphthenic amines resulting in a 72.3% ratio with respect to the converted nitriles.

Another Soviet Patent (7) provides the preparation of secondary naphthenic amines by disproportionation of primary amines by heating them in a hydrogen stream over a Raney nickel or nickel on chromium oxide caralyst, the reaction being achieved with the conversion of 92to 94%,

at 120 to 140°C. Subsequent to the reaction, the mixture is distilled and the secondary amines separated, the rest of the products being recycled.

Other research work in the field of naphthenic amines was carried out by Kozlov (8), Nametkin (9) and Jakushkin (10).

The hydrogenetion of Romanian naphthenic nitriles was effected on Raney Ni (5% with respect to the nitriles) in the absence of solvents, in the reactor being reached a prior presure of 10 at NH_3, then of 20 to 100 at H_2. Temperature 120 $\pm$ 5°C, time 2 to 6 hours, vertical electromagnetic stirring, yield 95 to 96% as amine (of which 87% primary amines and 8 to 9% secondary amines).

By hydrogenation of the nitrile fractious and careful rectification of the obtained products eight naphthenic amine fractions were separated (Fig. 3).

Conclusion

Since in literature there are data about the possibility of utilizing naphthenic nitriles as plasticizers, solvents, oil additives (11), and naphthenic amines as flotation agents, fungicides, surfactants, corrosion inhibitors (3), (12), the study of these compounds seems justified from the economic point of view.

In most cases, the naphthenic amines can successfuly repllace fatty amines (in the synthesis of corrosion inhibitors, of lubricating oil additives, for bitumen, paints and varnishes).

The price of the naphthenic acids being lower than the price of natural or synthetic fatty acids (especially of those below C_{14}), the substitution of fatty acids by naphthenic acids in the manufacturing of the corresponding amines is proposed. The naphthenic amine derivatives offer moreover the advantage that, having a cyclic or branched hydrocarbon radical, in contrast with the straight chain of fatty acids, they are not attacked by microorganisms, are thus not biologically degradable and exert their effect a longer time than the normal fatty amines.

Experimental part

For the synthesis of naphthenic nitriles, as raw materials standard naphthenic acids were used, supplied by the SRR petroleum industry in there grades: type II, type III and type IV (Table 1).

Table 1

Physical-chemical properties of Romanian naphthenic acids

Crt. No.	Properties	Um.	Type II	Type III	Type IV
1.	Acidity index	mg KOH/g	242	229	209
2.	Saponification number	mg KOH/g	242	229	209
3.	Refraction index	n^{20}	1.4850	1.4900	1.4950
4.	Unsaponifiable, max.	D %	2.5	2.5	2.5
5.	Mean molecular weight		233	246	270
6.	Density	d_{20}	0.975	0.973	0,973

The Engler distillation of the three grades of acids was carried out, the results being presented in the graphs of Figure 1.

When analysing this graph, the conclusion is drawn that the three grades of naphthenic acids are formed, in general, of the same components, in different proportions, so as to give them the properties specified in the standards.

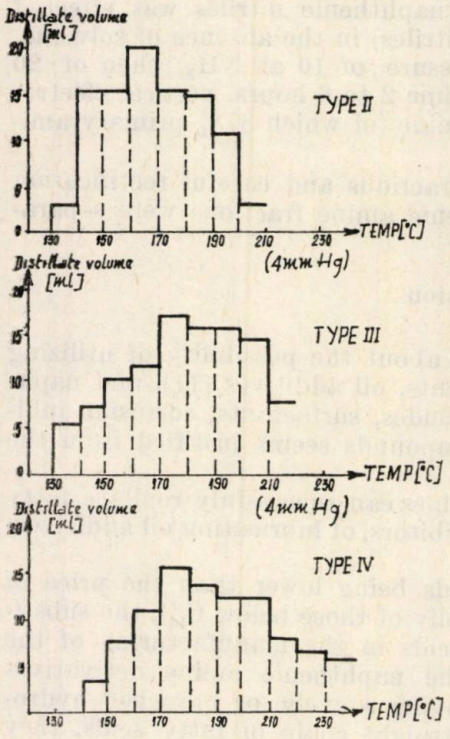


Fig. 1 Engler distillation of nphthenic acids (4 mÂ Hg)

To obtain naphthenic nitriles, there were effected two mixtures of the there grades, namely : a first mixture composed of type II acids and $\frac{1}{2}$ of type III acids, named acids 2—3 ; a second mixture formed of type IV acids and $\frac{1}{2}$ type III acids, named acids 4—3.

The acids 2—3 and 4—3 had the folowing properties (Table 2).

Nitriles synthesis

The nitriles synthesis was carried out in a metallic plant (Figure 2) composed of a cylindrical reactor (6) of following size : h = 1200 mm, Φ = 200 mm, made of V2A steel, into which up to 15 kg of naphthenic acids can be charged. Feeding of ammonia is made from cylinder (1) by the intermediary of buffer vessel (4), of one-way valve (5), on the line being also placed a mercury gauge (2) and a mercury safety relief valve (7).

The heating of the reactor is accomplished by direct firing. The plant is also provided with a condenser phase separator (8), (gauge (9)

Physical chemical properties of acids mixtures

Table 2

Crt. No.	Properties	UM	Acids 2—3	Acids 4—3
1.	.Acidity index	mg KOH/g	237	216
2.	Saponification number	mg KOH/g	237	216
3.	Refraction index	n^{20}	1.4882	1.4931
4.	Unsapon f able	D %	2.5	2.5
5.	Mean molecular we ght		237	260

and a safety relief valve (10) for the case that the pressure in the reactor would exceed a certain limit (1 at).

The plant was charged with 12 kg of naphthenic acids, heated gradually up to 150°C, then ammonia was bubbled through with a

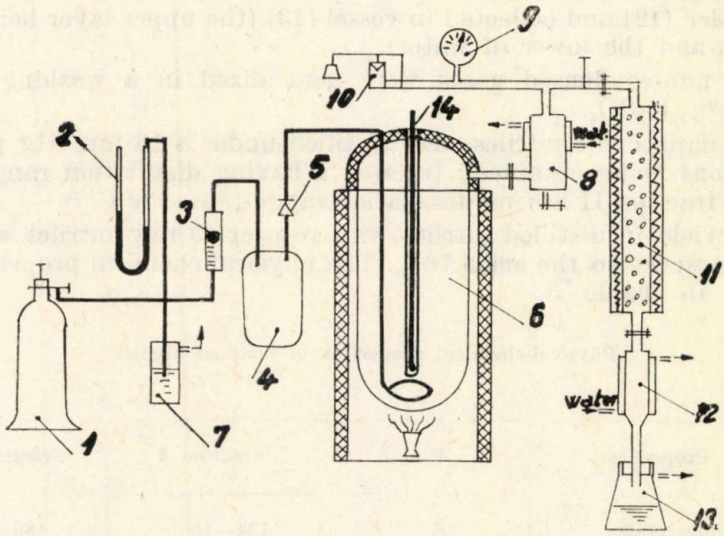


Fig. 2 Pilot plant for the nitrile synthesis.

rate of flow of 110 l/h. The rate of flow has to be lower at the beginning to avoid too abundant foaming and the passage of the foam into the condenser.

Subsequently the temperature was raised with about 30°C per hour during 5 hours up to the temperature of 300°C. At a more rapid heating, the light fractions distilled, carrying along more heavy fractions, not yet converted to nitriles, which gathered in the separator (8.)

As the light fractions distilled, it was possible to raise the temperature in the reaction vessel.

At a temperature of about 160°C, the collecting in the vessel 8 of a condensate composed of water and organic phase began. These latter could be separated quite easily. Water was removed from vessel (8) and was a measure of the reaction development. The light organic phase of vessel (8) was collected separately.

The reaction was continued until the acidity index of the reaction mass decreased below 5 mg KOH/g, then it was cooled and the plant emptied. The nitriles 2—3 and 4—3 were thus manufactured.

The 2—3 nitriles had an acidity index of 2 to 3 mg KOH/ml and the 4—3 nitriles an acidity index of 3 to 4 mg KOH/ml.

The reaction time for one batch was about 24 hours, the yeld being 95%.

The volatile products from several batches, composed of a mixture of acids, amides and nitriles, were gathered in a single batch and processed

as described above, with the difference that the separation vessel (8) was no more cooled with water and that the vapours from the reactory could enter column (11,) filled with Al_2O_3 granules, electrically heated to 350° ± ± 10°C.

The light nitriles and the water vapour formed in (11) were condensed in the cooler (12) and collected in vessel (13) (the upper layer being made on nitriles and the lower of water).

The non-condensed gases were neutralized in a washing column with a 5% H_2SO_4.

The naphthenic nitriles were distilled under a 16 mm Hg pressure, two fractions being obtained: fraction I having distillation range 124—180°C and fraction II having distillation range 180—230°C.

The yield in distilled nitriles with respect to raw nitriles was 82% and with respect to the acids 78%. The physical chemical properties are-presented in Table 3.

Physical-chemical properties of distilled nitriles

Table 3

Crt. No.	Propert es	U.M.	Fraction I	Fraction II
1.	Boiling range	°C	124—180	180—230
2.	Total nitrogen (Kjeldahl)	%	7.03	5.70
3.	Refraction index	n^{20}	1.4696	1.4842
4.	Density	d_{20}	0.922	0.925

Amines synthesis

The hydrogenation was carried out in stainless steel autoclaves of 4 litres capacity, provided with electromagnetic stirring and electrical heating, with a commercial Raney nickel catalyst in an amount of 5% of the nitriles.

In prior works in our laboratory, we carried out hydrogenations using as solvent methanol satureted with ammonia in order to avoid the obtaing of secondary or tertiary amines.

To increase the plant efficiency, we experimented the hydrogenation without solvent, by bubbling ammonia gas through the nitrile mass until saturation, and noticed that the naphthenic nitriles dissolved the ammonia. The hydrogenation was effected at 115 ± 5°C and pressure 20 to 100 at, the reation time being 2 to 6 hours.

The filling of the autoclave was performed with a filling coefficient of 0.5 to 0.66. The yield was 96 to 98%.

At the end of the hydrogenation of and the filtration of the amines from the catalyst, two amine fractions were obtained, having the following properties (Table 4).

Physical-chemical properties of naphtenic amines

Table 4

Crt. No.	Properties	U.M.	Fraction I	Fracton II
1.	Distillation range at 4 mm Hg	°C	78—134	103—180
2.	Density	d_{20}	0.890	0.910
3.	Refraction index	n	1.4760	1.4872
4.	Total nitrogen (Kjeldahl)	%	6.00	4.95
5.	Total amino nitrogen	%	5.95	4.70
6.	Primary amino nitrogen	%	5.45	4.50
7.	Secondary amino nitrogen	%	0.50	0.20
8.	Primary amines	%	85	92
9.	Secondary amines	%	15	9

The amine fractions were distilled successively, under the same pressure of 4 mm Hg, combining subsequently the fractions having same distillation range of the two distillations.

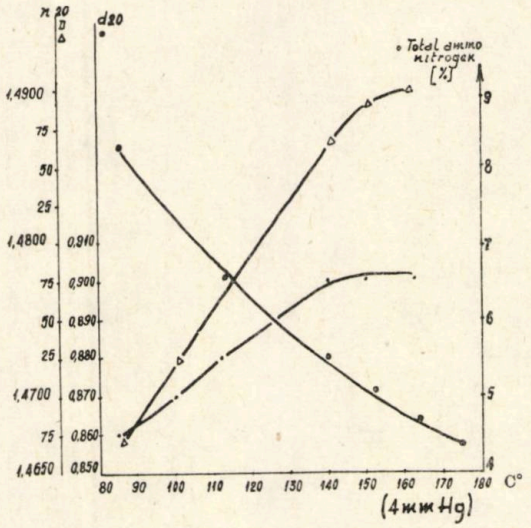


Fig. 3 The variation of some properties of the amine fractions with distillation temperature.

The physical constants which were determined are presented in the graphs of Figure 3.

Laboratory of Chemical Organic Technology
[Polytehnical Institut „Gheorghe Gheorghiu—Dej"
Bucharest

REFERENCES

1. *Iakușkin, M. I. Botcharova, E. M.* Himiceskaia prom., *11*, 1965, p. 813.
2. * * * USSR Patent 260, 628/1970.
3. *Kozlov, N. S., Starkova, L. M.*, IZV. VUZ Him., 6, 1967, p. 650.
4. *Maas, W. F.*, Naphthensäuren und Naphthenate, Augsburg, 1965.
5. *Prinzler, H.* Naphthensäuren, Leipzig, 1963.
6. * * * USSR Patent 191, 573/1967.
7. * * * USSR Patent 228, 695/1969.
8. *Kozlov, N. S.*, Tr. Perm. Gos. Selskohoz. Inst., *38*, 1967, p. 114.
9. *Nametkin, N. S., Egorova, G. M., Potanov, G. P.* Neftehim, *10*, 1, 1970, p. 116.
10. *Iakușkin, M. I., Blinova, M. V., Bazileva, R. V.* Him prom., 4, 1968, p. 265.
11. *Stepek Z.* Chemical Industry, Selective book, 11, 1960, p. 27.
12. * * * US Patent 2 818 383/1957.
13. *Kraus, H.* Tenside, *5*, 9—10, 1968, p. 283.
14. *Drimuș, I.* Rev. de Chim. ASIT, 4, 1955, p. 189—192.
15. *Drimuș, I., Lupu, A., Badiu, P., Lazăr, M.* Romanian Patent 50,468/1968.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

C.Z.: 541. 1:66

IONITI LICHIZI – CONSIDERAȚII FIZICO-CHIMICE ASUPRA UTILIZĂRII IN TEHNOLOGIA CHIMICĂ *

SILVIA DANEȘ, F. DANEȘ

Mod de utilizare

Ioniții lichizi sînt substanțe cu caracter de baze sau acizi Lewis, insolubile în apă ca și schimbătorii de ioni solizi, dar spre deosebire de aceștia, solubile în solvenți organici.

Ca stare proprie de agregare ioniții „lichizi" pot fi substanțe lichide sau solide, dar ei se utilizează numai după dizolvare sau diluare cu solvenți imiscibili cu apa. Deși ioniții cu stare proprie de agregare lichidă s-ar putea folosi ca atare, diluarea lor este necesară datorită viscozității lor mari [12].

Ca urmare apar deci mai totdeauna aplicații în operații unitare de tipul extracției lichid-lichid.

Există o gamă largă de solvenți utilizați, cel mai frecvent apărînd hidrocarburile alifatice și aromatice, urmate de derivați cloruraţi ca tetraclorura de carbon, cloroformul, triclor-etilena [5,17], de alcooli, nitrobentzen [18] etc. Solvenții utilizați trebuie să dizolve ioniții lichizi, să aibă solubilitate reciprocă cu apa cît mai mică și să îndeplinească o serie de cerințe tehnologice legate de volatilitate, toxicitate, preț de cost etc. Natura solventului influențează în mare măsură proprietățile de extracție ale sistemului.

Concentrația soluției de ionit lichid în solvent organic ar fi de dorit să fie cît mai mare, pentru a nu reduce prea mult capacitatea volumetrică a fazei organice. Soluțiile de ionit lichid prea concentrate au însă viscozitatea mare. În plus, în contact cu faza apoasă ele formează emulsii sau noi faze mixte, ceea ce duce la pierderi de ionit și la scăderea eficienței procesului de extracție sau de separare. De aceea, după natura sistemului de lucru și obiectivul urmărit, se recomandă concentrații ale ionitului lichid de 2% [15] pînă la 20% [12].

Ioniții lichizi se prepară prin metode curente ale tehnologiei chimice organice (aminări, acilări, esterificări etc.). În [12, 16] sînt descrise o serie de metode de sinteză.

* Manuscris predat redacției la data de 25 martie 1971.

De reținut că metodele de preparare folosite pentru obținerea ioniților lichizi prezintă anumite avantaje față de cele pentru ioniții solizi (de exemplu rășini) [7]: sînt mai simple, nu necesită adaos de reticulanți, prezintă o oarecare elasticitate, se poate varia ușor și în limitele largi capacitatea și afinitatea relativă pentru diverși ioni a ionitului lichid, — se obțin ușor ioniți cu selectivitate mare [11].

Pentru a îndeplini cerințele fundamentale (capacitatea de a lega anioni sau cationi, acizi sau baze, insolubilitate în apă și solubilitate în medii organice), ioniții lichizi trebuie să aibă molecula constituită din două părți [9]:

— partea polară, constituită dintr-o grupă funcțională (amină pentru anioniți; în general acid fosforos sau fosforic substituiți la atomul P, pentru cationiți), ce imprimă caracterul de ionit.

— partea nepolară, hidrocarbonată, conferind comportarea hidrofobă și organofilă. Această parte a moleculei poate fi aromatică sau alifatică, liniară sau ramificată, de dimensiunile ei depinzînd în special masa moleculară a ionitului, care este de ordinul 300—1000.

Acestei mase moleculare îi corespunde o capacitate q_0 a ionitului propriu zis de 1—3 mval/g; dar fiindcă ioniții lichizi se utilizează diluați apare drept caracteristică tehnologică capacitatea q_0 a fazei organice, care este adesea de numai 0,05 — 0,1 n, fiind deci mult mai mică decît capacitatea volumetrică a schimbătorilor de ioni solizi. Acest lucru reprezintă un dezavantaj al ioniților lichizi, limitînd aplicarea lor în practică la extracția și separarea unor componenți mai valoroși.

Emulsionarea ioniților lichizi.

Deși aplicarea ioniților lichizi este mai simplă decît a ioniților solizi (sistemul fiind lichid-lichid și nu lichid-solid este mai ușoară trecerea la procedee continue și automatizabile), ea prezintă dezavantajul pierderilor inerente de solvent și de ionit lichid, cauzate atît de miscibilitatea — mică dar măsurabilă — a celor două faze (cationiții lichizi de exemplu se dizolvă în apă în proporție de 1÷20 ppm [12]), cît și de separarea imperfectă a fazelor. Pierderile cresc foarte mult dacă se formează în sistem faze noi (de exemplu precipitate) sau dacă apar emulsii. Acest ultim fenomen este foarte frecvent deoarece datorită structurii polar-nepolare, ioniții lichizi au pro-prietăți de emulgatori).

Tendința de emulsionare crește cu creșterea concentrației ionitului lichid în faza organică și cu ridicarea temperaturii. Formarea emulsiilor și apariția fazelor noi depinde de asemenea de compoziția fazei apoase. Astfel, în sistemele studiate de noi (faze organice compuse din amine alifatice primare și secundare, dizolvate în solvenți hidrocarbonați alifatici și aromatici sau în halogenoderivați alifatici; faze apoase conținînd acizi clorhidric, sulfuric, azotic, sărurile corespunzătoare de sodiu, cupru, zinc, fier sau hidroxid de sodiu) [22, 23] am constatat că tendința de emulsionare crește odată cu diluarea soluției, mai ales la concentrații sub 10^{-2} n. Tendința de emulsionare variază cu electrolitul din soluție, crescînd în ordinea: săruri ale metalelor grele-acizi minerali — săruri ale metalelor alcaline. Aminele alifatice primare conferă o tendință de emulsionare

mai mare decît cele secundare. Formarea emulsiilor este favorizată de prezența unei faze solide dispersate în sistem.

În practică se preferă prevenirea emulsionării și nu spargerea emulsiei. La etapa de extracție (trecerea unui metal din faza apoasă în faza organică) prevenirea emulsionării se realizează prin alegerea solventului adecvat.

Dintre caracteristicile fizice ale sistemului intervin, în special, doi factori care favorizează emulsionarea : tensiunea interfacială redusă (în loc de tensiune interfacială, la alegerea solventului se ține cont de obicei de diferența dintre tensiunile superficiale ale fazei apoase și fazei organice) și diferența mică între densitățile celor două faze. Petrolul lampant este din acest punct de vedere solventul indicat pentru multe extracții cu ioniții lichizi ale compușilor anorganici (U, Th, elemente transuranice etc.).

La diferența de densități între cele două faze trebuie ținut cont că în cursul procesului de extracție metalul trece în faza organică, astfel încît densitatea fazei apoase scade, iar cea a fazei organice crește. Pentru a evita egalarea densităților celor două faze se preferă uneori utilizarea unor solvenți mai grei decît apa (CCl_4), fapt care produce însă dificultăți la reextracție, cînd metalul trece din faza organică în faza apoasă și deci se micșorează densitatea fazei organice și crește cea a fazei apoase.

Prevenirea formării emulsiilor la reextracție se face uneori prin adăugare de sălifiant (electrolit solubil în faza apoasă), unul din cei mai utilizați fiind clorura de amoniu. Formarea emulsilor este de asemenea favorizată de o agitare foarte violentă. La stabilirea metodei și intensității de agitare trebuie ales un compromis, astfel încît suprafața de contact a fazelor să fie destul de mare, fără a se forma totuși emulsii stabile.

Emulsiile odată formate sînt dificil de spart. Metoda cea mai indicată pare filtrarea sub presiune deși eficacitatea acesteia este relativ redusă.

Caracteristici fizico-chimice ale extracției cu ioniți lichizi

Mecanismul extracției cu ioniți lichizi poate fi atît de extracție propriu zisă a unei specii moleculare (eventual a unui asociat ionic) cît și de schimb ionic [9]. Deseori procesul poate fi descris formal fie în termeni ai echilibrului de extracție fie ca echilibru de schimb ionic, cu rezultate echivalente din punct de vedere al echilibrului [3], alteori nefiind posibilă decît una din cele două variante. În majoritatea cazurilor însă cele două procese decurg în paralel în mod independent [9], ceeace face necesară caracterizarea echilibrului prin două constante.

Din cauza structurii polar-nepolare, moleculele de ioniți lichizi în faza organică au o pronunțată tendință de asociere (de tip micelar, ca la soluțiile apoase de săpun), mergînd pînă la formarea unor agregate de dimensiuni foarte mari, considerate formal ca o fază independentă [9]. Tendința de asociere, care complică și mai mult echilibrul, pare să fie mai caracteristică pentru forma „sare" decît pentru formele acidă respectiv bazică a ioniților lichizi.

Echilibrul este complicat suplimentar prin participarea la formarea agregatului micelar din faza organică a mai multor specii ionice din faza apoasă, eventual și a unor molecule de apă sau de solvent organic.

Selectivitatea ioniților lichizi variază în mod asemănător cu cea a schimbătorilor de ioni solizi (de altfel și proprietățile electrochimice ale ioniților lichizi, studiate în [1. 2], prezintă un anumit paralelism cu ale schimbătorilor de ioni solizi). Apar însă anumite particularități ale extracției cu ioniți lichizi, și anume :

— în cazul ioniților lichizi afinitatea pentru un ion crește cînd cresc proprietățile hidrofobe ale ionului, adică atunci cînd gradul de hidratare scade, datorită creșterii razei ionului în stare cristalină sau scăderii sarcinii sale electrice [4].

— constanta dielectrică a fazei organice este mică chiar în contact cu o fază apoasă (deoarece solubilitatea apei în faza organică este redusă). De aceea grupele active sînt puternic asociate cu contraionul.

În consecință :

a) sorbția electrolitului este foarte mică [7] (ca urmare selectivitatea nu se înrăutățește la concentrații mari) ;

b) ioniții lichizi au tărie redusă (deși între ei există diferențe de tărie) [9], cu excepția interesantă a cationitului lichid „acid dinonilnaftalinsulfonic", descris în [20, 21], comparabil cu cationiții rășini puternic acizi de tip polistirensulfonic.

Cinetica extracției cu ioniți lichizi este încă relativ puțin studiată. Totuși s-a putut stabili că :

— timpul necesar stabilirii echilibrului diferă foarte mult de la o specie ionică la alta (de la minute la zile) ceeace ar putea constitui o bază pentru separări după [12].

— timpul necesar stabilirii echilibrului este mult mai mic în cazul ioniților lichizi decît a celor solizi (avantaj tehnologic), deosebire ce se accentuează pentru cazul ionilor voluminoși ; de exemplu pentru $[UO_2(SO_4)_3]^{-4}$, ion ce apare la extracția U (VI) din mediul sulfuric, acest timp este pentru o soluție de trioctilamină de 1000 ori mai mic decît pentru anionitul rășină EDE 10 P [13].

Viteza mult mai mare a procesului de extracție cu ioniți lichizi în comparație cu viteza schimbului cu ioniți-rășini este explicată [8] prin lipsa reticulantului (de unde buna circulație internă), ca și suprafața de contact a fazelor mult mai mare (în cazul unei agitări bune) a sistemului lichid-lichid în comparație cu ioniții solizi de granulație normală.

Ioniții lichizi sînt rareori tratați în literatură ca o clasă specială de solvenți-extragenți, fiind studiați de obicei printre extragenți [4, 6, 14] sau printre schimbători de ioni [7, 15, 16]. Puținele lucrări de revieware ale domeniului apărute pînă în prezent [9, 10, 12, 19], nu prezintă decît aspecte izolate, fără a trata în mod corespunzător posibilitățile de aplicare ale ioniților lichizi în diferitele ramuri ale tehnologiei.

Catedra de chimie fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Bonhoeffer K. F., Kahlweit M., Strehlow M.* — Z. Elektrochem. — *57*, 614 (1953).
2. *Bonhoeffer K. F., Kahlweit M., Strehlow M.* — Z. phys. Chem. (N. F.) — *1*, 21 (1954).
3. *Coleman C. F.* — Nucl. Sci. Eng. — *17*, 274 (1963.
4. *Diamond R. M., Tuck D. G.* Extraction of Inorganic Compounds Into Organic Solvents, ed. rusă, Gosatomizd., Moscova 1962, p. 45.

5. *Ellenburg J. Y., Leddicotte H. W., Moore F. L.* — Anal. Chem. — *26*, 1045 (1954)
6. *Fomin V. V.* Chimia proceselor de extracţie, Atomizd., Moscova 1960, p. 12.
7. *Helfferich F.* Ionenaustauscher, ed. rusă, Inlitizd., Moscova 1962, p. 22.
8. *Hendricks S. B.* — Ind. Eng. Chem. — *37*, 625 (1945).
9. *Högfeldt E.*, Ion Exchange. A Serie of Advances, ed. by J. A. Marinsky, tome I, N.Y. 1966, 9. chap.
10. *Knoch W.* — Oesterr. Chem. Ztg. — *63*, 349 (1963).
11. *Korossy F.* — Nature — *198*, 882 (1963).
12. *Lascorin B. N.* în cul. Sorbenţii ionitici în industrie, ed. Acad. Nauc. SSSR, Moscova 1963, p. 48.
13. *Lascorin B. N., Zefirov A. P., Scorovarov D. I.* — Atom. Energiia — *8*, 519 (1960).
14. *Morrison G. H., Freiser H.*, Solvent Extraction in Analytical Chemistry, J. Wiley, N.Y. 1957, p. III, 2, chap.
15. *Olenovič N. L., Rogackč M. M.* în cul. Tehnologia ionitică, ed. Nauca, Moscova 1965, p. 241.
16. *Plaksin I. N., Tătaru S. A.* Hidrometalurgia cu utilizarea ioniţilor, ed. Metallurgia, Moscova 1964, p. 23.
17. *Schindewolf U.* — Z. Elektrochem. — *62*, 335 (1958).
18. *Smith E. L., Page E. J.* — J. Soc. Chem. Ind. (London) — *67*, 48 (1948).
19. *Speaker H.* Flüssige Ionenaustauscher, în serie Ionenaustauscher in Einzeldarstellungen *1*, 71 (1962).
20. *White J. M., Tang P., Li N. C.* — J. Inorg. Nucl. Chem. — *14*, 255 (1960).
21. *White J. M., Kelly P., Li N. C.* — J. Inorg. Nucl. Chem. — *16*, 337 (1961).
22. *Daneş Silvia* — Dizertatie, I.P.B. 1971.
23. *Daneş Silvia, F. Daneş* — Revista de chimie *22*, 275 (1971).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

MECANICĂ

C.Z.: 621—23

O METODĂ GRAFICĂ GENERALĂ PENTRU ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR PLANE *

NICOLAE I. PANDREA

A. Introducere

Metodele grafice au constituit mult timp principalul instrument pentru analiza cinematică a mecanismelor în general și pentru analiza cinematică a mecanismelor plane în special.

Folosirea calculatoarelor pe scară tot mai întinsă în toate domeniile a făcut ca cercetările recente în Teoria mecanismelor să fie îndreptate spre a determina metode analitice de calcul, pentru ca astfel calculatoarele să aducă contribuția lor și în această disciplină.

Paralel cu dezvoltarea metodelor analitice s-au dezvoltat în continuare și metodele grafice. Astfel, au apărut metode noi de analiza cinematică și anume:

— metoda schimbării elementului motor
— metoda schimbării bazei
— metoda coeficienților de influență.

Considerăm că dezvoltarea metodelor analitice a atras după sine perfecționarea metodelor grafice.

A renunța la folosirea metodelor grafice înseamnă a renunța și la o serie de interpretări imediate ce se desprind atunci cînd se folosesc aceste metode.

Majoritatea metodelor grafice de analiză cinematică cunoscute se pot însă aplica numai după o procedentă analiză structurală pe grupe assurice.

Pe de altă parte, o anumită metodă grafică cunoscută se poate aplica la o anumită structură a mecanismului.

Faptul că metodele grafice cunoscute nu sînt suficient de generale, constituie un inconvenient în considerarea lor.

Lucrarea de față, folosind unele considerații teoretice din lucrarea [1], își propune să elaboreze o metodă grafică generală de analiză cinematică pentru mecanismele plane.

După cum se va vedea, pentru a aplica această metodă nu trebuie să se facă o analiză precedentă a grupelor assurice.

* Manuscris predat redacției la data de 10 noiembrie 1971.

B. Bazele teoretice ale metodei

Este unanim recunoscut, așa cum rezultă și din lucrarea [2], că studiul cinematic al unui mecanism trebuie să înceapă prin a determina o bază de cicluri independente.

Să considerăm un ciclu oarecare al acestei baze (fig. 1).

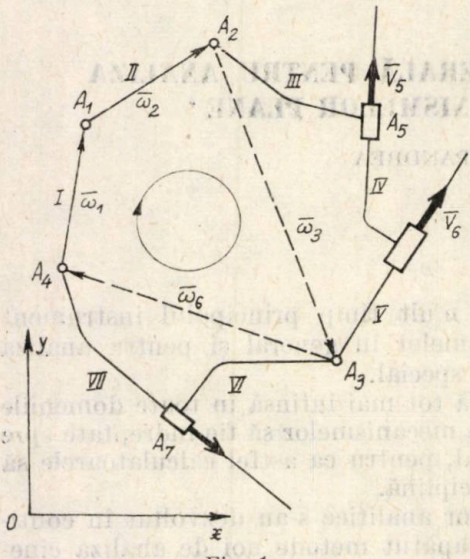


Fig. 1

Pentru a simplifica demonstrațiile vom considera ciclul format din șapte elemente legate între ele prin șapte cuple de clasa a cincea.

Să notăm cuplele de rotație în ordinea în care se succed prin A_0, A_1, A_2, A_3, $A_4 = A_0$; cuplele de translație prin A_4, A_6, A_7 cu $\overline{V}_5$, $\overline{V}_6$, $\overline{V}_7$, vitezele din cuplele de translație și cu I, II ... VII elementele ciclului.

Considerînd sensul de parcurgere din figura 1, rezultă că

$$\overline{V}_5 = \overline{V}_{A_{55}IV\, A_{5}III} \tag{1}$$

Cu toate că ciclul are șapte elemente există numai patru viteze unghiulare ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 (fig. 1), deoarece elementele III, IV, V legate prin cuple de translație, au aceiași viteză unghiulară ω_3 și analog elementele VI și VII au viteza unghiulară ω_4.

Să considerăm planul mecanismului drept planul Oxy al unui sistem de referință $Oxyz$.

Scriind ecuația de condiție [1] în varianta vitezelor unghiulare absolute, rezultă:

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{A_0A_1} + \overline{\omega}_2 \times \overline{A_1A_2} + \overline{\omega}_3 \times \overline{A_2A_3} + \overline{\omega}_4 \times \overline{A_3A_4} +$$

$$+ \overline{V}_5 + \overline{V}_6 + \overline{V}_7 = 0 \tag{2}$$

Ținînd seama de faptul că $\overline{\omega}_i = \omega_i \overline{K}$, $\overline{K}$ fiind versorul axei Oz relația (2) devine

$$\sum_{i=1}^{i=4} \omega_i \overline{K} \times \overline{A_{i-1}A_i} + \sum_{i=5}^{i=7} \overline{V}_i = 0 \tag{3}$$

Vectorul $\overline{K} \times \overline{A_{i-1}A_i}$ reprezintă vectorul $\overline{A_{i-1}A_i}$ rotit cu 90° în sens direct în planul Oxy și îl vom nota cu $\overline{A_{i-1}A_i}$.

Din relația (3) deducem

$$\sum_{i=7}^{i=7} X_i \overline{\rho}_i = 0 \tag{4}$$

unde

$$X_i = \begin{cases} \omega_i & \text{dacă } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ V_i & \text{dacă } i \in \{5, 6, 7\} \end{cases}$$

$$\overline{\rho}_i = \begin{cases} \overline{A_{i-1}A_i^*} & \text{dacă } i \in \{1, 2, 3. 4\} \\ \overline{U}_i, \text{ versorul vectorului } \overline{V}_i & \text{dacă } i \in \{5, 6, 7\} \end{cases}$$

Pentru un ciclu cu m elemente vom avea relația

$$\sum_{i=1}^{i=m} X_i \overline{\rho}_i = 0 \tag{5}$$

Dar nu toate mărimile de forma X_i din ecuația (5) sînt necunoscute. Dacă trecem în membrul drept mărimile cunoscute rezultă relația

$$\sum X_i \overline{\rho}_i = \overline{A} \tag{6}$$

Pentru un mecanism cu „n" cicluri independente va trebui să rezolvăm grafic sistemul

$$\sum_{j=1}^{2n} X_j \overline{\rho}_{ij} = \overline{A}_i \qquad i \in \{1, 2, \ldots n\} \tag{7}$$

Sistemul (7) scris descompus, devine:

$$\begin{aligned}
&X_1\overline{\rho}_{11} + X_2\overline{\rho}_{12} + X_3\overline{\rho}_{13} + \ldots X_{2n}\overline{\rho}_{12n} = \overline{A}_1 \\
&X_1\overline{\rho}_{21} + X_2\overline{\rho}_{22} + X_3\overline{\rho}_{33} + \ldots X_{2n}\overline{\rho}_{22n} = \overline{A}_2 \\
&X_1\overline{\rho}_{31} + X_2\overline{\rho}_{32} + X_3\overline{\rho}_{33} + \ldots X_{2n}\overline{\rho}_{32n} = \overline{A}_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&X_1\overline{\rho}_{n1} + X_2\overline{\rho}_{n2} + X_3\overline{\rho}_{n3} + \ldots X_{2n}\overline{\rho}_{n.2n} = \overline{A}_n
\end{aligned} \tag{8}$$

În prima ecuație vom descompune vectorii $\overline{\rho}_{13}, \ldots \overline{\rho}_{1.2n}$ după vectorii $\overline{\rho}_{11}$ și $\overline{\rho}_{12}$ astfel (fig. 2):

$$\begin{aligned}
&\overline{\rho}_{13} = \lambda_{13}\overline{\rho}_{11} + \mu_{13}\overline{\rho}_{12} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\overline{\rho}_{12n} = \lambda_{12n}\overline{\rho}_{11} + \mu_{12n}\overline{\rho}_{12}
\end{aligned} \tag{9}$$

În a doua ecuație vom **descompune** vectorii $\bar{\rho}_{23}, \bar{\rho}_{24} \ldots \bar{\rho}_{22n}$ astfel (fig. 2)

$$\bar{\rho}_{23} = \lambda_{13}\bar{\rho}_{21} + \mu_{13}\bar{\rho}_{22} + \bar{r}_{23}$$

$$\bar{\rho}_{24} = \lambda_{14}\bar{\rho}_{21} + \mu_{14}\bar{\rho}_{22} + \bar{r}_{24} \tag{10}$$

$$\bar{\rho}_{2,2n} = \lambda_{12n}\rho_{21} + \lambda_{12n}\bar{\rho}_{22} + \bar{r}_{2,2n}$$

iar în celelalte ecuații ale sistemului (8) vom face descompuneri asemănătoare celor din ecuația a doua.

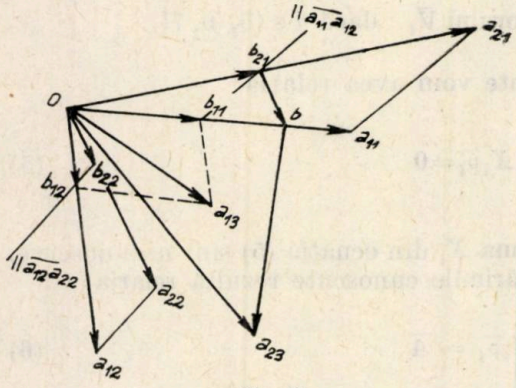


Fig. 2

În figura 2 am reprezentat descompunerile vectorilor $\bar{\rho}_{13}$, $\bar{\rho}_{23}$ conform relațiilor (9), (10), la o scară considerată K_s.

Se alege un punct 0 și se reprezintă vectorii :

$$\bar{\rho}_{11} = K_s(\overline{Oa_{11}}), \quad \bar{\rho}_{12} = K_s(\overline{Oa_{12}}),$$

$$\bar{\rho}_{13} = K_s(\overline{Oa_{13}}), \tag{11}$$

$$\bar{\rho}_{21} = K_s(\overline{Oa_{21}}), \quad \bar{\rho}_{22} = K_s(\overline{Oa_{22}}),$$

$$\bar{\rho}_{23} = K_s(\overline{Oa_{23}})$$

Din descompunerea vectorului $\bar{\rho}_{13}$ pe direcțiile vectorului $\bar{\rho}_{11}$, $\bar{\rho}_{12}$ rezultă

$$\lambda_{13}\bar{\rho}_{11} = K_s(\overline{Ob_{11}}); \quad \mu_{13}\bar{\rho}_{12} = K_s(\overline{Ob_{12}}) \tag{12}$$

Unim apoi punctele a_{11} cu a_{21}, a_{21} cu a_{22} și ducînd paralele prin b_{11} la $\overline{a_1a_{21}}$ respectiv prin b_{12} la $\overline{a_{12}a_{22}}$ obținem din asemănarea triunghiurilor

$$\Delta Ob_{11}\, b_{21} \sim \Delta O\, a_{11}\, a_{21} \tag{13}$$

$$\Delta O\, b_{22}\, b_{12} \sim \Delta O a_{22}\, a_{12}$$

$$\lambda_{13}\bar{\rho}_{21} = K_s(\overline{Ob_{21}}) \quad \mu_{13}\bar{\rho}_{22} = K_s(\overline{Ob_{22}}) \tag{14}$$

Construim apoi poligonul $Ob_{21}\, ba_{23}$ astfel încît

$$\overline{b_{21}b} = \overline{Ob_{22}} \tag{15}$$

și rezultă

$$\bar{r}_{23} = K_s(\overline{ba_{23}}) \tag{16}$$

În mod asemănător putem construi toți vectorii

$$\bar{r}_{ij} \quad \begin{matrix} i \in \{2, 3, \ldots n\} \\ j \in \{3, 4, \ldots 2n\} \end{matrix} \tag{17}$$

Ținînd seama de acestea sistemul (8) se scrie

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{11}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \ldots \lambda_{12n}X_{2n}) + \bar{\rho}_{12}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \ldots \mu_{12n}X_{2n}) = \bar{A}_1 \\
&\bar{\rho}_{21}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \ldots \lambda_{12n}X_{2n}) + \bar{\rho}_{22}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \\
&\quad + \ldots \mu_{12n}X_{2n}) + X_3\bar{r}_{23} + X_4\bar{r}_{24} + \ldots X_{2n}\bar{r}_{22n} = \bar{A}_2 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\bar{\rho}_{n1}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \ldots \lambda_{12n}X_{2n}) + \bar{\rho}_{n2}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \\
&\quad + \ldots \mu_{12n}X_{2n}) + X_3\bar{r}_{n3} + X_4\bar{r}_4 + \ldots X_{2n}\bar{r}_{n2n} = \bar{A}_n
\end{aligned} \tag{18}$$

Prima ecuație a sistemului (11) se poate rezolva grafic, alegînd o scară K_v și rezultă vectorii $\bar{\rho}_{11}(X_1 + X_{13}X_3 + \ldots \lambda_{12n}X_{2n})$ și $\bar{\rho}_{12}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \ldots \mu_{12n}X_{2n})$.

Cunoscînd acești vectori, printr-o construcție grafică analoagă se pot determina toți vectorii de forma $\bar{\rho}_{21}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \ldots \lambda_{12n}X_{2n})$.

Trecînd în partea dreaptă vectorii cunoscuți rezultă că sistemul (18) se transformă în sistemul

$$\sum_{j=3}^{2n} X_j\bar{r}_{ij} = \bar{B}_i \qquad i \in \{2, 3 \ldots n)\} \tag{19}$$

Aceasta înseamnă că am redus ordinul sistemului cu două unități.

Se procedează în continuare în mod analog pînă se ajunge la o singură ecuație vectorială.

Datorită faptului că două cicluri independente diferă cel puțin printr-un element, nu toate cele $2n$ necunoscute apar în fiecare ecuație a sistemului (8).

Această observație ne permite a afirma că metoda arătată, pe lîngă faptul că este generală este și destul de practică.

C. Cazuri particulare

1. *Mecanisme cu un singur ciclu independent* ($n = 1$)

În acest caz sistemul (8) se reduce la o singură ecuație vectorială și anume:

$$X_1\bar{\rho}_{11} + X_2\bar{\rho}_{12} = \bar{A}_1 \tag{20}$$

Această ecuație se rezolvă imediat (fig. 3)
Rezultă

$$X_2\bar{\rho}_{12} = K_v(\overline{Oa}_{12})$$

$$X_1\bar{\rho}_{11} = K_v(\overline{a_{12}a_{11}})$$

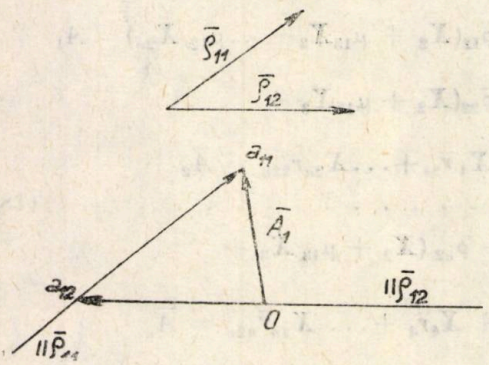


Fig. 3

2. *Mecanisme cu două cicluri independente* ($n = 2$)

În acest caz sistemul (8) devine:

$$X_1\bar{\rho}_{11}+X_2\bar{\rho}_{12}+X_3\bar{\rho}_{13}+X_4\bar{\rho}_{14} = \bar{A}_1 \quad (21)$$

$$X_1\bar{\rho}_{21}+X_2\bar{\rho}_{22}+X_3\bar{\rho}_{23}+X_4\bar{\rho}_{24} = \bar{A}_2$$

Se fac descompunerile din fig. 4.

Unde $\bar{\rho}_{ij} = K_s(\overline{Oa}_{ij})$ $i = 1, 2$
$j = 1, 2, 3, 4.$

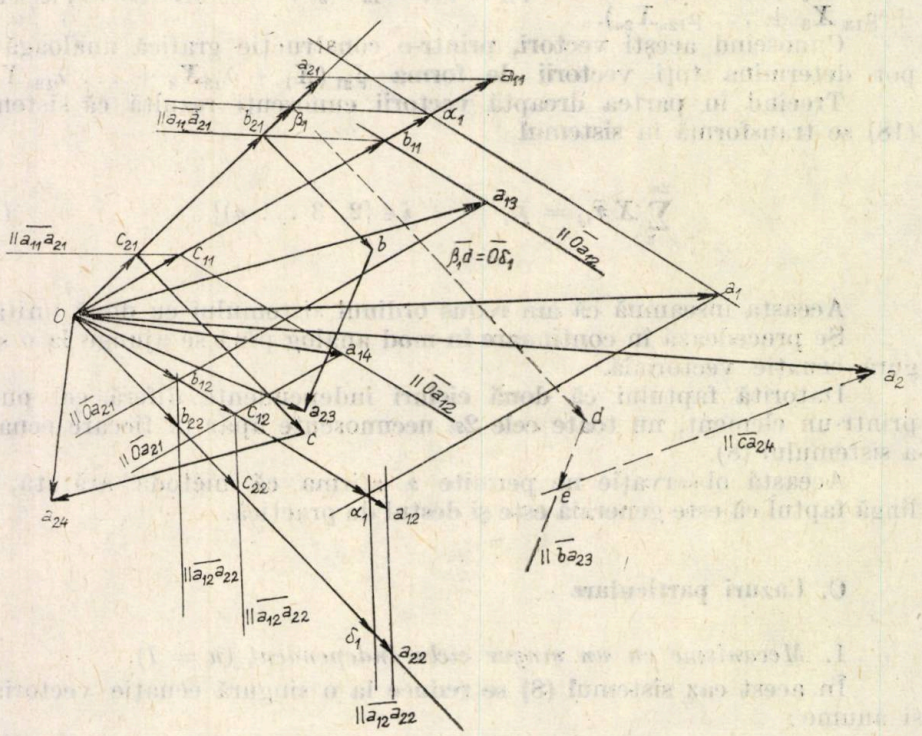


Fig. 4

Conform fig. 4 avem :

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}_{13} &= K_s(\overline{Ob}_{11} + \overline{Ob}_{12}) = \lambda_{13}\overline{\rho}_{11} + \mu_{13}\overline{\rho}_{12} \\
\overline{\rho}_{14} &= K_s(\overline{Oc}_{11} + \overline{Oc}_{12}) = \lambda_{14}\overline{\rho}_{11} + \mu_{14}\overline{\rho}_{12} \\
\overline{\rho}_{23} &= K_s(\overline{Ob}_{21} + \overline{b_{21}b} + \overline{ba}_{23}) = \lambda_{13}\overline{\rho}_{21} + \mu_{22}\overline{\rho}_{22} + \overline{r}_{23} \\
\overline{\rho}_{24} &= K_s(\overline{Oc}_{21} + \overline{c_{21}c} + \overline{ca}_{24}) = \lambda_{14}\overline{\rho}_{21} + \mu_{14}\overline{\rho}_{22} + \overline{r}_{24}
\end{aligned} \tag{22}$$

unde

$$\begin{aligned}
\overline{r}_{23} &= K_s(\overline{ba}_{23}) \\
\overline{r}_{24} &= K_s(\overline{Ca}_{24})
\end{aligned} \tag{23}$$

Ţinînd seama de relaţiile (22) relaţiile (21) devin :

$$\begin{aligned}
&\overline{\rho}_{11}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \lambda_{14}X_4) + \overline{\rho}_{12}(X_2 + \mu_{13} + \mu_{14}X_4) = \overline{A_1} \\
&\overline{\rho}_{21}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \lambda_{14}X_4) + \overline{\rho}_{22}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \lambda_{14}X_4) + \\
&+ X_3\overline{r}_{23} + X_4\overline{r}_{24} = \overline{A_2}
\end{aligned} \tag{24}$$

Prima ecuaţie (24) se rezolvă imediat (fig. 4) alegînd o scară K_v şi rezultă

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}_{11}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \lambda_{14}X_4) &= K_v(\overline{O\alpha}_1) \\
\overline{\rho}_{12}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \mu_{14}X_4) &= K_v(\overline{Or}_1)
\end{aligned} \tag{25}$$

unde $A_1 = K_v(\overline{Oa}_1)$.

Ducînd prin punctele α_1, γ_1 paralele la $\overline{a_{11}a_{21}}$ respectiv $\overline{a_{12}a_{22}}$ se află imediat vectorii

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}_{21}(X_1 + \lambda_{13}X_3 + \lambda_{14}X_4) &= K_v(\overline{O\beta}_1) \\
\overline{\rho}_{22}(X_2 + \mu_{13}X_3 + \mu_{14}X_4) &= K_v(\overline{O\delta}_1)
\end{aligned} \tag{26}$$

şi deci se construieşte poligonul $O\beta\ d\ e\ a_2$ din care rezultă

$$X_3\overline{r}_{23} = K_v(\overline{de})$$

$X_4\overline{r}_{24} = K_v(\overline{ea}_2)$ şi astfel se determină X_3 şi X_4.

$$X_3 = \frac{\overline{ba}_{23}}{|\overline{de}|} \qquad X_4 = \frac{\overline{ca}_{24}}{|\overline{ea}_2|} \tag{27}$$

Astfel problema se reduce la rezolvarea primei ecuații (21). Să presupunem în continuare sistemul

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1\bar{\rho}_{11} + \boldsymbol{X}_2\bar{\rho}_{12} + \boldsymbol{X}_3\bar{\rho}_{13} &= \overline{A_1} \\ \boldsymbol{X}_1\bar{\rho}_{11} + \boldsymbol{X}_2\bar{\rho}_{22} + \boldsymbol{X}_4\bar{\rho}_{24} &= \overline{A_2} \end{aligned} \tag{28}$$

obținut din sistemul (21) pentru cazul particular

$$\bar{\rho}_{11} = \bar{\rho}_{12}; \quad \bar{\rho}_{14} = 0 \quad \bar{\rho}_{23} = 0$$

În acest caz facem descompunerea (fig. 5)

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{12} &= \lambda\bar{\rho}_{11} + \mu\bar{\rho}_{13} \\ \bar{\rho}_{22} &= \mu\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho} \end{aligned} \tag{29}$$

și sistemul (28) devine

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{11}(\boldsymbol{X}_1 + \lambda\boldsymbol{X}_2) + \bar{\rho}_{13}(\boldsymbol{X}_3 + \mu\boldsymbol{X}_2) &= \overline{A_1} \\ \bar{\rho}_{11}(\boldsymbol{X}_1 + \lambda\boldsymbol{X}_2) + \bar{\rho}\boldsymbol{X}_2 + \bar{\rho}_{24}\boldsymbol{X}_4 &= \boldsymbol{A}_2 \end{aligned} \tag{30}$$

Rezolvarea acestui sistem este dată în fig. 5.

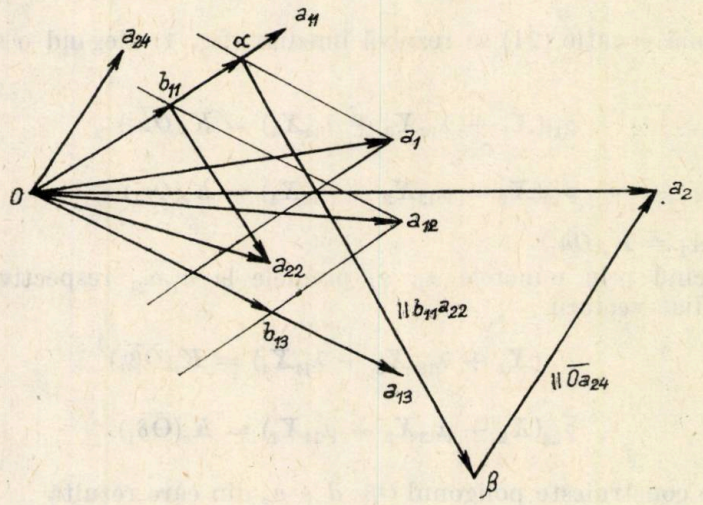


Fig. 5

unde: $\bar{\rho}_{11} = K_s(\overline{Oa_{11}})$, $\bar{\rho}_{12} = K_s(\overline{Oa_{12}})$, $\bar{\rho}_{13} = K_s(\overline{Oa_{13}})$, $\bar{\rho}_{22} = K_s(\overline{Oa_{22}})$, $\bar{\rho}_{24} = K_s(\overline{Oa_{24}})$.

$$\lambda\bar{\rho}_{11} = K_s(\overline{Ob_{11}}),\ \bar{\rho} = K_s(\overline{b_{11}a_{22}})\ \overline{A}_1 = K_v(\overline{Oa_1})\ \overline{A}_2 = K_v(\overline{Oa_2}) \tag{31}$$

$$\bar{\rho}_{11}(\boldsymbol{X}_1 + \lambda\boldsymbol{X}_2) = K_v(\overline{O\alpha}),\ \bar{\rho}\boldsymbol{X}_2 = K_v(\overline{\alpha\beta}),\ \bar{\rho}_{24}\boldsymbol{X}_4 = K_v(\overline{\beta a_2})$$

Din ultima relație rezultă X_4 iar din relația a doua (28) va rezulta X_1, X_2.

Sistemul (28) se întîlnește la studiul cinematic al grupei assurice triada. Descompunerea făcută conduce în metodele grafice obișnuite la folosirea punctelor caracteristice Assur.

O altă formă particulară a sistemului (21) este

$$\begin{aligned} X_1\bar{\rho}_{11} + X_2\bar{\rho}_{12} + X_3\bar{\rho}_{13} &= \bar{A}_1 \\ X_1\bar{\rho}_{21} + X_2\bar{\rho}_{22} + X_4\bar{\rho}_{24} &= \bar{A}_1 \end{aligned} \tag{32}$$

și corespunde situației în care

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2, \quad \bar{\rho}_{14} = \bar{\rho}_{23} = 0$$

Dacă notăm

$$\frac{1}{X_1} = Y_1; \quad \frac{X_2}{X_1} = Y_2; \quad \frac{X_3}{X_1} = Y_3; \quad \frac{X_4}{X_1} = Y_4 \tag{33}$$

sistemul (32) devine

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 Y_1 + \bar{\rho}_{12} Y_2 + \bar{\rho}_{13} Y_3 &= \bar{\rho}_{11} \\ \bar{A}_1 Y_1 + \bar{\rho}_{22} Y_2 + \bar{\rho}_{24} Y_4 &= \bar{\rho}_{21} \end{aligned} \tag{34}$$

Se observă că sistemul (34) are aceiași formă cu sistemul (28), deci rezolvarea este identică.

Interpretînd cinematic această situație rezultă că de fapt în mecanismul considerat am schimbat elementul motor.

Într-adevăr, după cum vom vedea la aplicații, ecuații de forma (32) se obțin la studiul cinematic al grupei assurice tetrada (mecanismul Stephenson).

Se știe că studiul cinematic cel mai ușor pentru acest caz se face prin metoda indirectă, schimbarea elementului motor.

Asupra eficienții metodelor indirecte, schimbarea elementului motor schimbarea bazei, coeficienților de influență vom reveni într-o lucrare ulterioară.

D. Modul de lucru

— se reprezintă mecanismul la o scară convenabilă K_s.
— se determină ciclurile independente.
— se scriu ecuațiile de condiție.
— se determină vectorii de forma $\bar{r}_{ij}$ prin construcție asemănătoare celei din fig. 2.
— se scrie sistemul de forma (12) și se continuă calculele în mod asemănător pînă se ajunge la o singură ecuație și alegînd o scară K_v aceasta se poate rezolva.

E. Observații

— Metoda se poate aplica și pentru studiul grupelor assurice.

— Determinarea acceleraţiilor se face în acelaşi fel, adică se rezolvă grafic sistemul ce rezultă scriind ecuaţiile de condiţie în varianta acceleraţiilor unghiulare absolute [1].

— În unele cazuri nu mai este nevoie a se face o descompunere a vectorilor ca în fig. 2, deoarece aceasta se face direct pe desenul mecanismului (aplicaţia 1).

— Dacă în una din ecuaţiile sistemului (8) există numai două necunoscute „X ", atunci se rezolvă complet grafic acea ecuaţie şi apoi se continuă din aproape în aproape.

F. Aplicaţii

1. Să se determine vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului din fig. 6, ştiind că elementul 1 este element motor şi are viteza unghiulară ω_1 constantă.

Considerînd baza de cicluri independente formată din ciclurile figurate, rezultă ecuaţiile de condiţie

$$\begin{aligned} &\bar{\omega}_1 \times \overline{OA} + \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_3 \times \overline{BC} + \bar{\omega}_4 \times \overline{CD} = 0 \\ &\bar{\omega}_4 \times \overline{DC} + \bar{\omega}_3 \times \overline{CE} + \bar{\omega}_4 \times \overline{EF} = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

sau

$$\begin{aligned} &\bar{\omega}_2 \overline{BA}^* + \bar{\omega} \overline{CB}^* + \bar{\omega}_4 \overline{DC}^* = \bar{\omega}_1 \overline{OA}^* \\ &\bar{\omega}_3 \overline{CE}^* + \bar{\omega} \overline{DC}^* + \bar{\omega}_5 \overline{EF}^* = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

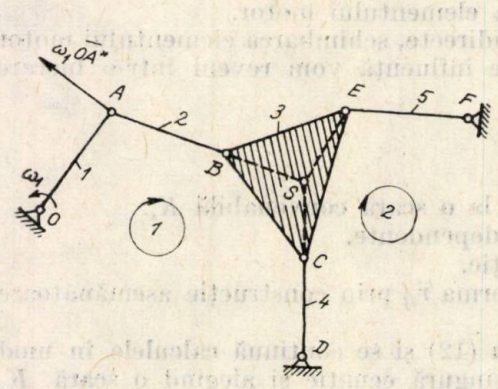


Fig. 6

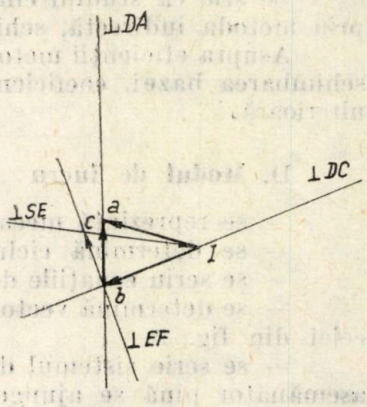


Fig. 7

Se observă că sistemul (36) este de aceeaşi formă cu sistemul (30) şi deci vom descompune vectorii CB^* şi CE^* astfel :

$$\begin{aligned} \overline{CB}^* &= \lambda \overline{BA}^* + \mu \overline{DC}^* = \overline{SB}^* + \overline{CS}^* \\ \overline{CE}^* &= \mu \overline{DC} + \overline{\rho} \qquad = \overline{CS}^* + \overline{SE}^* \end{aligned} \tag{37}$$

Sistemul (36) ţinînd seama de (37) devine :

$$\begin{aligned} &\overline{BA}^* (\omega_1 + \lambda\omega_3) + \overline{DC}^* (\mu\omega_3 + \omega_4) = \omega_1 \overline{OA}^* \\ &\overline{\rho}\,\omega_3 + \omega_4 \overline{EF}^* + \overline{DC}^* (\mu\omega_3 + \omega_4) = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Ecuaţia (38) se poate rezolva grafic şi rezultă (fig. 7)

$$\overline{DC}^* (\mu\omega_3 + \omega_4) = K_v (\overline{Ib}) \tag{40}$$

unde am considerat $\omega_1 \overline{OA}^* = K_v(\overline{Ia})$, K_v fiind scara vitezelor.
Din rezolvarea grafică a ecuaţiei (39) obţinem (fig. 7)

$$\begin{aligned} \omega_5 \overline{EF}^* &= K_s (\overline{bc}) \\ \omega_3 \overline{SE}^* &= K_s (\overline{cI}) \end{aligned} \tag{41}$$

Din relaţiile (41) rezultă vitezele unghiulare ω_3 şi ω_5.

2. Să se determine vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului din fig. 8, ştiind că elementul 1 este element motor şi are viteza unghiulară ω_1 constantă.

Considerînd baza de cicluri independente formată din ciclurile figurate, rezultă ecuaţiile de condiţie

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{OA} + \overline{\omega}_2 \times \overline{AB} + \overline{\omega}_3 \times \overline{BC} + \overline{\omega}_4 \times \overline{CD} = 0$$

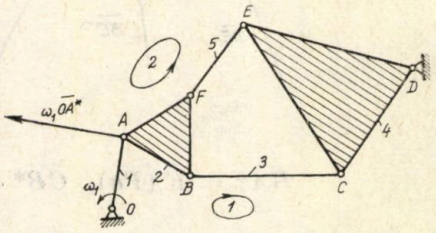


Fig. 8

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{OA} + \omega_2 \times \overline{AF} + \omega_4 \times \overline{FE} + \omega_4 \times \overline{ED} = 0 \tag{42}$$

sau

$$\begin{aligned} \omega_2 \overline{BA}^* + \omega_3 \overline{CB}^* + \omega_4 \overline{DC}^* &= \omega_1 \overline{OA}^* \\ \omega_2 \overline{FA}^* + \omega_4 \overline{EF}^* + \omega_4 \overline{DE}^* &= \omega_1 \overline{OA}^* \end{aligned} \tag{43}$$

Se descompune vectorul $\overline{CB}^*$ (fig. 9) astfel:

$$\overline{CB}^* = \overline{BA}^* + \overline{DC}^* = K_s(\overline{P_1} + \overline{P_2}) \tag{44}$$

În fig. 9 am reprezentat vectorii

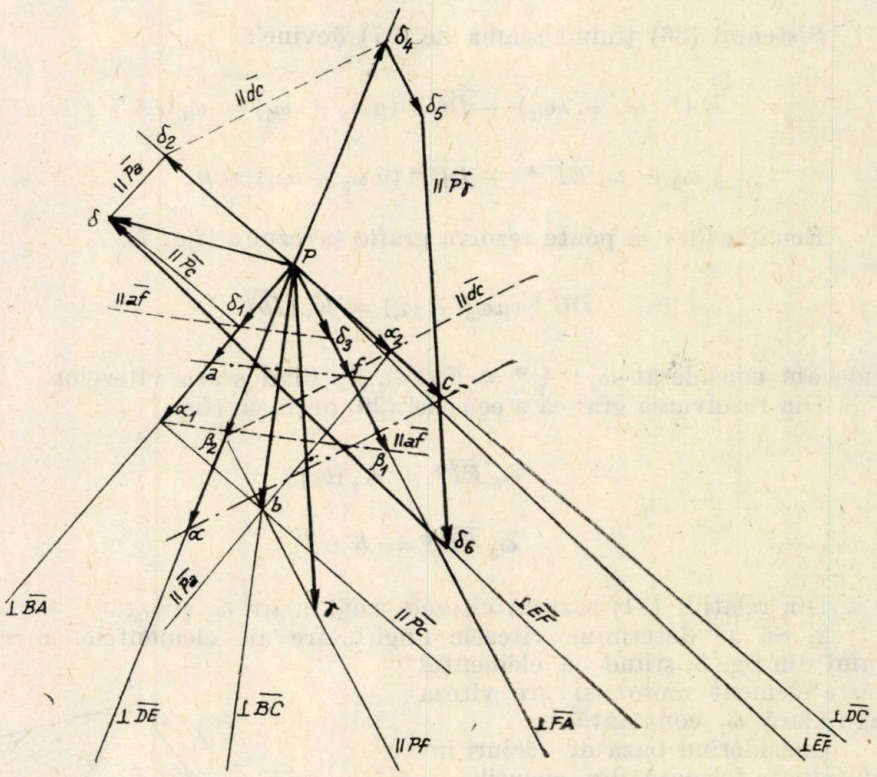


Fig. 9

$$\overline{BA}^* = K_s(\overline{Pa}),\ \overline{CB}^* = K_s(\overline{Pb}),\ \overline{DC}^* = K_s(\overline{Pc}),$$

$$\overline{DE}^* = K_s(\overline{Pd}),\ \overline{EF}^* = K_s(\overline{Pe}),\ \overline{FA}^* = K_s(\overline{Pf})$$

Ţinînd seama de relaţia (44) relaţiile (43) devin

$$\begin{aligned} &\overline{BA}^*(\omega_2 + \lambda\omega_3) + \overline{DC}^*(\omega_4 + \lambda\omega^3) = \omega_1 \overline{OA}^* \\ &\overline{FA}^*(\omega_2 + \lambda\omega_3) + \overline{DE}^*(\omega_5 + \mu\omega_3) - \omega_3(\lambda\overline{FA}^* + \mu\overline{DE}^*) + \\ &+ \omega_5 \overline{EF}^* = \omega_1 \overline{OA} \end{aligned} \tag{45}$$

Reprezentînd pe același desen vectorul $\omega_1 \overline{OA}^*$ la scara K_v, $\omega_1 \overline{OA}^* = K_v(\overline{P\delta})$, se determină imediat vectorii componenți din prima relație (45)

$$\begin{aligned} \overline{BA}^* (\omega_2 + \lambda\omega_3) &= K_v (\overline{P\delta_2}) \\ \overline{DC}^* (\omega_4 + \mu\omega_3) &= K_v (\overline{P\delta_2}) \end{aligned} \tag{46}$$

Din punctul δ, ducînd paralele la $\overline{af}$ determinăm vectorul $\overline{FA}^* (\omega_2 + \lambda\omega_3) = K_v (\overline{P\delta_3})$ și analog ducînd paralele din δ_2 la $\overline{dc}$ se obține vectorul $\overline{DE}^* (\omega_4 + \mu\omega_3) = K_v(\overline{P\delta_4})$.

Ducînd din α_1 paralele la $\overline{af}$ obținem $\lambda \overline{FA}^* = K_s (\overline{P\beta_1})$ și analog ducînd din α_2 paralele la $\overline{dc}$ obținem $\mu \overline{DE}^* = K (\overline{P\beta_2})$.

Compunînd acești vectori obținem $\lambda \overline{FA}^* + \lambda \overline{DE}^* = K_s(\overline{P\gamma})$ și deci relația a doua (45) se poate construi.

Rezultă astfel $\omega_5 \overline{EF}^* = K_v(\delta_5\, \delta)$ și deci ω_5 este determinat.

Catedra de mecanică și teoria mecanismelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu—Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Voinea M. Atanasiu* — Metode analitice noi în Teoria mecanismelor. Editura tehnică, București, 1964.
2. *N. I. Manolescu* — Contribuții la sinteza numerică, structurală și cinematică a grupelor Assur, a lanțurilor cinematice, a mecanismelor și mecanismelor-motor plan articulate. București, 1969 (lucrare de disertație).
3. *Chr. Pelecudi* — Bazele analizei mecanismelor. Editura Academiei. București, 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

C.Z.:621.=75

STUDIUL DEPLASĂRILOR ÎNTR-UN CILINDRU SOLICITAT DE UN CÎMP DE TEMPERATURI AXIAL SIMETRIC*.

ION ROSCA

Pentru determinarea deplasărilor într-un cilindru solicitat de un cîmp de temperaturi axial simetric dispunem de ecuațiile termoelasticității pentru cazul axial simetric, exprimate în deplasări [1], [2], [3].

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu}\,\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\,\alpha\,\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\mu}\,\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\,\alpha\,\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

în care:

u — este deplasarea unui punct M în direcția radială;
w — este deplasarea unui punct M în direcția axială;
T — este temperatura în același punct M;
μ — este coeficientul lui Poisson;
α — este coeficientul de dilatare liniară a materialului;

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ operatorul Laplace în coordonate cilindrice pentru cazul simetric).

Rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (1), cu condiții la limită date, este, desigur, dificil de efectuat prin metode analitice, uneori chiar imposibil.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej București. 1971.

Pentru aceasta s-a utilizat metoda diferenţelor finite şi s-a obţinut o soluţie numerică ce va fi prezentată mai jos. Esenţa metodei diferenţelor finite şi modul de aplicare al ei pentru problema propusă se află expuse în lucrările [2], [3]. Exprimînd derivatele din ecuaţiile (1) prin rapoarte de diferenţe [2], [3], [4], [5], se obţin ecuaţiile cu diferenţe finite :

$$A_1(i)\,u_{i,j} + A_2(i)\,u_{i-1,j} + A_3(i)\,u_{i+1,j} + A_4\,u_{i,j-1} + A_4\,u_{i,j+1} + C_1 W_{i-1,j-1} - C_1\,w_{i+1,j-1} - C_1\,w_{i-1,j+1} + C_1\,w_{i+1,j+1} - X_1(i,j) = 0 \tag{2}$$

$$C_1 u_{i-1,j-1} - C_1 u_{i+1,j-1} - C_1\,u_{i-1,j+1} + C_1\,u_{i+1,j+1} - A_5(i)\,u_{i,j-1} + A_5(i) u_{i,j+1} + B_4 W_{i,j} + B_1(i) w_{i-1,j} + B_2(i) w_{i+1,j} + B_3 W_{i,j-1} + B_3\,w_{i,j+1} - X_2(i,j) = 0$$

unde coeficienţii necunoscutelor sînt constante sau funcţii de r.

Ecuaţiile (2) aproximează ecuaţiile (1) deoarece provin din acestea prin înlocuirea derivatelor cu rapoarte de diferenţe, care sînt aproximative.

Pentru fiecare nod al reţelei care acoperă domeniul explorat (un dreptunghi obţinut prin secţionarea cilindrului cu un plan ce conţine axa de simetrie), se pot scrie cîte două ecuaţii (ecuaţiile (2)), care permit determinarea celor două necunoscute din nod (u şi w).

În apropierea conturului, în ecuaţiile (2) apar valorile deplasărilor u şi w de pe contur. Pentru determinarea acestor deplasări dispunem de condiţiile de contur (condiţii de tip mixt ce conţin atît valorile funcţiilor u şi w cît şi derivatele de ordinul întîi ale acestor funcţii), ce exprimă că tensiunile normale şi tangenţiale pe suprafeţele cilindrului sînt nule, în cazul absenţei încărcărilor mecanice [2].

După scrierea tuturor ecuaţiilor cu diferenţe finite (pentru nodurile din interiorul domeniului de studiu şi pentru nodurile de pe contur) se obţine un sistem de ecuaţii algebrice. Numărul de ecuaţii din sistem este foarte mare (cu atît mai mare, cu cît precizia de calcul dorită este mai mare). O observaţie importantă este aceea că, în cazul problemei noastre, printr-o notare convenabilă a nodurilor reţelei, se poate obţine un sistem de ecuaţii algebrice cu o matrice bandă (în care coeficienţii diferiţi de zero se grupează în jurul diagonalei principale a matricei). Procedînd astfel s-a reuşit să se obţină soluţia numerică pentru problema propusă în lucrare, utilizînd un algoritm corespunzător acestui sistem.

Programînd metoda elaborată pe un calculator numeric în limbaj FORTRAN, s-au calculat deplasările pentru un cilindru, fără încărcări mecanice, caracterizat prin următorii parametrii dimensionali şi termici :

$$R_1 = 0{,}83\,;\ R_m = 1\,;\ Z = 4{,}5\,;\ T_{1.n} = 0{,}2\,;\ T_{m.1} = 0{,}6$$

unde :

$$R_1 = \frac{r_1}{r_m}, Z = \frac{L}{r_m},\ T_{1.n} = \frac{t_{1.n} - t_{m.n}}{t_{1.1} - t_{m.n}}$$

$$T_{m.1} = \frac{t_{m.1} - t_{m.n}}{t_{1.1} - t_{m.n}}$$

r_1 și r_m fiind respectiv raza interioară și exterioară a cilindrului, L — lungimea cilindrului, iar $t_{i,j}$ — temperaturile colțurilor dreptunghiului de secțiune (s-a presupus că temperaturile cea mai mare și cea mai mică în cilindru se află în două colțuri opuse ale secțiunii dreptunghiulare) (fig. 1)

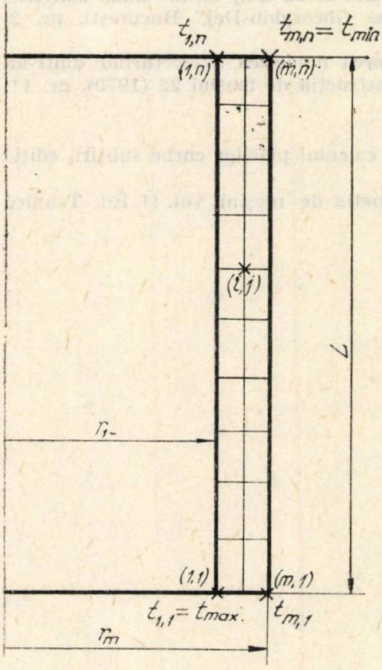


Fig. 1

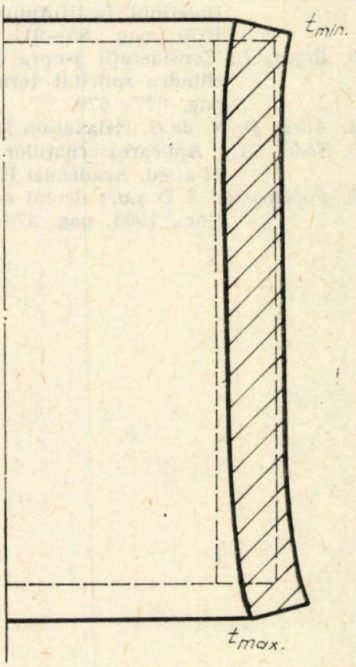


Fig. 2

Cu rezultatele obținute s-a reprezentat exagerat secțiunea deformată a cilindrului (fig. 2).

Se observă influența importantă a extremităților cilindrului. Datorită tensiunilor de capăt, extremitățile cilindrului se răsfrîng ducînd la deformații mari la extremități în raport cu mijlocul cilindrului. Deformarea cilindrului de-a lungul lui depinde de cîmpul de temperaturi.

Analizînd secțiunea deformată (fig. 2) se observă că între determinarea deplasărilor într-un cilindru cu formula obținută prin ipoteza cilindrului de lungime infinită [6] și determinarea numerică există deosebiri importante, ceea ce este normal. În primul caz nu sînt îndeplinite condițiile de capăt pentru cilindrul scurt, în timp ce în cel de al doilea caz (rezolvarea numerică) aceste condiții sînt îndeplinite. De asemenea în primul caz nu se poate obține soluția decît în condiția unei temperaturi constante de-a lungul unei paralele la axa de simetrie, iar în rezolvarea numerică deplasările în cilindru se pot obține pentru orice distribuție a temperaturilor în secțiune. Aceasta scoate în evidență avantajele metodei propuse și o recomandă pentru utilizarea ei în locul rezolvării simplificate prin considerarea cilindrului de lungime infinită.

Catedra de mecanică și teoria mecanismelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București.

BIBLIOGRAFIE

1. *Bezuhov, N. I, ş.a.* Rascioti na procinosti, ustoicivosti i kolebania v usloviah visokih temperatur, izd maşinostroienie, Moskva, 1965.
2. *Roşca I.*, Condiţii de contur la o bucşă de cilindru solicitată de un cîmp termic axial simetric, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti. nr. 2, 1970, pag. 85—91.
3. *Roşca, I.*, Consideraţii asupra colţurilor în determinarea numerică a eforturilor dintr-un cilindru solicitat termic axial simetric, Construcţia de maşini 22 (1970), nr. 11, pag. 677—679.
4. *Allen, D. N. de G*, Relaxation Methods, 1954.
5. *Soare, M.*, Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri, ediţia II-a, ed. Academiei R.S.R, Buc. 1968.
6. *Ponomariov, S. D. ş.a.* Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini, Vol. II, Ed. Tehnică Buc., 1963, pag. 376—379.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

MECANICĂ FINĂ

C.Z.: 681.2

SINTEZA MECANISMELOR DE AMPLIFICARE CU PÎRGHII DIN APARATELE DE MĂSURĂ CU SENSIBILITATE ÎN TREPTE*

Tr. DEMIAN, E. CURATU, D. TUDOR

La proiectarea scării aparatelor de măsură trebuie considerată dependența dintre unghiul de înclinare φ al indicatorului și mărimea de măsurat x. Funcția $\varphi = f(x)$ se numește caracteristica scării, iar prima derivată a acesteia $S = \frac{d\varphi}{dx}$, sensibilitatea aparatului.

Prin sensibilitatea în trepte se înțelege variația bruscă a valorii diviziunii pe o anumită porțiune a scării, comparativ cu valoarea inițială a acesteia. Practic, asemenea situații sînt întîlnite la diferite aparate de măsură și control ca: vitezometre, variometre, termometre, aparate de control activ pneumatice, manometre, ș.a., urmărindu-se prin ele lărgirea cîmpului de măsurare (lungimea L a scării se păstrează constantă).

Sinteza mecanismelor de amplificare cu pîrghii, la o sensibilitate în trepte a aparatului, urmărește determinarea dimensiunilor elementelor mecanismului astfel încît să rezulte o caracteristică a scării ca în fig. 1.

Legea de mișcare se poate exprima sub forma:

$$\frac{S_{(x_1)}}{S_{(0)}} = K \tag{1}$$

unde: $S_{(x_1)}$ este sensibilitatea scării corespunzătoare valorii x_1; $S_{(0)}$ sensibilitatea inițială a acesteia.

Deoarece $S_{(x_1)} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x_1}$ și $S_{(0)} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0$ ecuația (1) poate fi scrisă și sub forma:

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x_1}}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0} = K \tag{2}$$

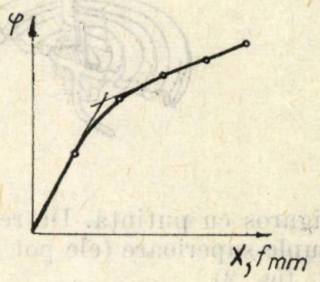


Fig. 1

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București, 1972.

Deplasarea unghiulară φ a indicatorului se mai poate exprima şi ca funcţie de mărimea semnalului de intrare x şi dimensiunile mecanismului de amplificare, l_i, adică:

$$\varphi = F(x, l_i)$$

În aceste condiţii ecuaţia (1) capătă forma:

$$\frac{\left[\dfrac{\partial F(x, l_i)}{\partial x}\right]_{x_1}}{\left[\dfrac{\partial F(x, l_i)}{\partial x}\right]_0} = K \tag{3}$$

deci raportul K este dependent de dimensiunile mecanismului l_i şi parametrii K, x_1. Alegînd pe K, x_1 şi dimensiunile l_{i-1}, rezultă dimensiunile l_i iar prin alegere de valori diferite se poate ajunge la o soluţie optimă.

Caracteristica aparatului din fig. 1 se obţine folosind traductoare de măsură cu elemente elastice (avînd o caracteristică similară) sau poate rezulta utilizînd traductoare cu sensibilitate constantă- dar avînd mecanisme de amplificare cu raport de transmitere instanteneu în trepte.

Aceste mecanisme trebuie să posede o schemă cinematică cît mai simplă, care să micşoreze la maximum pierderile prin frecare şi erorile şi, bineînţeles, să reproducă legea de mişcare dată de relaţia (1), cît mai

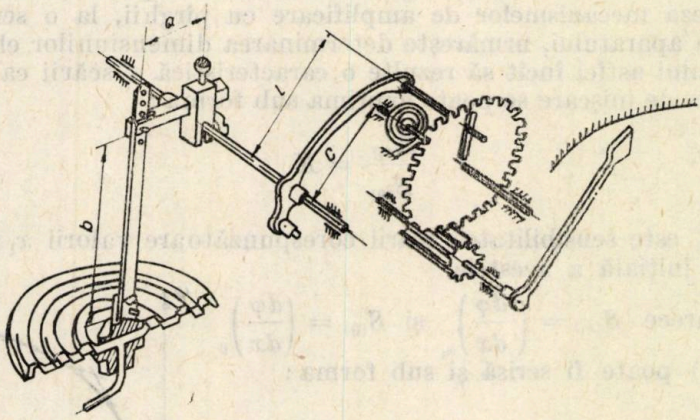


Fig. 2

riguros cu putinţă. De regulă asemenea mecanisme au în componenţa lor cuple superioare (ele pot fi cu camă sau cu pîrghii şi bolţuri de antrenare — fig. 2).

Sinteza mecanismelor de amplificare cu sensibilitate în trepte a fost rezolvată pentru un caz concret, mecanismul reprezentat în figura 2, dar metoda poate fi extinsă asupra altor mecanisme.

În soluționarea problemei, s-a plecat de la legea de mișcare a indicatorului :

$$\varphi = F(x, l_i) = i_r \beta(x, l_i), \tag{4}$$

unde : i_r = const. este raportul de transmitere instantaneu a mecanismului cu roți dințate intercalat mecanismului cu pîrghii, iar β (x, l_i) este legea de mișcare a elementului condus a mecanismului cu pîrghii. Se vede deci că, întrucît i_r este constant sensibilitatea în trepte a aparatului nu poate fi realizată decît de mecanismul cu pîrghii.

Sinteza mecanismelor cu pîrghii a fost realizată prin o metodă teoretic exactă și una aproximativă.

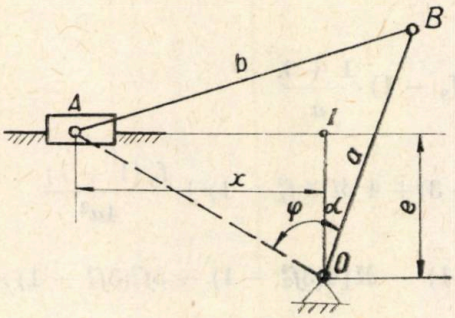


Fig. 3

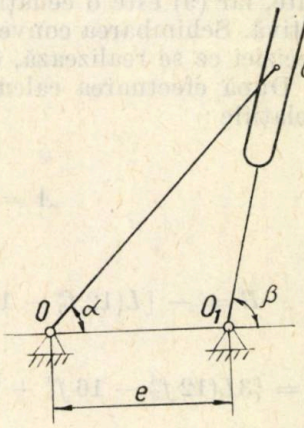


Fig. 4

La sinteza teoretic exactă, conform figurilor 3 și 4, se determină funcția β cu o relație de forma :

$$\beta = \text{arc tg} \frac{(1 + \lambda) f_3(x)}{1 - \lambda f_3^2(x)} \tag{5}$$

unde :

$$\lambda = \frac{\frac{l}{c} + 1}{\frac{l}{c} - 1} = \frac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1} \tag{6}$$

iar

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{-x^4 + 2x^2(a^2 + b^2 - e^2) + 2b^2(e^2 + a^2) - b_4 - (e^2 - a^2)^2}}{x^2 + (a + e)^2 - b^2}, \tag{7}$$

parametrii a, b, e, l reprezentînd dimensiunile elementelor mecanismelor amplificatoare din figura 2.

La sinteza aproximativă se dezvoltă în serie Taylor funcţia $\beta = \beta(x)$ considerîndu-se primii trei termeni. Se obţine :

$$\Omega(x) = \beta - \beta_0 = \frac{\beta'(x_0)}{1!}X + \frac{\beta''(x_0)}{2!}X^2 + \frac{\beta'''(x_0)}{3!}X^3 \tag{8}$$

sau

$$\Omega(x) = AX + BX^2 + CX^3 \tag{9}$$

Exprimarea prezentată în ecuaţia (9) permite să se realizeze mai uşor forma caracteristicii scării. Deoarece la sensibilitatea în trepte, caracteristica este formată, conform figurii 1, din două drepte avînd pante diferite, iar (9) este o ecuaţie de gradul trei, soluţia problemei va fi aproximativă. Schimbarea convenabilă a pantei celor două drepte şi totodată a preciziei ce se realizează, depind de alegerea parametrilor A, B, C.

După efectuarea calculelor, în final, aceşti parametri se determină cu relaţiile :

$$A = L(3f_3 - 1)\frac{1+\lambda}{a} \tag{10}$$

$$B = -[L(12f_3^4 - 13f_3^2 + 3) + 4M(3f_3^4 - 1)^2]\frac{f_3(1-\lambda)}{4a^2} \tag{11}$$

$$C = \{3L(12f_3^6 - 16f_3^4 + 7f_2^2 - 1) - M[4(3f_3^4 - 1) - 5f_3^2(3f_3^4 - 1)\times$$

$$\times(12f_3^4 - 13f_3^2 + 3)] + 16Nf_3^2(3f_3^4 - 1)^3\frac{1+\lambda}{12a^3} \tag{12}$$

unde :

$$L = \frac{1+\lambda f_3^2}{(1+f_3^2)(1+\lambda^2 f_3^2)} \tag{13}$$

$$M = \frac{(\lambda - 1) + \lambda(1+\lambda f_3^2)}{1+f_3^2)(1+\lambda^2 f_3^2)^2} \tag{14}$$

$$N = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda+1)+3\lambda^2 f_3^2(\lambda-1)^2+\lambda^2(1+\lambda f_3^2)^3}{(1+f_3^2)^3(1+\lambda^2 f_3^2)^2} \tag{15}$$

iar

$$X = x - x_0$$

Caracteristica din figura 1 se obţine dacă :
cazul 1 : $A > 0$; $B < 0$; $C < 0$;
cazul 2 : $A > 0$ $B < 0$ $C > 0$.

Aceste condiţii sînt realizate în urmtoarele situaţii :

Cazul I			Cazul II		
X	0	$-\frac{B}{3C}-\frac{\sqrt{B^2-3AC}}{3C}$	X	0	$-\frac{B}{3C}-\frac{\sqrt{B^2-3AC}}{3C}$
$\Omega'(x)$	$A + + +$	0	$\Omega'(x)$	$A + + +$	0
$\Omega(x)$	$0 \nearrow$	$\Omega\,\max$	$\Omega(x)$	$0 \nearrow$	$\Omega\,\max$
$\Omega''(x)$	$2B - - -$		$\Omega''(x)$	$2B - - -$	

unde $\frac{B}{3C}-\frac{\sqrt{B^2-3AC}}{3C}=X_{max}$ $\quad -\frac{B}{3C}-\frac{\sqrt{B^2-3AC}}{3C}=X_{max}$

În diagramele din anexă sînt prezentate soluţiile pentru unele variante constructive reale, avînd următoarele date :

$$a = e = (3 \div 8)\ \text{mm}; \quad X_{max} = f < 1{,}6\ \text{mm}; \quad b/a = \mu = 5 \div 7;$$

$$\lambda_0 = 1{,}1 \div 5; \quad 1/K = \frac{i_0}{i} = 1{,}1 \div 5.$$

Valorile parametrilor a, e, λ_0 şi b s-au ales din condiţii de gabarit minim, iar K pentru realizarea unei anumite sensibilităţi în trepte. Din multitudinea de variante calculate se obţine soluţia optimă pentru un număr mare de aparate utilizate în practică.

Deoarece deplasările unghiulare α ale elementului conducător de la mecanismul bielă manivelă sînt mici, raportul de transmitere instantaneu ale acestui mecanism se poate considera constant. Mecanismul serveşte numai pentru transformarea mişcării de translaţie (semnalul de intrare) în mişcarea de rotaţie. La transmiterea semnalului de intrare de la sursă de informaţie (traductor) la cea de recepţie (indicatorul), fluxul de semnale se propagă pentru amplificare, şi prin mecanisme cu roţi dinţate (fig. 2). Mecanismul cu culisă oscilantă se poate monta înainte sau după amplificatorul cu roţi dinţate. Soluţia constructivă adoptată influenţează direct raportul de transmitere i_r al mecanismului cu roţi.

La aşezarea acestui mecanism înainte de cel cu culisă oscilantă, valoarea lui i_r este de $(2 \sim 4)$ ori mai mare. Ca urmare pentru realizarea unui gabarit redus este necesară utilizarea unor module foarte mici la angrenaj. Caracteristica scării se obţine însă cu erori teoretice minime.

Dacă mecanismul cu roţi este aşezat după cel cu culisă oscilantă se pot realiza scări cu lungimi egale pe cele două trepte de sensibilitate. Această soluţie este posibilă în prima variantă constructivă numai prin micşorarea sensibilă a parametrului f_{max}. Egalizarea lungimilor scărilor celor două trepte de sensibilitate este favorizată şi dacă se măreşte parametru a.

Rezultate bune (eroare mică, egalitatea lungimilor celor două scări de sensibilitate) verificate practic se obțin pentru $K = 2$ și $i_0 = 1{,}15$, $a = 6$ mm.

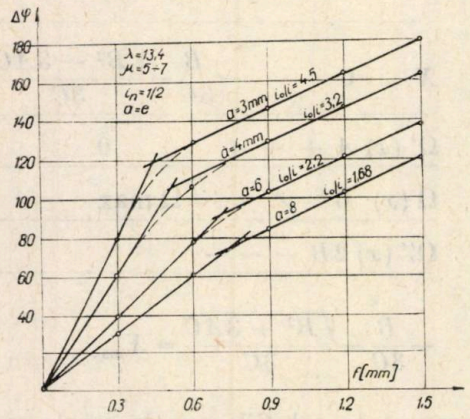


Fig. 5

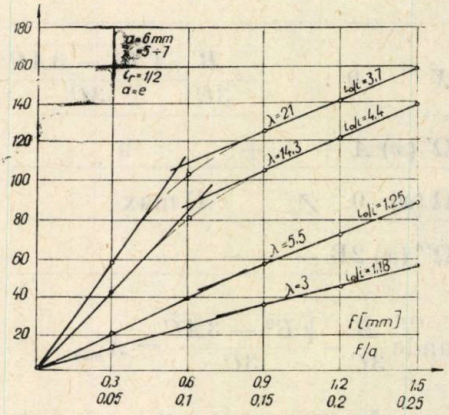


Fig. 6

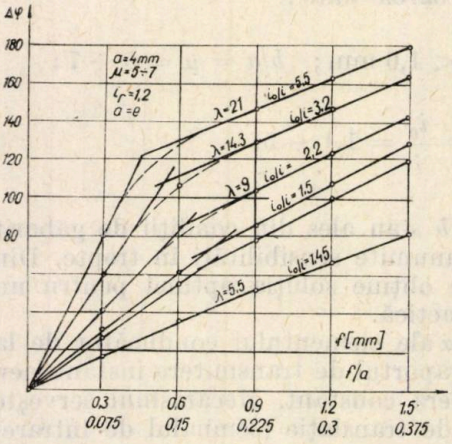


Fig. 7

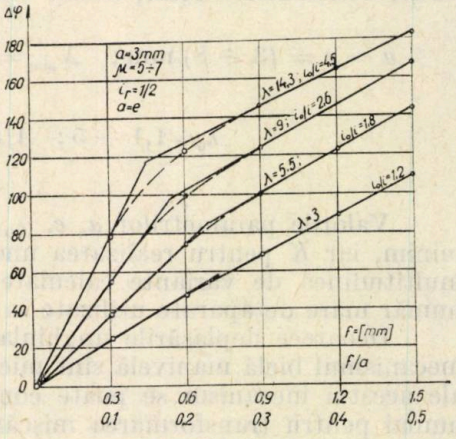


Fig. 8

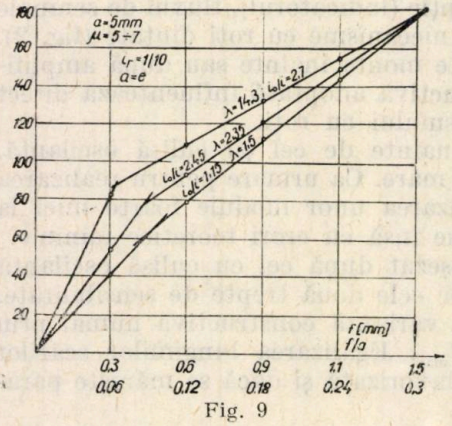


Fig. 9

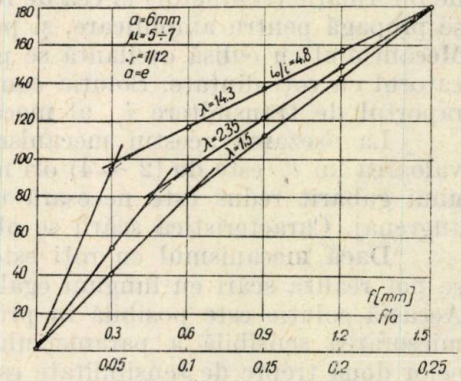


Fig. 10

Diagramele trasate pe baza calculelor (anexă) cît și concluziile obținute cu ajutorul lor, ușurează mult munca de proiectare a constructorilor de aparate. Va fi desigur necesar ca în viitor, soluțiile să fie completate cu

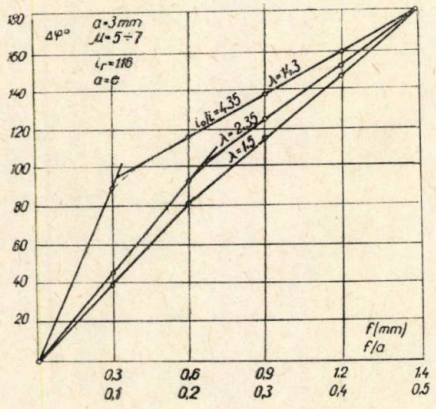


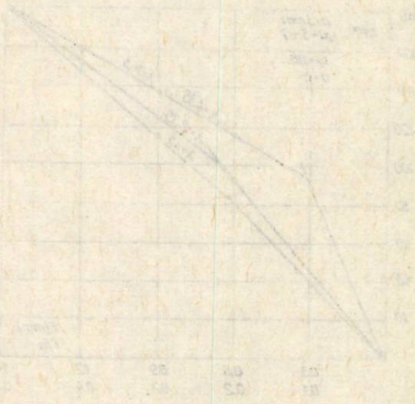
Fig. 11

calculele privind precizia mecanismelor. De asemenea, urmează ca studiul să fie extins și asupra mecanismelor de amplificare cu came.

Catedra de mecanică fină
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București.

BIBLIOGRAFIE

1. *Tr. Demian ș.a.* — Mecanisme și elemente constructive de mecanică fină. Probleme. Editura Didactică și Pedagogică, 1969.
2. *Tr. Demian ș.a.* — Calculul și construcția elementelor de mecanică fină. Editura Didactică și Pedagogică, 1972.



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

AVIAȚIE

C.Z.: 629.13

UNELE PROBLEME ALE DIRIJĂRII NAVELOR COSMICE LA REINTRAREA ÎN ATMOSFERĂ*

C. GUȚĂ

Dirijarea aparatelor cosmice la reintrarea în straturile dense ale atmosferei diferă de dirijarea navelor care îndeplinesc diferite misiuni cosmice (zbor spre Lună sau alte planete) în principal prin două particularități, oarecum complementare.

Astfel metoda de dirijare pentru reintrarea în atmosferă trebuie să țină seama de existența forțelor aerodinamicii, de încălzirea navei datorită frecării, de suprasarcini, care în general sînt proporționale cu densitatea mediului, de asigurarea preciziei cerute de aterizarea sau amerizarea în puncte dinainte stabilite, precum și de influența nesfericității Pămîntului.

Deoarece limitele atmosferei dense se consideră pînă la 80—90 (100) Km, și pînă la această înălțime accelerația gravitațională nu variază cu mai mult de 2% în raport cu valoarea pe care o are la nivelul mării, se neglijează variația acesteia în calcule.

În cazul dirijării navelor evoluînd în cosmos, influența gravitației terestre nu mai poate fi neglijată (de altfel, în zborul spre Lună la un moment dat se anulează și trebuie considerată accelerația gravitației acesteia) în schimb se neglijează forțele aerodinamice, datorită interacțiunii navei cosmice cu mediul înconjurător, care poate fi considerat practic vid.

Tehnica actuală de dirijare este foarte precisă și ea permite erori ale unghiului de intrare de numai o zecime de grad ($\Delta\varphi \leqslant \pm 0{,}1°$), însă din cauza deosebirilor între caracteristicile atmosferei standard (model) și cele ale atmosferei reale se obțin erori, împrăștieri destul de mari în ceea ce privește punctul de aterizare (amerizare).

În ultimul timp, prin completarea continuă a cunoștințelor despre straturile înalte ale atmosferei s-a obținut o precizie mult îmbunătățită la amerizarea echipajelor programului Apollo.

Unghiul de intrare în straturile dense este în general mic, pentru ca pierderea de energie cinetică a vehiculului cosmic să nu fie bruscă și încălzirea să nu depășească limitele prescrise. De altfel, la navele Apollo s-a putut observa stratul exterior, puternic încălzit și ionizat, adus în stare de plasmă, care trebuia riguros controlat.

* Manuscris predat redacției la data de 10 ianuarie 1971.

Scăderea necontrolată de energie cinetică la reintrarea în atmosferă poate să aibe consecințe asupra manevrelor ce trebuie făcute de navă, întrucît la coborîre de obicei, motoarele nu funcționează, pentru manevre folosindu-se energia cinetică proprie, din care se consumă prin frînare aerodinamică sau reactivă.

Ecuația diferențială a reintrării în coordonate polare are expresia [1]

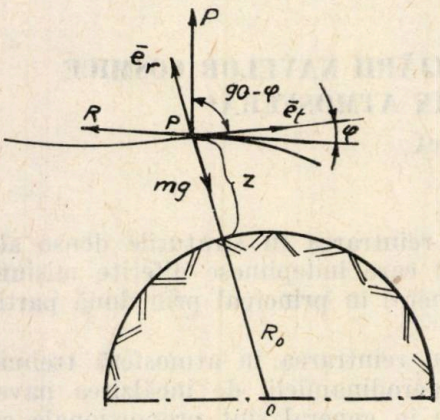


Fig. 8

$$\bar{a} = \left(\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_t^2}{r}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{dV_t}{dt} + \frac{V_r V_t}{r}\right)\bar{e}_t \tag{1}$$

unde $\bar{e}_r$ și $\bar{e}_t$ sînt versorii unitari, orientați după raza vectoare și perpendiculara pe ea (fig. 1).

Forțele aerodinamice care acționează asupra navei cosmice sînt rezistența la înaintare (R) și portanța (P), care au expresiile bine cunoscute:

$$R = \frac{\rho}{2} SV^2 C_x \tag{2}$$

$$P = \frac{\rho}{2} SV^2 C \tag{3}$$

În expresiile (2) și (3), pînă la înălțimea de 100 Km, se poate lua pentru densitate variația exponențială:

$$\rho = \rho_0 e^{-\alpha z} \tag{4}$$

unde $\rho_0 = 0{,}125$ Kgs^2/m^4 este densitatea aerului la nivelul mării, iar $\alpha = \frac{1}{7170}$ 1/m.

Forțele aerodinamice pot fi exprimate, în lipsa forței de tracțiune, prin expresia:

$$F = (-m_0 g + P\cos\varphi - R\sin\varphi)\,\bar{e}_r - (R\cos\varphi + P\sin\varphi)\,\bar{e}_t. \tag{5}$$

Aceeași relație (5) poate fi scrisă, conform legilor lui Newton

$$F = m_0 \bar{a} \tag{6}$$

$\bar{a}$ este accelerația totală și este dată de relația (1) iar m_0 este masa navei cosmice în momentul inițial al amorsării traiectoriei de reintrare în atmosferă.

Din fig. 1 se vede că:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_r}{V_t}. \tag{7}$$

Din relaţiile (1) şi (5), luînd proiecţiile după cele două direcţii $\bar{e}_r$ şi $\bar{e}_t$ se deduce:

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{V_t^2}{r} - \frac{P}{m_0}\cos\varphi + \frac{R}{m_0}\sin\varphi \tag{8}$$

$$\frac{dV_t}{dt} + \frac{V_r V_t}{r} = -\frac{R}{m_0}\cos\varphi\left(1 + \frac{P}{R}\operatorname{tg}\varphi\right) \tag{9}$$

În relaţiile de mai sus: $r = R_0 + z$. $R_0 = 6372$ Km, raza Pămîntului considerat sferă, z înălţimea măsurată de la nivelul mării. În general la înălţimea mai mare de 50 Km se considera şi variaţia gravitaţiei, care este de forma:

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + z)^2} \tag{10}$$

Ţinînd seama de frînarea care apare variaţia vitezei (V_t), normală pe rază, scade mai rapid decît altitudinea [2]. Aşadar

$$\left|\frac{dV_t}{V_t}\right| \gg \left|\frac{dr}{r}\right| \tag{11}$$

În ecuaţia (9), expresia:

$$\left(\frac{P}{R}\operatorname{tg}\varphi\right) \ll 1, \tag{12}$$

şi exprimă condiţia ca în cazul folosirii portanţei pentru dirijare, la coborîre, unghiul de poziţie al traiectoriei φ să fie suficient de mic. În felul acesta şi componenta orizontală a portanţei va fi cu mult mai mică decît rezistenţa la înaintare.

Din inegalitatea (11) prin împărţirea la dt se obţine:

$$\frac{dV_t}{dt} \gg \frac{V_t V_r}{r} \tag{13}$$

Din fig. 1 se deduc formulele:

$$V_t = V\cos\varphi \tag{14}$$

$$V_r = V\sin\varphi \tag{15}$$

Considerînd relațiile (2), (12), (13) și (14), ecuația (9) devine :

$$\frac{dV_t}{dt} = -\frac{\rho}{\cos\varphi} V_t^2 \frac{C_x}{2m_0} \tag{16}$$

În condițiile reintrării :

$$\gamma = \frac{V_t}{V_c} < 1. \tag{17}$$

unde : $V_c = \sqrt{gr}$ este prima viteză cosmică, viteza circulară, la atingerea căreia o navă cosmică poate să devină satelit artificial.

Ecuația (8), înlocuind (2), (3) și (17) devine :

$$\frac{1}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma^2 - 1 + \frac{\rho C_x}{2m_0} r \frac{\gamma^2}{\cos^2\varphi}(\lambda\cos\varphi - \sin\varphi). \tag{18}$$

Ecuațiile (16) și (18) pot fi reduse la una singură, dacă se face schimbarea de variabilă

$$X = \frac{\rho}{2}\left(\frac{C_x S}{m_0}\right)\sqrt{\frac{r}{\alpha}}\,\gamma \tag{19}$$

și conform relației (17) se scrie :

$$V_t = \sqrt{gr}\,\gamma \tag{20}$$

Diferențiind (19) în raport cu γ și înlocuind (4) și (11) se obține :

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dX}{d\gamma} - \frac{X}{\gamma^2} = -\frac{\rho\sqrt{r\alpha}}{2}\left(\frac{C_x S}{m_0}\right)\frac{dz}{d\gamma} = -\alpha\frac{X}{\gamma}\frac{dz}{d\gamma} \tag{21}$$

unde :

$$\frac{dz}{d\gamma} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{d\gamma} \tag{22}$$

Din compararea relațiilor (16) și (20) se deduce :

$$V\frac{\mathrm{d}}{dt}\gamma = -\sqrt{g\alpha}\frac{X\gamma}{\cos\varphi} \tag{23}$$

În (22) se poate scrie (dz/dt) astfel :

$$dz = V_r dt = \gamma\sqrt{gr}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,dt \tag{24}$$

Cu acestea expresia (21) devine:

$$\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}=\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\frac{\cos\varphi}{\gamma}\frac{dz}{dt}=\sqrt{\alpha r}\sin\varphi. \tag{25}$$

Considerînd relaţiile (19) şi (21), ecuaţia (18) trecînd peste calculele algebrice, se scrie:

$$\frac{1}{g}\frac{d^2z}{dt^2}=\gamma^2-1+\frac{\gamma X}{\cos^2\varphi}\left(\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}-\sqrt{\alpha r}\cos\varphi\right) \tag{26}$$

Din relaţia (25) se deduce:

$$V_r=\frac{dz}{dt}=\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{\gamma\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\cdot\frac{\gamma}{\cos\varphi}\left(\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}\right) \tag{27}$$

Derivînd în raport cu timpul în (27) se obţine:

$$\frac{1}{g}\frac{dV_r}{dt}=\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=\frac{1}{\sqrt{\alpha g}}\frac{d\gamma}{dt}\left(\frac{\gamma}{\cos\varphi}\frac{d^2X}{d\gamma^2}+\gamma\sqrt{\alpha r}\cdot\mathrm{tg}^2\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) \tag{28}$$

Utilizînd relaţiile (20) şi (25), transcriem ecuaţia (26) astfel:

$$\gamma\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}\right)=\begin{vmatrix}\gamma\sqrt{\alpha r}\dfrac{d}{d\gamma}(\sin\varphi)\\ \gamma\dfrac{d^2X}{d\gamma^2}-\dfrac{dX}{d\gamma}+\dfrac{X}{\gamma}\end{vmatrix} \tag{29}$$

În final prima relaţie (29), după înlocuirea în (28) ştiind că din a doua relaţie (29) avem:

$$\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}=\gamma\frac{d^2X}{d\gamma^2}-\gamma\frac{d}{d\gamma}\cdot\left(\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}\right)$$

se poate scrie:

$$\frac{d^2X}{d\gamma^2}-\left(\frac{dX}{d\gamma}-\frac{X}{\gamma}\right)=\frac{1-\gamma^2}{\gamma X}\cos^4\varphi-\sqrt{\alpha r}\,\lambda\cos^3\varphi. \tag{30}$$

Termenii din ecuaţia (30) reprezintă:

$A=\gamma\dfrac{d^2X}{d\gamma^2}$, componenta verticală a acceleraţiei;

$B = \frac{dX}{d\gamma} - \frac{X}{\gamma}$, componenta verticală a rezistențelor la înaintare;

$C = \frac{1-\gamma^2}{\gamma X}\cos^4\varphi$, componenta datorită acțiunii simultane a forțelor de gravitație și centrifuge;

$D = \sqrt{\alpha r}\,\lambda\cos^3\varphi$, portanța vehicolului cosmic.

Ecuația (30), după cum se vede, este neliniară și în general se integrează numeric sau se rezolvă cu ajutorul calculatoarelor electronice numerice.

În cazuri particulare de reintrare în atmosferă se pot obține soluții analitice prin integrare obișnuită.

Astfel, dacă se consideră coborîrea balistică, sub efectul forțelor gravitaționale, putem admite $\varphi = \varphi_{int} = \text{const.}$

În cazul coborîrii după o curbă balistică, calculele arată că se pot neglija forțele centrifuge și gravitaționale, ele anulîndu-se reciproc.

În acest fel, soluția ecuației (30) se scrie:

$$X_1 = \sqrt{\alpha r}\sin\varphi_{int}\gamma\ln\frac{\gamma}{\gamma_{int}}. \tag{31}$$

Dacă în ecuația (30) se consideră $\lambda = 0$, ceea ce înseamnă că portanța este nulă în cazul coborîrii balistice, se obține ecuația:

$$\frac{d^2X}{d\gamma^2} - \frac{1}{\gamma}\frac{dX}{d\gamma} + \frac{X}{\gamma^2} = 0 \tag{32}$$

Se recunoaște în (32) o ecuație de tip EULER, de o formă mai simplă.

Făcînd schimbarea de variabilă:

$$\gamma = e^t \tag{33}$$

se reduce ecuația (32) la o ecuație omogenă cu coeficienți constanți, a cărei ecuație caracteristică ($r^2 - r + 1 = 0$) are rădăcini imaginare.

Soluția ecuației obținute este:

$$X_1 = \sqrt{\gamma}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln\gamma) + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln\gamma)\right]. \tag{34}$$

Un alt caz particular poate fi coborîrea prin planare inerțială. În acest caz se poate considera $\cos\varphi \simeq 1$ și neglija componentele verticale ale accelerației și rezistenței la înaintare.

Din (30) se deduce, în condițiile de mai sus:

$$X_2 = \frac{1-\gamma^2}{\gamma\sqrt{\alpha r}\,\lambda}. \tag{35}$$

Foarte adesea la coborîre se întîlneşte un alt caz particular şi anume acela al atacării păturilor superioare ale atmosferei prin ricoşeuri, adică vehiculul cosmic evoluează pe o traiectorie ondulatorie.

Dacă minimul acestor sinusoide intersectează atmosfera în felul acesta reducîndu-se considerabil din energia cinetică, se evită supraîncălzirea. Întrării repetate în păturile dense îi corespunde $\varphi \simeq 0$ şi neglijarea rezultantei forţei centrifuge şi a forţelor gravitaţionale (mărimea acestora fiind comparabilă şi opusă ca sens). Soluţia ecuaţiei (30) devine :

$$X_3 = \gamma\left[\frac{X_{\text{int}}}{\gamma_{\text{int}}} + \sqrt{\alpha r}\,\varphi_{\text{int}} \ln\frac{\gamma}{\gamma_{\text{int}}} - \sqrt{\alpha r}\,\frac{\lambda}{2}\left(\ln\frac{\gamma}{\gamma_{\text{int}}}\right)^2\right] \tag{36}$$

Avînd funcţia X astfel determinată, revenind la relaţiile precedente se pot scrie parametrii caracteristici ai mişcării descendente ai navei cosmice, asupra cărora se influenţează în procesul de dirijare.

Astfel, acceleraţia tangenţială conform relaţiei (23) va avea expresia :

$$a_t = -\frac{dV_t}{dt} = g\frac{\sqrt{\alpha r}}{\cos\varphi}\gamma X \tag{37}$$

unde pentru determinarea unghiului de poziţie al traiectoriei $\sin\varphi$ se deduce din ecuaţia (25):

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha r}}\left(\frac{dX}{d\gamma} - \frac{X}{\gamma}\right) \tag{38}$$

Lungimea arcului parcurs de navă pe traiectoria de coborîre din momentul iniţial, cînd viteza relativă este γ_0, pînă în momentul considerat γ, va fi dedusă tot din (23) :

$$\frac{\Delta l}{r} = \frac{1}{r}\int_{\gamma_0}^{\gamma} V_t\frac{dt}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\alpha r}}\int_{\gamma}^{\gamma_0}\frac{\cos\varphi\, d\gamma}{X}. \tag{39}$$

Variaţia densităţii aerului, poate fi determinată din relaţia (19) cu ajutorul funcţiei X şi a relaţiei (4) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\alpha z} = \frac{2}{\rho_0}\left(\frac{m_0}{C_x S}\right)\sqrt{\frac{\alpha}{R_0 + z}}\cdot\frac{X}{\gamma}. \tag{40}$$

În acelaşi mod se poate deduce şi timpul de zbor al aparatului cosmic între cele două viteze relative considerate γ_0 şi γ.

$$t = \int\frac{ds}{V_t} = \frac{1}{\sqrt{\alpha g}}\int_{\gamma}^{\gamma_0}\frac{\cos\varphi}{\gamma X}\, d\gamma. \tag{41}$$

Regimul termic al navei cosmice poate fi determinat utilizînd aceleași funcții. Astfel în [2, 3, 4], fluxul termic prin unitatea de suprafață în punctul critic (vîrf) este :

$$q_{cr} = 0{,}15 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{\rho}{R_c}} V^3 \text{Kcal/m}^2 . \text{s} \tag{42}$$

unde V este viteza, ia R_c raza de curbură minimă (la vîrf).

În baza relațiilor precedente se obține pentru orice punct :

$$q = 1600 K_1 \sqrt{\frac{m_0}{C_x S R_c}} \gamma^{5/2} X^{1/2} (\cos \varphi)^{-3}. \tag{43}$$

Cantitatea totală primită de aparat va fi :

$$Q = K_2 S_a \int_t^{t_0} q_{cr} dt [\text{Kcal}] \tag{44}$$

unde S_a este întreaga suprafață a navei în contact cu mediul, iar K_2 ține seama de schimbarea fluxului termic pe diferite zone ale suprafeței S_a.

Astfel, dacă avem vîrful navei de formă semisferică : $K_2 = 0{,}5$ și cantitatea totală de căldură are expresia :

$$Q = 4000 K_1 S \sqrt{\frac{m_0}{C_x S R_c}} \int_{\gamma}^{\gamma_0} \gamma^{3/2} X^{1/2} (\cos \varphi)^{-2} d\gamma. \tag{45}$$

Folosirea funcției X dă posibilitatea ca prin metode clasice (grafice sau analitice) să se determine parametrii mișcării sau traiectoriei cu suficientă ușurință. În cazul folosirii calculatoarelor electronice [5] se înțelege că fiecare din formulele stabilite (37—41) și (43), (45) vor fi introduse în blocuri de calcul separate, avînd fiecare la intrare aceeași mărime X.

La fiecare bloc de calcul considerat există dispozitive de comparație între mărimile reale calculate și cele programate, astfel ca diferența care constituie eroarea, să producă un semnal proporțional, menit să corecteze valoarea parametrului respectiv.

Catedra de aeronave și instalații de bord
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *J. S. Pistiner*, On-off Control System for Attitude Stabilization of Space Vehicle, American Rocket Society Journal, Nr. 4, 1959.
2. *R. M. Nollan*, Reentry Navigation, Missiles and Rockets, Nr. 4, 1959.
3. *C. Guță*, Încălzirea și suprasarcinile ce apar pe rachete sau nave cosmice la reintrarea în atmosferă. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, Nr. 6, 1969.
4. *K. B. Alexeev, G. G. Bebenin*, Upravlenie Kosmiceschim letatelnîm apparatom, Mașinostroenie. Moscova, 1964.
5. *V. P. Seleznev*, Navigaționnîe ustroistva Oboronghiz, Moscova, 1961.
6. *M. Salmon*, Astronautique principes du vol balistique et spatial, Libraire Polytehnique, Paris, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z.: 620.1

SOLICITĂRI IN ZONELE REAZEMELOR LATERALE ALE RECIPIENTELOR CILINDRICE VERTICALE *

M. RENERT, V. V. JINESCU, G. NUCĂ, V. CHIRIAC, E. FISCHER, D. FLONDOR.

Rezemarea laterală (fig.1) reprezintă una dintre formele contructive de bază ale recipientelor sub presiune și de alte tipuri, ce se montează în poziție verticală. Cu toate acestea, calculul solicitărilor în corpul cilindric în zona reazemelor, nu este încă deplin elucidat și nu au fost publicate rezultate experimentale corespunzătoare [1]. Sînt cunoscute ample analize teoretice ale efectelor unor sarcini concentrate asupra învelișurilor cu perete subțire, cărora le lipsește însă confirmarea experimentală [2, 3, 4]. În lucrarea [6] se studiază reazeme laterale de construcție specială, mai rar întîlnite.

Lucrarea de față redă rezultatele obținute de autori, sub aspect teoretic și sub aspect experimental, pe modele executate la scară redusă.

*

Considerînd construcția uzuală, reprezentată în fig.1, cu plăci de rigidizare aplicate pe conturul cilindric în zona reazemelor, prin sudare pe contur, încărcarea axială R ce revine unui reazem, introduce în învelișul cilindric o încovoiere locală (fig.2). Admițînd că presiunea de contact dintre plăcuță și înveliș variază liniar pe înălțime, pentru plăcuța de înălțime h și lățime B, valoarea maximă a acestei presiuni de contact este (fig.2).

$$p_0 = \frac{6bR}{Bh^2} \tag{1}$$

Considerînd cazul cel mai frecvent al recipientului montat pe 4 suporturi,[1] repartiția pe circumferință a încărcării este cea reprezentată în fig. 3, fiind vorba deci de încărcare locală, periodică, lipsită de simetrie de rotație.

La tratarea problemei fără simetrie axială, în lucrările [2...5] se utilizează ecuații diferențiale de ordinul 8, pentru deplasarea radială w.

---

* Manuscris predat redacției la data de 16 martie 1972.

[1] Calculele se efectuează pentru acest caz. Tratarea cazurilor mai puțin frecvente, cu alt număr de reazeme, de exemplu 3 sau 6, după metoda utilizată în lucrare, nu prezintă dificultate.

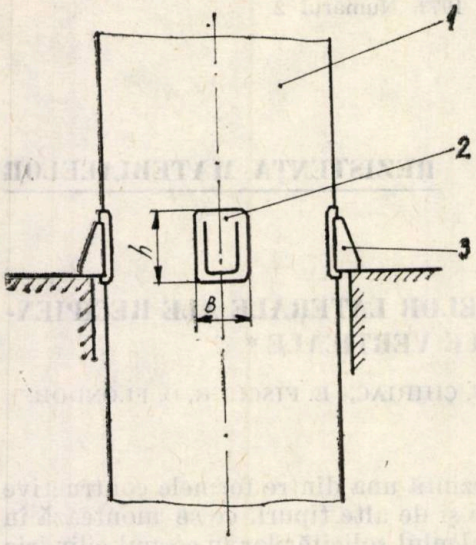


Fig. 1

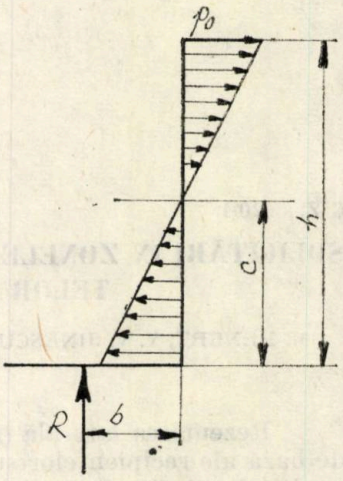


Fig. 2

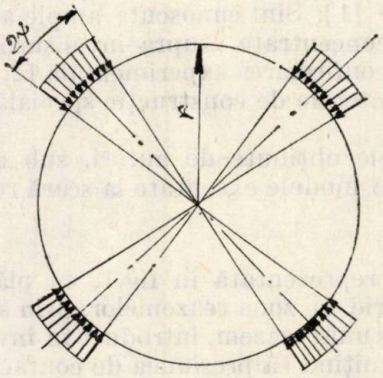


Fig. 3

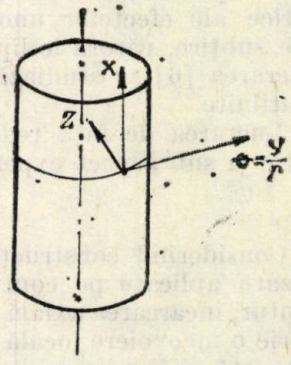


Fig. 4

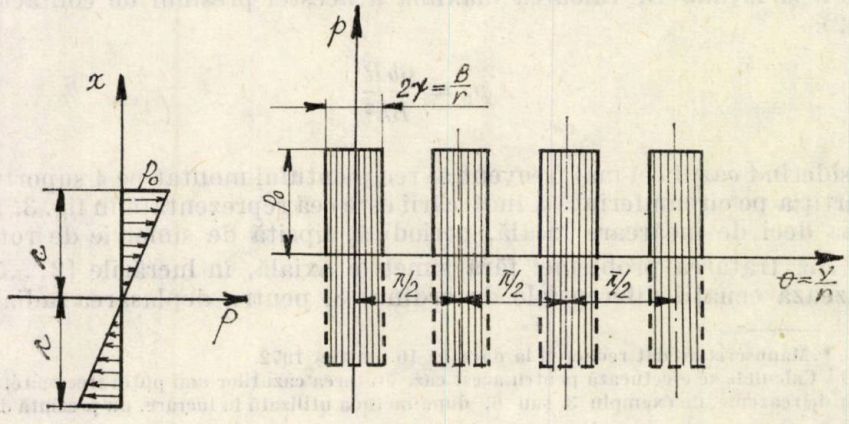


Fig. 5

În cele ce urmează, se utilizează sistemul de ecuații diferențiale de ordinul 4 [7]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{E\delta}\cdot\nabla^2\nabla^2\Phi=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&-p+D\nabla^2\nabla^2 w-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

unde

$$dy = rd\theta \qquad (3)$$

și

$$p = p(x,\ y) = p(x,\ r\theta) \qquad (4)$$

este presiunea de contact ce încarcă (local) învelișul și acționează în direcția radială z. Sistemul de axe de coordonate utilizat este indicat în fig. 4. Cu Φ s-a notat funcția eforturilor și cu w deplasarea radială a unui punct de pe suprafața mediană (variația razei suprafeței mediane). Rigiditatea cilindrică este

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \qquad (5)$$

unde s-a notat: E — modulul de elasticitate al materialului, μ — coeficientul contracției transversale, δ — grosimea peretelui.

Sistemul (2) — care reprezintă ecuațiile de echilibru ale elementului de înveliș — este stabilit în următoarele ipoteze:

a) învelișul este subțire și de curbură mică ($r \gg \delta$), ceea ce face ca, pentru unghiurile de pantă ale suprafeței deformate și a celei nedeformate, sinusul și tangenta să poată fi înlocuite prin unghiul respectiv;

b) materialul este liniar-elastic;

c) deplasările $w \gg (u,\ v)$, unde u este deplasarea după direcția x și v — deplasarea după direcția y;

d) este valabilă ipoteza normalelor;

e) eforturile tăietoare sînt mici în raport cu eforturile normale

★

Pentru încărcarea învelișului cilindric datorită reazemelor, conform fig.1 și 2, rezultă schema din fig. 5.

În aceste condiții, explicitarea expresiei (4) pentru presiunea (locală) asupra corpului cilindric este:

$$p = \frac{4}{L}\cdot\frac{p_0}{c}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{2\pi c}{L}m}{(2\pi m/L)^2}-\frac{c\cos\frac{2\pi c}{L}m}{2\pi m/L}\right]\sin\frac{2\pi m}{L}x\times$$

$$\times\left[\frac{4\psi}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n\psi}{n}\cdot\cos\frac{4ny}{r}\right], \qquad (6)$$

unde p_0 este dat de relaţia (1), valoarea mărimii L (fig. 9) urmînd a fi precizată. După regrupare se obţine :

$$p = \frac{16\psi}{\pi Lc} p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi cm}{L}}{(2\pi m/L)^2} - \frac{c \cos \frac{2\pi c}{L} m}{2\pi m/L} \right] \sin \frac{2\pi m}{L} x +$$

$$+ \frac{8}{\pi Lc} p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi cm}{L}}{(2\pi/mL)^2} - \frac{c \cos \frac{2\pi c}{L} m}{2\pi m/L} \right] \times$$

$$\times \sin \frac{4n\psi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi m}{L} x \cdot \cos \frac{4n}{r} y. \tag{7}$$

Expresiile (6) şi (7) pot fi scrise şi sub forma

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{2\pi m}{L} x \cdot \cos \frac{4n}{r} y, \tag{8}$$

în care

$$P_{mo} = \frac{16\psi}{\pi Lc} p_0 \left[\frac{\sin \frac{2\pi cm}{L}}{(2\pi m/L)^2} - \frac{c \cos \frac{2\pi c}{L} m}{2\pi m/L} \right] \tag{9, a}$$

şi

$$P_{mn} = \frac{8}{\pi Lc} p_0 \left[\frac{\sin \frac{2\pi cm}{L}}{(2\pi m/L)^2} - \frac{c \cos \frac{2\pi c}{L} m}{2\pi m/L} \right] \cdot \frac{\sin 4n\psi}{n} \tag{9, b}$$

Admiţînd că soluţiile sistemului (2) pot fi obţinute sub forma unor sume trigonometrice de forma

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} \cos \frac{4n}{r} y \cdot \sin \frac{2\pi m}{L} x, \tag{10}$$

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \cos \frac{4n}{r} y \cdot \sin \frac{2\pi m}{L} x, \tag{11}$$

se obţine pentru aceste soluţii, în expresie adimensională,

$$\left.\begin{aligned} \overline{w} = \frac{w}{r} = \frac{16\psi}{\pi} \frac{p_0}{E} \sum_{m=1}^{\infty} & \frac{\overline{P}_{m0}}{\frac{\overline{\delta}^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{2\pi m}{\alpha} \right)^4 + \overline{\delta}} \sin \frac{2\pi m}{L} x + \\ + \frac{8}{\pi} \frac{p_0}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} & \frac{\overline{P}_{mn} \sin \frac{2\pi m}{L} \cdot x \cdot \cos \frac{4n}{r} y}{\frac{\overline{\delta}^3}{12(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha} \right)^2 + (4n)^2 \right]^2 + \overline{\delta} \frac{2\pi m/\alpha}{[(2\pi m/\alpha)^2 + (4n)^2]^2}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Phi} = \frac{\Phi}{r^3 p_0} = \frac{16\psi}{\pi} - \bar{\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{P}_{mo}}{\dfrac{\bar{\delta}^3}{12(1-\mu^2)}\left(\dfrac{2\pi m}{\alpha}\right)^3 + \bar{\delta}\left(\dfrac{2\pi m}{\alpha}\right)^2} \sin\frac{2\pi m}{L}x + \\ + \frac{8}{\pi} - \bar{\delta} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{2\pi m}{\alpha}\right)^2 \overline{P}_{mn} \sin\dfrac{2\pi m}{L}x \cdot \cos\dfrac{4n}{r}y}{\dfrac{\bar{\delta}^3}{12(1-\mu^2)}\left[\left(\dfrac{2\pi m}{\alpha}\right)^2 + (4n)^2\right]^2 + \bar{\delta}\left(\dfrac{2\pi m}{\alpha}\right)^4}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

cu notaţiile

$$\overline{P}_{mo} = \frac{\pi}{16\,\psi p_0} P_{mo}; \qquad \overline{P}_{mn} = \frac{\pi}{8p_0} P_{mn}, \quad (14)$$

mărimile P_{mo} şi P_{mn} fiind cele date de relaţiile (9), iar

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{r} \quad \text{şi} \quad \alpha = \frac{L}{r}. \quad (15)$$

Se face observaţia importantă că, deşi reflectă corect caracterul încărcării învelişului, ecuaţiile (4) şi soluţiile (12) şi (13) nu reflectă rigidizarea locală a acestuia, datorită cordoanelor de sudură care îmbină plăcuţele cu cilindrul şi plăcuţelor înseşi. Introducerea unei rigidităţi cilindrice D, variabilă, în ecuaţiile (2), ar complica rezolvarea problemei. Pentru aceste motive se va recurge la introducerea unor corecţii stabilite pe bază experimentală în formulele (12) şi (13).

Mărimea $c = \dfrac{h}{2}$ (fig. 2 şi 5), iar mărimea L care depinde de extinderea reazemului după axa x, va fi determinată pe baza experimentelor.

Pornind de la soluţiile (12) şi (13) ale sistemului (2), pot fi determinate toate mărimile ce caracterizează starea de eforturi unitare şi de deformaţii datorite încărcării, în zona reazemelor, aşa cum se va arăta mai departe.

★

Pentru experimentare a fost folosit dispozitivul conform figurii 6, care cuprinde modelul corpului cilindric cu reazeme laterale 1, scaunul 2 şi tirantul 3, cu ajutorul căruia se realizează încărcarea (axială) a reazemelor. Relaţiile (12), (13) şi (15) arată că, în ceea ce priveşte geometria, criteriile de similitudine sînt grosimea relativă $\bar{\delta}$ a învelişului, extinderea ψ (respectiv 2ψ) a reazemului, exprimată în radiani (fig. 5) şi mărimea L/r, avînd semnificaţia „lungimii relative de influenţă" ce urmează a fi determinată experimental. În ceea ce priveşte încărcarea, criteriului de similitudine este p_0/E.

Figura 7 reprezintă mai detaliat, modelul, iar figura 8-distribuţia traductorilor tensometrici pe suprafaţa acestuia.

Pe tirantul 3 (fig. 6), se aplică de asemenea traductori tensometrici, permiţînd măsurarea directă a încărcării tuturor reazemelor. Se precizează că piuliţa de la capătul superior al tirantului, este reazemată sferic, pentru

a se evita introducerea unor solicitări de încovoiere în sistem. De altfel, aplicarea a doi traductori tensometrici, diametrul opusi pe tirant, permite excluderea unui eventual efect de încovoiere în acesta, luîndu-se media citirilor corespunzătoare.

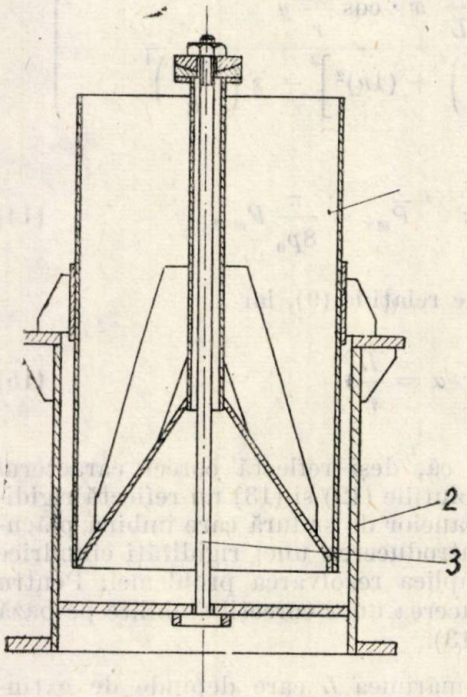


Fig. 6

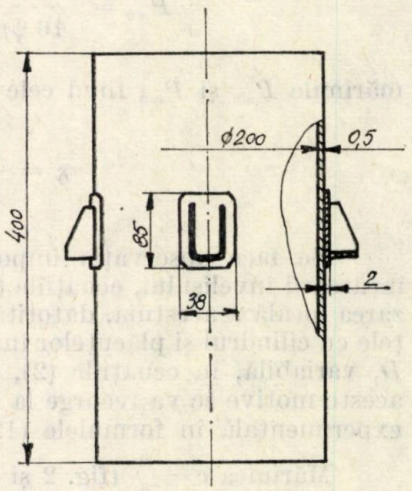


Fig. 7

Pentru unul dintre modelele utilizate:

$$r = 100 \text{ mm}; \delta = 0{,}5 \text{ mm}; \overline{\delta} = \delta/r = 5 \times 10^{-3}; \psi = 11^\circ (0{,}19 \text{ rad.});$$

$$2c = h = 85 \text{ mm}; \quad B = 38 \text{ mm}; \quad b = 22 \text{ mm},$$

proporţiile fiind cele ce se întîlnesc la recipientele la scară industrială.

La o încărcare a reazemelor $p_0 = 7{,}45$ kgf/cm^2, calculată cu relaţia (1), s-au măsurat, pe meridianul alăturat reazemelor (A_1 şi A_2, fig. 8), variaţii ale razei suprafeţei mediane reprezentate în graficul din fig. 9, (curba 1). Aceasta permite şi determinarea lungimii de influenţă a reazemului pentru cazul examinat ($L = 160$ mm, în general $L = 2h$). Meridianul alăturat reazemelor este cel pe care se măsoară cea mai mare variaţie a razei. Cu creşterea distanţei de la reazem, variaţia razei scade, fiind minimă la mijlocul distanţei dintre acestea.

Existenţa plăcilor de rigidizare dintre corpul cilindric şi aripioarele reazemelor constituie o *rigidizare locală*, al cărei efect trebuie luat în consideraţie. Dacă se notează cu δ_{tot} grosimea ce rezultă din însumarea grosimii

peretelui cilindric δ şi a grosimii plăcii de consolidare δ_{pl}

$$\delta_{tot} = \delta + \delta_{pl}, \tag{16}$$

se constată că, aplicînd variaţiei relative $\overline{w}$ a razei din relaţia (12) factorul de corecţie δ/δ_{tot}, adică scriind

$$\overline{w}^* = \frac{\delta}{\delta_{tot}}\,\overline{w}, \tag{17}$$

curba teoretică 3 ce se obţine cu această relaţie, reflectă corect rezultatele obţinute experimental. Calculele necesare trasării curbei teoretice necorectate 2, au fost efectuate la centrul de calcul al Institutului de proiectări pentru chimia anorganică, IPRAN.

Valorile $\overline{\Phi}$ calculate conform relaţiei (13), trebuie corectate şi ele :

$$\overline{\Phi}^* = \frac{\delta}{\delta_{tot}}\,\overline{\Phi}. \tag{18}$$

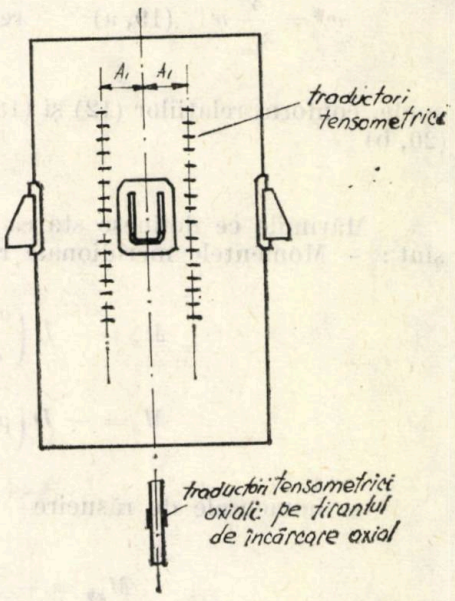


Fig. 8

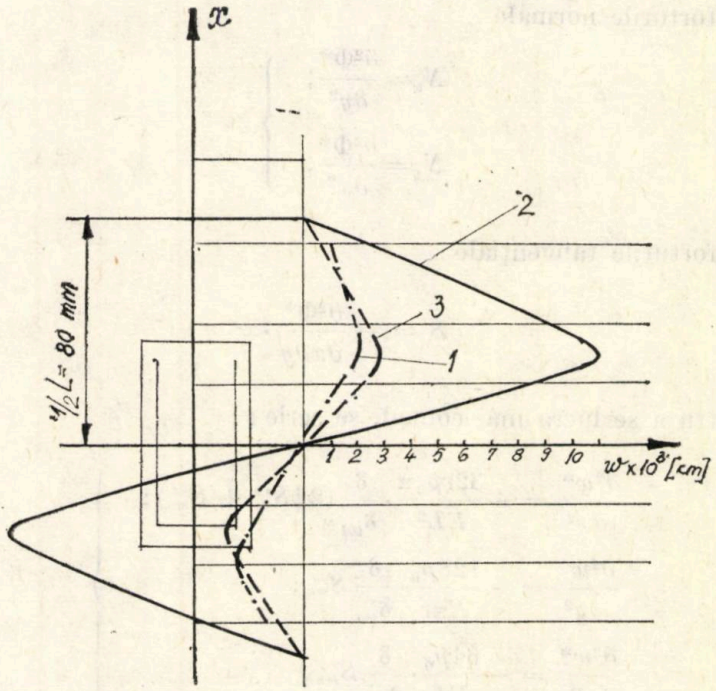


Fig. 9

Valorile efective ale variației razei și ale funcției eforturilor sînt, așa dar

$$w^* = \frac{\delta}{\delta_{tot}} w \quad (19, \text{a}) \qquad \text{respectiv} \qquad \Phi^* = \frac{\delta}{\delta_{tot}} \Phi \quad (19, \text{b})$$

unde, conform relațiilor (12) și (13), $w = r\overline{w}$ (20, a) respectiv $\Phi = r^3 p_0 \overline{\Phi}$ (20, b)

★

Mărimile ce definesc starea de eforturi unitare în corpul cilindric sînt : — Momentele meridionale respectiv inelare

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right); \\ M_y &= -D\left(\mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

— momentele de răsucire

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y}; \tag{22}$$

— eforturile normale

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2}; \\ N_y &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2}; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

— eforturile tangențiale

$$S = -\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y}. \tag{24}$$

Pentru a se lucra mai comod, se scrie :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} &= -\frac{32 r p_0 \pi}{EL^2} \cdot \frac{\delta}{\delta_{tot}} (2\psi S_m^{xx} + S_{mn}^{xx}); \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} &= -\frac{128 p_0}{E\pi r} \cdot \frac{\delta}{\delta_{tot}} S_{mn}^{yy}; \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} &= -\frac{64 p_0}{EL} \cdot \frac{\delta}{\delta_{tot}} S_{mn}^{xy}; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

de asemenea

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x^2} &= -\frac{32\,r^2p_0\,\delta\pi}{L^2}\cdot\frac{\delta}{\delta_{tot}}\,[2\psi F_m^{xx}+F_{mn}^{xx}];\\ \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y^2} &= -\frac{128\delta p_0}{\pi}\cdot\frac{\delta}{\delta_{tot}}F_{mn}^{yy};\\ \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x\partial y} &= -\frac{16\delta r p_0}{L}F_{mn}^{xy}.\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

Expresiile funcţiilor S şi F sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

$$S_m^{xx}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2\overline{P}_{mo}}{\frac{\overline{\delta}^3}{12\,(1-\mu^2)}\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^4+\overline{\delta}}\cdot\sin 2\pi\frac{m}{L}x$$

$$S_{mn}^{xx}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2\overline{P}_{mn}\sin 2\pi\frac{m}{L}x\cdot\cos 4\frac{n}{r}y}{\frac{\overline{\delta}^3}{12\,(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^2+\overline{\delta}\frac{(2\pi m/\alpha)^4}{\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^2}}$$

$$S_{mn}^{xy}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn\overline{P}_{mn}\cos 2\pi\frac{m}{L}x\cdot\sin 4\frac{ny}{r}}{\frac{\overline{\delta}^3}{12(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^2+\overline{\delta}\frac{(2\pi m/\alpha)^4}{\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^2}}$$

$$S_{mn}^{yy}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\overline{P}_{mn}\sin 2\pi\frac{m}{L}x\cdot\cos 4\frac{ny}{r}}{\frac{\overline{\delta}^3}{12\,(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^2+\overline{\delta}\frac{(2\pi m/\alpha)^4}{\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^2}}$$

$$F_m^{xx}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{P}_{mo}}{\frac{\overline{\delta}^3}{12\,(1-\mu^2)}\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^3+\overline{\delta}}\cdot\sin\frac{2\pi m}{L}x$$

$$F_{mn}^{xx}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^4\overline{P}_{mn}\cdot\sin\frac{2\pi m}{L}x\cdot\cos\frac{4n}{r}y}{\frac{\overline{\delta}^3}{12\,(1-\mu)^2}\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^4+\overline{\delta}\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^4}$$

$$F_{mn}^{xy}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^3n\overline{P}_{mn}\cos\frac{2\pi m}{L}x\cdot\sin\frac{4n}{r}y}{\frac{\overline{\delta}^3}{12(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^2+(4n)^2\right]^4+\overline{\delta}\left(\frac{2\pi m}{\alpha}\right)^4}$$

$$F_{mn}^{yy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n^2 \overline{P}_{mn} \sin \frac{2\pi m}{L} x \cdot \cos \frac{4n}{r} y}{\frac{\overline{\delta}^3}{12(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{2\pi m}{\alpha} \right)^2 + (4n)^2 \right]^4 + \overline{\delta} \left(\frac{2\pi m}{\alpha} \right)^4}$$

★

Pentru calcule practice interesează, de fiecare dată, o astfel de programare, încît, pornind de la relațiile (21—26), și calculînd eforturile unitare normale

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{\delta} \pm \frac{6M_x}{\delta^2}, \\ \sigma_y &= \frac{N_y}{\delta} \pm \frac{6M_y}{\delta^2}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

de asemenea efortul unitar echivalent

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}, \tag{28}$$

(de exemplu pe baza teoriei energetice a ruperii), să se obțină pentru σ_{ech} direct valoarea maximă. Programarea este ușurată de faptul că cele mai mari eforturi unitare apar în meridianul adiacent plăcii de consolidare. Pe de altă parte este interesant ca răspunsul calculatorului să permită și formarea unei imagini a repartizării solicitărilor pe întreaga zonă a reazemului

Acestea fiind cerințele, se precizează cîteva amănunte privind programul ce permite rezolvarea problemei.

Executarea programului realizează două obiective:

a) Tabelarea mărimilor S și F la nodurile unei rețele date;

b) Stabilirea punctului cu solicitare maximă, însoțită și de calculul acestei solicitări.

Sirul datelor are următoarea componență:

1) numărul valorilor x, deci al paralelelor ce formează rețeaua. — Aceste paralele sînt luate echidistante.

2 pasul $2\pi x/L$ exprimat în radiani, prima valoare a acestuia fiind zero.

3) numărul valorilor, y, deci al generatoarelor ce formează rețeaua;

4) lista valorilor y/r;

5) valorile parametrilor β, α, $\overline{\delta}$, ψ, μ.

Schema-bloc, generală, a programului este:

Intrare date
Calculul tabel solicitări
Ieșire tabel solicitări
Calcul solicitare maximă
Ieșire solicitare maximă

„Intrare date" realizează citirea datelor enumerate de pe cartele sau bandă perforată și memorarea lor de către calculator. „Calcul tabel solicitări" cuprinde calculul valorilor

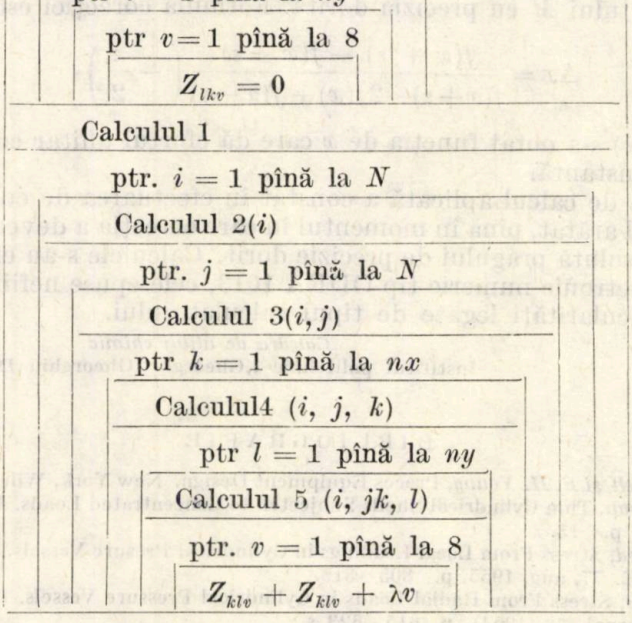
$$S_m^{xx},\ S_{mn}^{xx},\ S_{mn}^{xy},\ S_{mn}^{yy},$$

$$F_m^{xx},\ F_{mn}^{xx},\ F_{mn}^{xy},\ F_{mn}^{yy},$$

în toate nodurile rețelei. De menționat că $2\pi x/L$, variind de ex. de la 0°C la 180° cu pas de 10°, deci 19 valori, cu 3 valori pentru y și cu sumarea în expresiile lui S și F pînă la indicele 20, numărul expresiilor de tipul S^{xx}_{mn} este de $19 \times 3 \times 8 \times 400 = 182.400$. Chiar dacă y va lua o singură valoare, numărul de peste 60 000 expresii de calculat, obligă la o examinare atentă a posibilităților de economie în calcul. De dorit este evitarea sau măcar reducerea la minimum a repetărilor în calcul unor componente ale expresiilor lui S și F.

Aceste considerații au dus la efectuarea unui studiu sistematic al ordinei optime de realizare a ciclurilor de calcul, ceea ce a condus la soluția de a adopta o ordine oarecum neașteptată. În loc de a se începe prin a stabili valorile x, y, a alege una din cele 8 funcții și a se face calculul și sumarea după i și j, s-a constatat că este mai avantajoasă alegerea unei perechi de valori pentru i și j și efectuarea calculelor pentru toate variabilele și toate combinațiile de valori x și y.

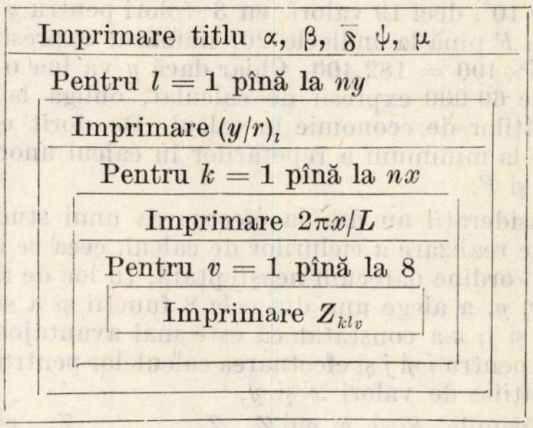
Notînd mărimile S și F cu Z_1, Z_2, ...Z_3, numărul de valori pentru x cu nx, similar ny pentru y și cu N valoarea maximă a indicelui de sumare, schema logică a acestei secțiuni a programului este :



Prin „Calculul 3 (i, j)" de ex. se înțelege calcularea tuturor componentelor lui S și F ce depind de indicii i și j sau numai de j.

Semnificații similare au toate blocurile de calcul 1—5. Schema logică a secțiunii „ieșire tabel", realizează imprimarea tabelului cu solicitările din noduri dar nu în ordinea indicilor din blocul de calcul ci după cum reiese

din schema dată :



Calculul solicitării maxime se face în două etape :

a) Se calculează efortul unitar echivalent în toate nodurile reţelei şi se alege valoarea maximă.

b) Pornind de la nodul găsit conform punctului (*a*) şi care se află în vecinătatea punctului *M* cu solicitare maximă, se efectuează un şir de corectări succesive ale lui *x* în aşa fel încît să se realizeze aproximarea abscisei punctului *M* cu precizia dorită. Formula corecţiei este

$$\Delta x = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{f(x+\varepsilon) - 2f(x) + f(x-\varepsilon)} \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

unde prin $f(x)$ s-a notat funcţia de x care dă efortul unitar echivalent, iar prin ε o constantă.

Schema de calcul aplicată a constat în efectuarea de corecţii asupra lui *x* în modul arătat, pînă în momentul în care corecţia a devenit inferioară în valoare absolută pragului de precizie dorit. Calculele s-au efectuat la un calculator electronic numeric tip ODRA 1013, cele epuse nefiind însă afectate de particularităţi legate de tipul calculatorului.

Catedra de utilaj chimic
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *L. E. Brownell şi E. H. Young*, Proces Equipment Design. New York, Wiley, 1959, p. 198.
2. *Shav Wen Yunan*, Thin Cylindrical Shells Subjected to Concentrated Loads. In : Quart. Appl. Math., *4* (1946), p. 13.
3. *P. P. Bijlaard*, Stress From Local Loadings in Cylindrical Presure Vessels. In : Trans, A. S. M.E. 77, aug. 1955, p. 805–816.
4. *P. P. Bijlaard*, Stress From Radial Loads in Cylindrical Pressure Vessels. In : The Welding Journal, *33* (1954), p. 615–623 s.
5. *H. Gunther*, Zur Berechnung kreiszylindrischer Rohre unter nichtsymmetrischer Belastung. In : Die Technik, 15, nr.2. 1960, p. 76–79.
6. *L. Varga*, Bestimmung der durch Apparatepratzen geweckten Spannungen und Ausbildung der optimalen Pratzenkonstruktion, I, în Periodica polytehnica Engineering-Maschinen und Bauwesen vol. 12, nr. 3/1968.
7. *S. D. Ponomariov, ş.a.* Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini, vol. II, Bucureşti Editura tehnică, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

MOTOARE CU ARTEDE INTERNĂ

C.Z. 621.43.016

THE ESTIMATION OF THE GAS TEMPERATURE WITHIN THE CYLINDER OF A COMPRESSION IGNITION ENGINE

N. APOSTOLESCU, B. GRÜNWALD

In a previous paper [1], an original calculation method was developed to estimate the temperature field within the cylinder of a spark-ignition engine. This method is based on a physical model which considers that one part of the charge is constituted from unburned gases and another part is constituted from many thermally differentiated elements of burned gases. The dissociation in the flame, the change of the chemical equilibrium and the heat transfer by convection were considered too.

In another work [2] it has been shown that combustion characteristics of the heterogeneous mixtures within the cylinder of a C.I. engine permit the adoption of a combustion two space physical model to calculate the heat release. In this paper the authors have used a two-space model to establish more realistically the gas concentration and temperatures within the cylinder of a C.I. engine.

The combustion two-space physical model has the following features :

— At one time the charge is divided into three parts : the „hot" burned gases, which are homogeneous chemically and physically ; the „cold" unburned gases, which are homogeneous too ; and an element in which chemical reactions take place at the flame temperature. Each elementary fraction of unburned chemically reactive gases, following an isenthalpic combustion, is passing from the unburned gas temperature T_{ai} up to the flame temperature T_{fl} with an accompaning change in its chemical composition. Then the elementary fraction of burned gases, which resulted from the chemical reaction is mixed with the earlier burned gases and both quantities form a homogeneous mixture with a temperature of $\overline{T}_{ga}$. The mixing process, on the one hand, the expansion process, on the other hand, reprezent two forms of interaction between the elementary fraction which reacts chemically and the burned and the unburned gases.

— Compression and expansion of the burned and unburned gases are accompanied by heat losses to the walls.

In this paper only heat transfer by convection will be considered. In order to express this process, the burned and unburned gas temperatures and their infinitesimal variation are calculated in two steps. First,

compression and expansion of the gases take place without mixing but with heat transfer. Second, mixing between the burned gases and the flame gases occurs with heat transfer being neglected.

It is known that the internal energy is directly proportional to the temperature. Therefore, the changes of temperature that take place in the two parts of the charge are calculated on the basis of their internal energy variations.

According to the first law of thermodynamics, the infinitesimal variation of the internal energy is determined by the equation

$$dU_\alpha = \nu_c Q_c \, d\xi_\alpha - A dL_\alpha - dQ_{w\alpha} \tag{1}$$

where U_α is the momentary internal energy of the charge, ν_c — the molar quantities of fuel, Q_c — the reaction heat of fuel, ξ_α — the fraction of burned fuel ($\xi_\alpha = \nu_{c\alpha}/\nu_c$, where $\nu_{c\alpha}$ is the fuel quantity reacted from the beginning of combustion), L_α — the momentary work developed by the charge, $Q_{w\alpha}$ — the momentary heat loss, transfered through the walls by convenction, α — the crank angle (CA), A — thermal equivalent of mechanical work.

The internal energy of the charge at one time, specified by α is

$$U_\alpha = \xi_\alpha \nu_{ga} u^a_{ga\alpha} + \int_{\alpha-1}^{\alpha} \nu_{ga} u_{fl,\alpha-1} \, d\xi_\alpha + (1 - \xi_\alpha) \nu_{ai} u_{ai\alpha}, \tag{2}$$

where $u^a_{ga\alpha}$, $u_{fl,\alpha-1}$, $u_{ai\alpha}$ are the momentary molar internal energies of the burned gases before mixing, of the burned gases in the flame (flame gases) and of the unburned gases, respectively, ν_{ai} — the molar quantities of unburned gases at the beginning of combustion, ν_{ga} — the molar quantity of burned gases at the end of the combustion.

The differential equation of the internal energy is

$$dU_\alpha = \xi_\alpha \nu_{ga} \, du^a_{ga\alpha} + (\nu_{ga} u_{fl,\alpha-1} - \nu_{ai} u_{ai\alpha}) \, d\xi_\alpha + (1 - \xi_\alpha) \nu_{ai} \, du_{ai\alpha} \tag{3}$$

One can notice that in order to obtain the equation (3), one must exclude the mixing process. Only in that case one obtains $\nu_{ga} u^a_{ga\alpha} d\xi_\alpha = 0$, and thus, the equation (3) is written correctly.

The energetic balance, written for the element in which reaction take place, considering an isenthalpic combustion is

$$\nu_c Q_c \, d\xi_\alpha = (\nu_{ga} u_{fl\alpha} - \nu_{ai} u_{ai\alpha}) \, d\xi_\alpha + 1.986 \, (\nu_{ga} T_{fl\alpha} - \nu_{ai} T_{ai\alpha}) \, d\xi_\alpha \tag{4}$$

where $T_{ai\alpha}$, $T_{fl\alpha}$ are the momentary temperatures of the unburned gases and of the flame gases respectively, $U_{fl\alpha}$ — the momentary molar internal energy of the burned gases in the flame.

The infinitesimal variations of the molar internal energy before mixing are

$$\begin{aligned} du^a_{ga\alpha} &= C_{vga\alpha} d\overline{T}^a_{ga\alpha} \\ du_{ai\alpha} &= C_{vai\alpha} dT_{ai\alpha} \end{aligned} \tag{5}$$

where $C_{vg\alpha\alpha}$, $C_{vai\alpha}$ are the molar specific heat of the burned gases and the unburned gases, respectively, $\overline{T}^{a}_{g\alpha\alpha}$ — the momentary mean temperature of the burned gases before mixing of the burned gases and the flame gases takes place.

In the first step, the burned and the unburned gas temperatures are determined from the polytropic equation namely

$$\overline{T}^{a}_{g\alpha\alpha} = \overline{T}_{ga,\alpha-1}\left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1}}\right)^{1-1/m_{g\alpha\alpha}} \tag{6}$$

$$T_{ai\alpha} = T_{ai,\alpha-1}\left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1}}\right)^{1-1/m_{ai\alpha}} \tag{7}$$

Between two successive states, $\alpha - 1 \ldots \alpha$, the polytropic exponents $m_{g\alpha\alpha}$, $m_{ai\alpha}$ are invariable. This assumption is justified by the author's calculations based on this model. Figure 1 shows the polytropic exponents versus crank angle, and one can see that their changes $dm_{g\alpha\alpha}/d\alpha$ or $dm_{ai\alpha}/d\alpha$ are not significant.

The infinitesimal variation of temperatures are obtained from relations 6) and (7)

$$d\overline{T}^{a}_{g\alpha\alpha} = \frac{m_{g\alpha\alpha}-1}{m_{g\alpha\alpha}}\overline{T}_{ga,\alpha-1}\frac{p'_\alpha}{p_{\alpha-1}}\left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1}}\right)^{-1/m_{g\alpha\alpha}} \times d\alpha \tag{8}$$

$$dT_{ai\alpha} = \frac{m_{ai\alpha}-1}{m_{ai\alpha}}T_{ai,\alpha-1}\frac{p'_\alpha}{p_{\alpha-1}}\left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1}}\right)^{-1/m_{ai\alpha}} \times d\alpha \tag{9}$$

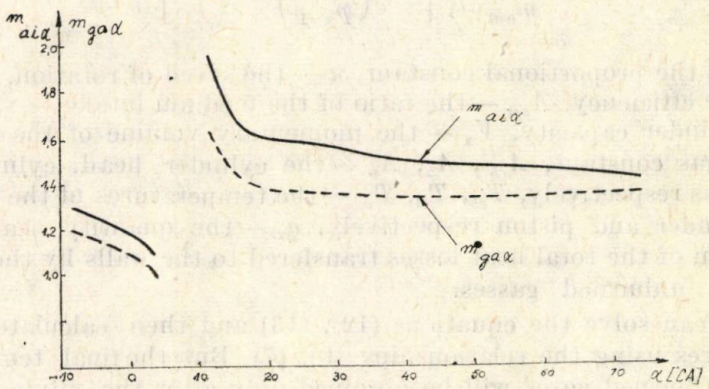


Fig. 1

where

$$p'_\alpha = \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_\alpha$$

The polytropic exponents were determined by the relation for the mean heat exchange in the time interval $\Delta_\alpha^{+)}$, expressed for a polytropic evolution

$$Q_{w(\alpha-1),\alpha} = \frac{k_\alpha - m_\alpha}{k_\alpha - 1} AL_{(\alpha-1),\alpha}$$

The next relationship was obtained [1], [2]:

$$dQ_{w\alpha} = Cn^{-0.2}\left(\frac{\eta_v}{A_{sal}}\right)^{0,9} (\nu_{ga}R)^{0.55}\, V_\alpha^{-0.55}\, p_\alpha^{0.2} \times \left[A_{ch}\left(\frac{p_\alpha V_\alpha}{\nu_{ga}R} - T_{ch}\right) + \right.$$

$$\left. + A_\alpha\left(\frac{p_\alpha V_\alpha}{\nu_{ga}R} - T_{cl}\right) + A_p\left(\frac{p_\alpha V_\alpha}{\nu_{ga}R} - T_p\right)\right] d\alpha \tag{11}$$

$$\frac{q_\alpha}{1+q_\alpha} \cdot \frac{1}{\xi_{\alpha-1}\nu_{ga}}\left(\frac{dQ_{w,\alpha-1}}{d\alpha} + \frac{dQ_{w\alpha}}{d\alpha}\right)\Delta\alpha =$$

$$= -3.972\,\frac{k_{ga\alpha} - m_{ga\alpha}}{k_{ga\alpha} - 1} \cdot \frac{\overline{T}_{ga,\alpha-1}}{m_{ga\alpha} - 1}\left[1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1}}\right)^{1-1/m_{ga\alpha}}\right] \tag{12}$$

$$\frac{1}{1+q_\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\xi_{\alpha-1})\nu_{ga}}\left(\frac{dQ_{w,\alpha-1}}{d\alpha} + \frac{dQ_{w\alpha}}{d\alpha}\right)\Delta\alpha = -3.972\,\frac{k_{ai\alpha} - m_{ai\alpha}}{k_{ai\alpha} - 1} \times$$

$$\times \frac{T_{ai,\alpha-1}}{m_{ai\alpha} - 1}\left[1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha-1}}\right)^{1-1/m_{ai\alpha}}\right] \tag{13}$$

where C is the proportional constant. n — the speed of rotation, η_v — the volumetric efficiency. A_{sal} — the ratio of the medium intake — valve area to the cylinder capacity, V_α — the momentary volume of the cylinder, R — the gas constant, A_{ch}, A_α, A_p — the cylinder head, cylinder and piston areas respectively, T_{ch}, T_{cl}, T_p — the temperatures of the cylinder-head, cylinder and piston respectively, q_α — the quantity that defines the fraction of the total heat losses transfered to the walls by the burned gases and unburned gasses.

One can solve the equations (12), (13) and then calculate the gas temperatures using the relationships (6), (7). But the final temperature $\overline{T}_{ga\alpha}$ of the burned gases will be obtained only after the mixing process is considered.

---

*) The differential equation (14) for the temperature field calculation was solved by numerical methods. Such methods are particularly suitable in this case because the calculation of the polytropic exponents requires small time intervals as is the case with the mixing process. In this case $\triangle\alpha$ means both an integration interval and time interval claimed for the mixing process and the heat transfer calculation. It was proved that $\triangle\alpha = 1$ CA is justified.

Substituting equations (3) and (4) into (1) one can obtain

$$\xi_\alpha \nu_{ga} du^a_{g\alpha\alpha} + (\nu_{ga} u_{fl,\alpha-1} - \nu_{ai} u_{ai\alpha})\, d\xi_\alpha + (1 - \xi_\alpha)\, \nu_{ai} du_{ai\alpha} = (\nu_{ga} u_{fl\alpha} -$$

$$-\nu_{ai} u_{ai\alpha})\, d\xi_\alpha + 1.986\, (\nu_{ga} T_{fl,\alpha} - \nu_{ai} T_{ai\alpha})\, d\xi_\alpha - A dL_\alpha - dQ_{w\alpha}$$

The previous equation can be simplified if it is considered that the term : $(\nu_{ga} u_{fl,\alpha-1} - \nu_{ga} u_{fl\alpha})\, d\xi_\alpha)$ is an infinitesimal quantity of the second order. As a result the differential equation becames :

$$\xi_\alpha \nu_{ga} du^a_{g\alpha\alpha} = 1.986(\nu_{ga} T_{fl\alpha} - \nu_{ai} T_{ai\alpha}) d\xi_\alpha - (1 - \xi_\alpha)\nu_{ai} du_{ai\alpha} - A dL_\alpha - dQ_{w\alpha} \quad (14)$$

and together with the differential equations (5), (8), (9), allows the calculation of the temperature increments before the mixing process.

The final temperature of the burned gases is then determined from the thermal balance equation of mixing, which is written for a small time $\Delta\alpha = \alpha - (\alpha - 1)$, that is synonymous with the integration interval, since $\Delta\alpha = 1$ CA. As a result, one can write

$$\xi_{\alpha-1} \nu_{ga} u^a_{g\alpha\alpha} + (\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1}) \nu_{ga} u_{fl\alpha} = \xi_\alpha \nu_{ga} u_{g\alpha\alpha} \quad (15)$$

where $u_{g\alpha\alpha}$ is the mean momentary molar internal energy of the burned gases, after mixing.

The mixing effect has a greater importance at the beginning of the combustion process when the difference $\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1}$ is on the same order of $\xi_{\alpha-1}$ than later the process. Anyway, the temperature variations are small enough to assume that molar specific heat are unchaged versus temperature in the equation (15). Consequently the previous relation (14) becomes

$$\overline{T}_{g\alpha\alpha} = T_{fl\alpha} - \frac{\xi_{\alpha-1}}{\xi_\alpha} (T_{fl\alpha} - \overline{T}^a_{g\alpha\alpha}) \quad (16)$$

where $\overline{T}_{g\alpha\alpha}$ is the mean momentary temperature of the burned gases after mixing,.

The calculation model presented here was used for three pressure-time diagrams from a monocylinder D12 C. I. Engine.

The engine operating conditions were selected for different combustion characteristics. The operating conditions and engine data are shown in table 1. For computation an I C L — computer was used.

In figures 2 ... 4 are shown the temperatures $\overline{T}_{g\alpha\alpha}$, $T_{ai\alpha}$, $T_{es}{}^{\alpha}$ corresponding to the three diagrams. The temperature $T_{es\alpha}$ was determined using the equation of state for ν_{ga} moles of burned gases.

The burned temperature ($\overline{T}_{g\alpha\alpha}$) variations have in all cases some characteristics in common. After a certain drop correponding to the thermal differentiation between the „hot" burned gases face and the „cold" initial mixture, there is an interval within moderate temperature varia-

tions. For example in figure 4, within a 13 dy. interval (between 2° BTC and 11° ATC), $\overline{T}_{ga\alpha}$ has a 35° K variation; in the same time $T_{es\alpha}$ increases

Table 1

Operating conditions	1	2	3
Number of the figure	2	3	4
Bore/stroke (mm)		108/130	
Power (HP)	4.124	7.05	9.56
Speed (rpm)	1560	1585	1820
Cyclic fuel consumption (10^{-6} kg/cycle)	29.815	40.617	50.37
Cyclic air consumption (10^{-3}kg/cycle)	1.133	1.340	1.153
Fuel	cc 35*)	cc 33*)	diesel
Injection advance (°BTC)	25	25	25

*) Mixture of cetane $\begin{matrix}(35\,\%)\\(33\,\%)\end{matrix}$ and α nethyl-naphtalene $\begin{matrix}(65\,\%)\\(67\,\%)\end{matrix}$

500° K. Then, $\overline{T}_{ga\alpha}$ decreases, going slowly to the average temperature of the burned gases in the cylinder ($T_{es\alpha}$).

In figures 2 ... 4 the moment of 50% cyclic fuel rate ($\xi = 0.5$) involved in the reaction was specified.

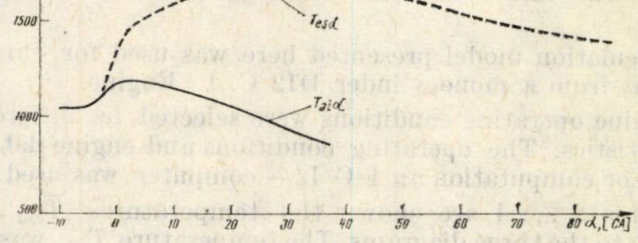


Fig. 2

It is intersting to note that approximately one half of the amount of the gases in the cylinder have at the beginning a 400 — 500°K higher temperature than the peak of the average temperature $(\overline{T}_{es\alpha})_{max}$, of the working gases.

These results point out a new idea about the temperature of the burned gases in the cylinder of the compression ignition engine.

It could be a base for studying more succesfully some of the most

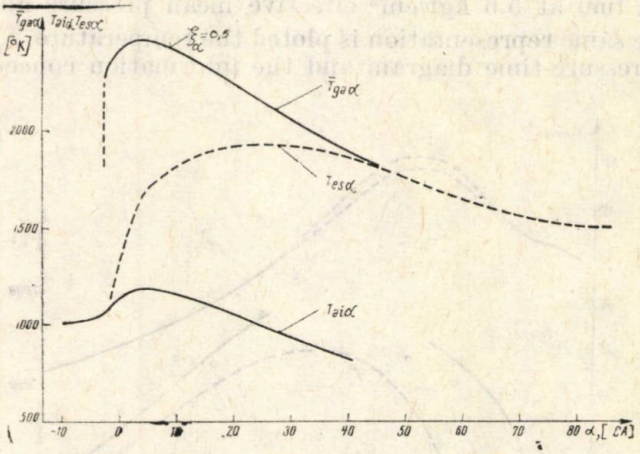


Fig. 3

intersting problems of the C. I. Engine, for example : soot formation, pollutants formation and radiation heat transfer.

During the second part of the combustion, characterized by lower

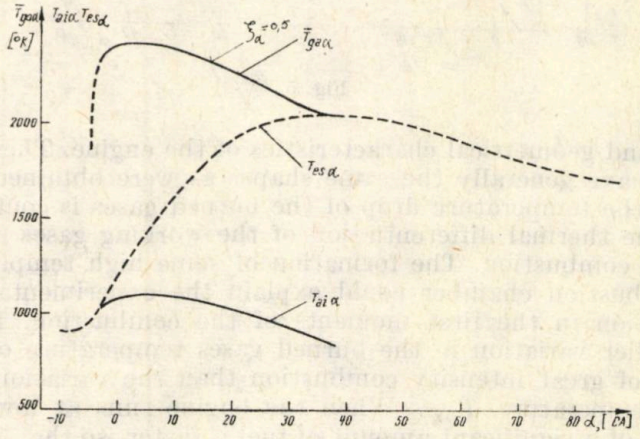


Fig. 4

heat release rates, the $\overline{T}_{ga\alpha} - \overline{T}_{es\alpha}$ differences go down to zero at the end of combustion.

Comparing these results to previous data it is possible to verify the calculation model presented here. There are flame and burned gases temperature measurements in a C. I. Engine cylinder made by Lyn, using an infra-red spectroscopic analysis [3] which are available.

Lyn analized the radiation spectra in a swirl prechamber during different moments of the combustion, recorded from succesive cycles. In figure 5 there are shown the measured temperatures for operation with Diesel fuel at 5.6 kgf/cm^2 effective mean pressure and 1000 rpm.

On the same representation is ploted the temperature $T_{es\alpha}$ calculated using the pressure-time diagram and the information concerning the in-

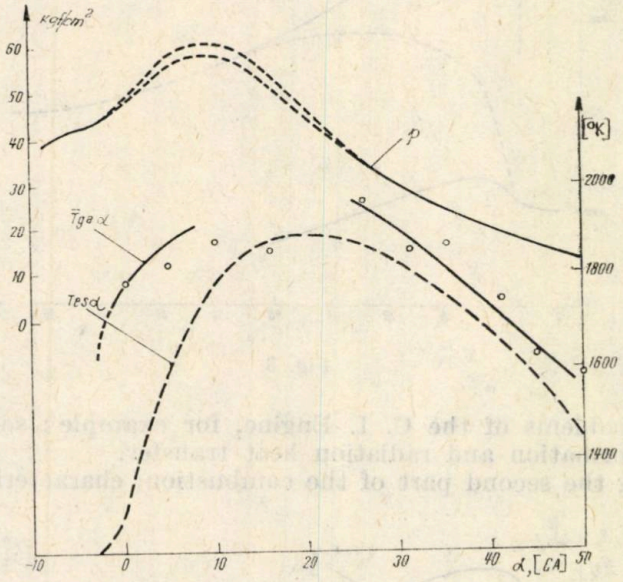


Fig. 5

take ratio and geometrical characteristics of the engine. These two representations have generally the same shapes as were obtained by calculation. Thus the temperature drop of the burned gases is confirmed which indicates the thermal differentiation of the working gases at the beginning of the combustion. The formation of some high temperature zones in the combustion chamber could explain the experimentally observed soot formation in the first moments of the combustion. It is verified that a smaller variation in the burned gases temperature occurs during the period of great intensity combustion than the variation of the conventional temperature $T_{es\alpha}$. When the engine runs at lower load, the combustion of a significant amount of fuel is faster, so that Lyn's measurements which show the shortness of the interval of the atenuated variations of the temperature are in accordance with the calculations. It could be seen also, how the differences between $\overline{T}_{ga\alpha}$ and $T_{es\alpha}$ become lower as the combustion progresses.

A surprising fact is the decreasing of the temperature measured in the interval of 12 to 22° ATC. Lyn thought that in that interval the results where altered by some colder volums of gases with excess air in the optical path of the measurements.

The understanding of the spatial temperature variations of the working gases in the engine cylinder makes possible a new view of old knowledge. The fundamental idea of the thermal cycles with homogeneous working gases is that the gases temperature increases gradually together with the combustion progress. As a result, the working gases accumulate internal energy until the average temperature peaks and the work is due only to the reaction heat release (equation 1). The real image is entirely different.

Burning, the fresh gases achieve a 1000 — 1500 °K temperature increase, and the burned gases initially become an „energy accumulator". That particularity of the combustion is reflected by the first term of equation (4). The energy transfered by the burning fraction to the neighbourhood is defined by the second term of the equation (4). The equation (14) derived from (1) explains the process of the producing work.

At the beginning on the combustion, as long as the volume variations due to the piston movements are small, the elementary work done by the gas volume involved in chemical reactions [1.986 $(\nu_{ga} T_{fl\alpha} - \gamma_{ai} T_{ai\alpha})$ $d\xi_\alpha$] is greater tahn the total transfer to piston and wals from the working gases, thus the pressure increases.

When the terms AdL_α, $dQ_{w\alpha}$ become important, the increase of the burning gas volume is smaller than the total increase of the volume, so that the pressure starts to decrease and the work is due not only to the flame gases but especially to the internal energy reduction. Thus the idea that the working fluid accumulates internal energy even after the moment of peak pressure in the cylinder seems to be wrong. In fact only the burning fractions around (1 ... 3%) $\nu_{ga}/d\alpha$, determines the internal energy increase. The rest of the working gases — almost 97—99% — constitutes the internal energy accumulator for the work (including heat lost). In table 2, for the case of the pressure-time diagram used by the authors

Table 2

α (CA ATC)	$\frac{dU_{ga\alpha}}{d\alpha}$ *	$\frac{dU_{ai\alpha}}{d\alpha}$ **	$A\frac{dL_\alpha}{d\alpha}$	$\frac{dQ_{w\alpha}}{d\alpha}$	$AL_{fl}\frac{d\xi_\alpha}{d\alpha}$
0	1	2	3	4	5
5	$0.389 \cdot 10^{-2}$	$0.0056 \cdot 10^{-2}$	$0.229 \cdot 10^{-2}$	$0.118.10^{-}{}_{1}$	$0.118 \cdot 10^{-2}$
10	$0.417 \cdot 10^{-2}$	$0.0848 \cdot 10^{-2}$	$0.446 \cdot 10^{-2}$	$0.299 \cdot 10^{-2}$	$0.243 \cdot 10^{-2}$
15	$0.161 \cdot 10^{-2}$	$0.0778 \cdot 10^{-2}$	$0.287 \cdot 10^{-2}$	$0.191 \cdot 10^{-2}$	$0.191 \cdot 10^{-2}$
20	$0.710 \cdot 10^{-2}$	$0.0589 \cdot 10^{-2}$	$0.666 \cdot 10^{-2}$	$0.255 \cdot 10^{-2}$	$0.155 \cdot 10^{-2}$
25	$0.739 \cdot 10^{-2}$	$0.0391 \cdot 10^{-2}$	$0.673 \cdot 10^{-2}$	$0.220 \cdot 10^{-2}$	$0.115 \cdot 10^{-2}$

*) Reducing of the internal energy of the burned gases.
**) Reducing of the internal energy of the initial mixture.
***) The work of the burning fraction at the flame temperature.
In keeping with equation 14 : (1) + (2) + (5) = (3) + (4).

[4], the comparative rates of change of the terms of equation (14) are shown at different degrees after the peak of the pressure.

It is observed that the rate of producing work has the same order of magnitude as the rate of the internal energy reduction of the burned gases (the rate of reduction of the internal energy of the initial mixture is 10 times less). Thus in the process of producing work, there appears an intermediate step, that in which the gases get a high thermal level by accumulating internal energy. Only after that step occurs the interaction with the piston and the cylinder walls.

The apperance of the average temperature variation of the working gases seems to be strange. The wrong image is due to the fact that the temperature $T_{es\alpha}$ is a fictious one. It could be thought of in a physical sense as a temperature only thinking that it represents on a different scale the product pressure-volume :

$$T_{es\alpha} = \frac{p \times V}{\nu_{ga} R}$$

As a result, it is observed that $T_{es\alpha}$ variation is the correct image only for the pV product :

$$\frac{dT_{es\alpha}}{d\alpha} = \frac{1}{\nu_{ga} R} \frac{d\,(pV)}{d\alpha} = \frac{1}{\nu_{ga} R} \left(p \frac{dV}{d\alpha} + V \frac{dp}{d\alpha} \right) \tag{17}$$

The pV product increase even after the moment of peak pressure is due to the important reserve of the internal energy accumulated by the burned gases in the engine cylinder.

From table 2 it can be seen that the work produced by the reactions heat release, after the peak pressure moment is approximatelly 2 — 6 times lower than piston work. Thus from equation (17) is obtained

$$p \left[\frac{dV}{d\alpha} \right] \gg V \left[\frac{dp}{d\alpha} \right]$$

due to the energy „accumulation" of the burned gases after the peak preassure moment.

REFERENCES

1. *Grünwald, B., Apostolescu, N.* — A calculation method of the temperature field within the cylinder of a spark— ignition engine. Rev. Roumaine des Sc. Tech., Série Électrotech. et énerget. T. 17, nr. 3, 1972.
2. *Apostolescu, N.*, — Calculul caracteristicii degajării căldurii la motorul cu aprindere prin comprimare pe baza unui model bi-zonal de neomogenitate termică. Bul. Inst. polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", București, 3, 1972.
3. *Lyn, W. T.* — Journ. Inst. of Petroleum, 43 (1957), nr. 398, febr., p. 25—47
4. *Austin, A. E. W., Lyn, W. T.* — Proc. Instn. Mech. Engers (AD) 1960—61 nr. 1.
5. *Apostolescu, N., Grünwald, B.*, Intern. Comb. eng. conf. Bucharest, 1967, Paper 1—29.
6. *Grünwald, B., Apostolescu N.*, — Bul. Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu Dej". București, 3, 1969.
7. *Eyzat, P., Guibet, I. C.* — Ing. de l'Automobile, 1968, nr. 2
8. *Kriger, R. B., Borman, G. L.* — ASME Publication 66 — WA/DGP — 4, 1966.
9. *Sviridov, B. Iu.* — Teoria, Konstr., rasciot i ispît. d.v.s., Izd. Akad. Nauk. SSSR, Moscova, 1957.
10. *Lavoie, G. A., Heywood, J. B., Keck J. C.*, — Combustion Sc and Techn. 1970, vol.1.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

TEHNOLOGIA CONSTRUCŢIILOR DE MAŞINI

C. Z.: 621.9

CALCULUL PIERDERILOR ¡VOLUMICE PRIN FANTE INTER-OVALE SUBŢIRI CU OVALITATE MICA LA CURGEREA IN DIRECŢIE TANGENŢIALĂ *)

ION GHEGHEA]

Fantele inter-ovale subţiri cu ovalitate mică se întîlnesc frecvent în instalaţiile hidraulice, datorită abaterilor de formă rezultate la prelucrarea pe maşini unelte a suprafeţelor ce compun fanta. Asemenea fante pot fi formate din piese în mişcare de rotaţie (distribuitoare rotative, pompe cu roţi dinţate etc.) sau din piese fixe.

Randamentul instalaţiei hidraulice depinde de pierderile de lichid prin etanşări şi de aceea este necesar să se cunoască influenţa diferiţilor parametrii ai fantei la aceste pierderi. Datorită greutăţilor matematice întîlnite la rezolvarea acestei probleme şi mai ales volumul mare de calcule necesar, în literatura de specialitate această problemă nu este tratată.

Lucrarea are ca scop să prezinte deducerea relaţiilor de calcul pentru pierderile volumice prin fante inter-ovale subţiri cu ovalitate mică la curgerea în direcţie tangenţială şi variaţia acestora în funcţie de diferiţii parametrii ai fantei.

Relaţiile de calcul se obţin considerînd curgerea lichidului laminară şi viscozitatea acestuia constantă.

În acest scop se consideră fanta între doi cilindri cu baza ovală aşezaţi excentric unul faţă de celălalt. Lichidul la presiunea p_1 intră în fantă în secţiunea A şi iese prin secţiunea B unde presiunea este p (fig. 1).

Se va determina debitul de lichid ce trece prin secţiunea B la o cădere de presiune constantă Δp între punctul A şi B.

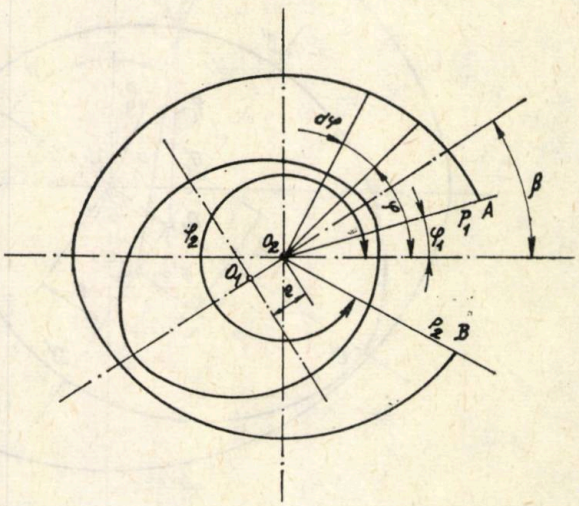


Fig. 1 — Fantă formată de suprafeţe ovale

* Manuscris predat redacţiei la data de 19 oct. 1971.

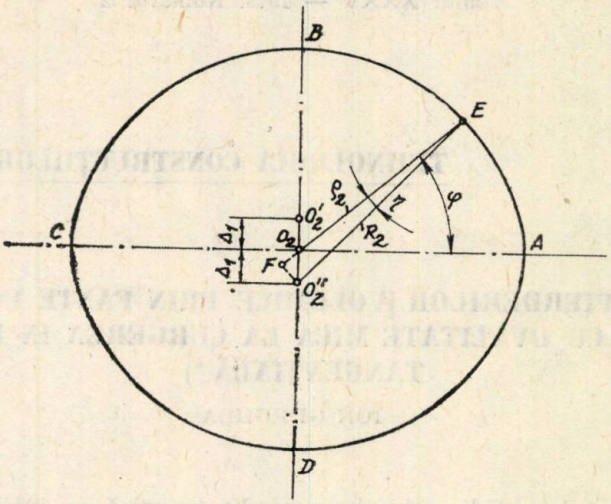


Fig. 2 — Secţiunea transversală a cilindrului exterior

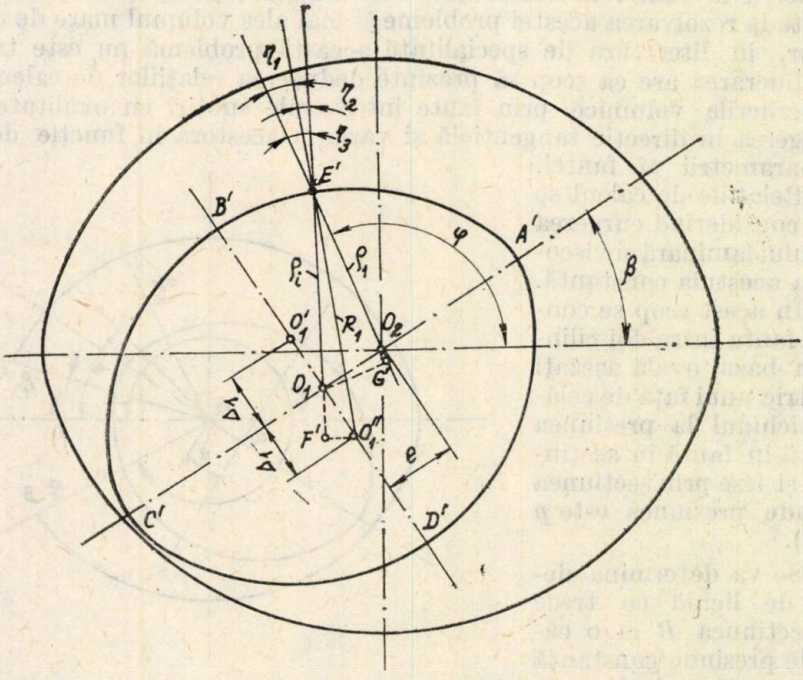


Fig. 3 — Determinarea dimensiunilor secţiunii transversale pentru cilindrul interior

Fiecare cilindru se consideră format din două arce de cerc cu centrele în punctele O_2' și O_2'' pentru cilindrul exterior (fig. 2) și respectiv O_1' și O_1'' pentru cel interior (fig. 3).

Din triunghiurile $O_2''EF$ și $O_2''O_2F$ (fig. 2) avînd în vedere că Δ_2/R_2 este de ordinul 10^{-2}, deci $\eta \approx 0$, rezultă

$$\rho_2 = R_2 + (-1)^i \Delta_2 \sin \varphi \tag{1}$$

unde: $i = 1$ pentru arcul ABC și
$i = 2$ pentru arcul ADC

Din triunghiurile $O_1''E'F'$, $O_1''O_1F'$, $O_1E'O_2$ și O_1O_2G' (fig. 3) considerînd $\eta_1 \approx \eta_2 \approx \eta_3 \approx 0$ se obține

$$\rho_1 = R_1 + (-1)^j \Delta_1 \sin(\varphi - \beta) - e \cos(\varphi - \beta) \tag{2}$$

unde: $j = 1$ pentru arcul $A'B'C'$;
$j = 2$ pentru arcul $A'D'C'$

Din (1) și (2) înlocuind $\Delta_1 = n\delta_0$, $\Delta_2 = r\delta_0$ și $e = m\delta_0$ rezultă grosimea fantei

$$\delta_{ij} = \delta_0 (1 + a_{ij} \sin\varphi + b_j \cos\varphi) \tag{3}$$

unde:

$$a_{ij} = (-1)^i r - (-1)^j n \cos\beta - m \sin\beta \tag{4}$$

$$b_j = (-1)^j n \sin\beta - m \cos\beta$$

Datorită faptului că i și j pot avea valorile atît 1 cît și 2, se formează patru porțiuni ale fantei în care δ_{ij} au diferite legi de variație (fig. 4).

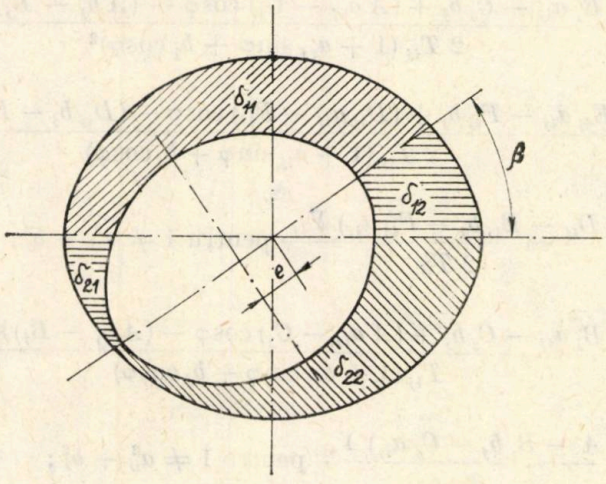


Fig. 4 — Cele patru porțiuni alefantei

Deoarece debitul de lichid are aceiași valoare în orice secțiune a fantei rezultă că presiunea în interiorul fantei variază după o altă lege decît cea liniară. Pentru a găsi această lege se consideră că sectorul de fantă cu unghiul la centru $d\varphi$, în care există pierderea de presiune dp, este

o porțiune infinit mică dintr-o fantă circulară. Debitul ce trece prin acest sector este [1]

$$Q = \frac{dp\,\delta_{ij}^3\,l}{12\eta\rho_1 d\varphi} \pm \frac{V_1 + V_2}{2}\,l\,\delta_{ij}$$

de unde

$$dp = \frac{12\,\eta\,Q}{l}\,\frac{\rho_1}{\delta_{ij}^3}\,d\varphi \mp 6\eta\,(V_1 + V_2)\,\frac{\rho_1}{\delta_{ij}^2}\,d\varphi \tag{5}$$

unde : l este înălțimea fantei ;

η — viscozitatea dinamică a lichidului ;

V_1, V_2 — vitezele tangențiale ale celor doi cilindri care formează fanta.

Înlocuind în (5) ρ_1 din (2) și δ_{ij} din (3) și efectuînd integralele [2] se obține

$$p = \frac{12\,\eta\,Q}{l\,\delta_0^2}\,F(\varphi) \mp 6\,\eta\,\frac{V_1 + V_2}{\delta_0}\,f(\varphi) + c \tag{6}$$

unde : c este o constantă ;

$$F(\varphi) = \frac{B_j\,a_{ij} - C_j\,b_j + (A\,a_{ij} - C_j)\cos\varphi - (A\,b_j - B_j)\sin\varphi}{2\,T_{ij}\,(1 + a_{ij}\sin\varphi + b_j\cos\varphi)^2} +$$

$$+ \frac{E_{ij}\,a_{ij} - F_{ij}\,b_j + (D_{ij}\,a_{ij} - F_{ij})\cos\varphi - (D_{ij}\,b_j - F_{ij})\sin\varphi}{2\,T_{ij}\,(1 + a_{ij}\sin\varphi + b_j\cos\varphi)} +$$

$$+ \frac{(D_{ij} - E_{ij}\,b_j - F_{ij}\,a_{ij})\,Y_{ij}}{2\,T_{ij}^2} \text{ pentru } 1 \neq a_{ij}^2 + b_j^2 ;$$

$$f(\varphi) = \frac{B_j\,a_{ij} - C_j\,b_j + (A\,a_{ij} - C_j)\cos\varphi - (A\,b_j - B_j)\sin\varphi}{T_{ij}\,(1 + a_{ij}\sin\varphi + b_j\cos\varphi)} +$$

$$+ \frac{(A - B_j\,b_j - C_j\,a_{ij})\,Y_{ij}}{T_{ij}} \text{ pentru } 1 \neq a_{ij}^2 + b_j^2 ;$$

$$A = \frac{R_1}{\delta_0} ;$$

$$B_j = m\cos\beta - (-1)^j\,n\sin\beta ;$$

$$C_j = (-1)^j n \cos\beta + m \sin\beta ;$$

$$D_{ij} = 2 (A - B_j b_j - C_j a_{ij}) ;$$

$$E_{ij} = B_j - A b_j ;$$

$$F_{ij} = A a_{ij} - C_j ;$$

$$T_{ij} = 1 - a_{ij}^2 - b_j^2 ;$$

$$Y_{ij} = \frac{2}{T_{ij}^{1/2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(1 - b_j) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + a_{ij}}{T_{ij}^{1/2}} \text{ pentru } 1 > a_{ij}^2 + b_j^2 ;$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{T_{ij}^{1/2}} \ln \frac{(1 - b_j) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + a_{ij} - (-T_{ij})^{1/2}}{(1 - b_j) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + a_{ij} + (-T_{ij})^{1/2}} \text{ pentru } 1 < a_{ij}^2 + b_j^2 ;$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{a_{ij}} \ln \left((1 + a_{ij} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \text{pentru } b_j = 1$$

Punînd condiţia ca în fanta cu unghiul la centru $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ să existe o cădere pe presiune $\Delta p = p_2 - p_1$ din (6) se găseşte

$$\Delta p = \frac{12 \eta Q}{l \delta_0^2} F_1 (\varphi_2, \varphi_1) \mp 6\eta \frac{V_1 + V_2}{\delta_0} f_1 (\varphi_2, \varphi_1) \tag{7}$$

unde :

$$F_1 (\varphi_2, \varphi_1) = F (\varphi_2) - F (\varphi_1) ; \tag{8}$$

$$f_1 (\varphi_2, \varphi_1) = f (\varphi_2) - f (\varphi_1)$$

Din (7) se obţine relaţia ce dă debitul

$$Q = \frac{\Delta p \, l \, \delta_0^2}{12 \eta} \psi (\varphi_2, \varphi_1) \pm \frac{V_1 + V_2}{2} l \, \delta_0 \Phi (\varphi_2, \varphi_1) \tag{9}$$

unde :

$$\psi (\varphi_2, \varphi_1) = \frac{1}{F_1 (\varphi_2, \varphi_1)} ; \tag{10}$$

$$\Phi (\varphi_2, \varphi_1) = \frac{f (\varphi_2, \varphi_1)}{F_1 (\varphi_2, \varphi_1)}$$

Din relațiile (7) și (9) se observă că atît pierderea de presiune cît și debitul depind într-un mod foarte complex de parametrii fantei. Caracteristic pentru pierderea de presiune sînt funcțiile F_1 și f_1 date de (8) iar pentru debit funcțiile ψ și Φ date de relațiile (10).

Deoarece funcțiile ψ și Φ sînt foarte complicate, pentru aflarea valorilor lor funcție de diferiții parametrii ai fantei s-a utilizat calculatorului electronic.

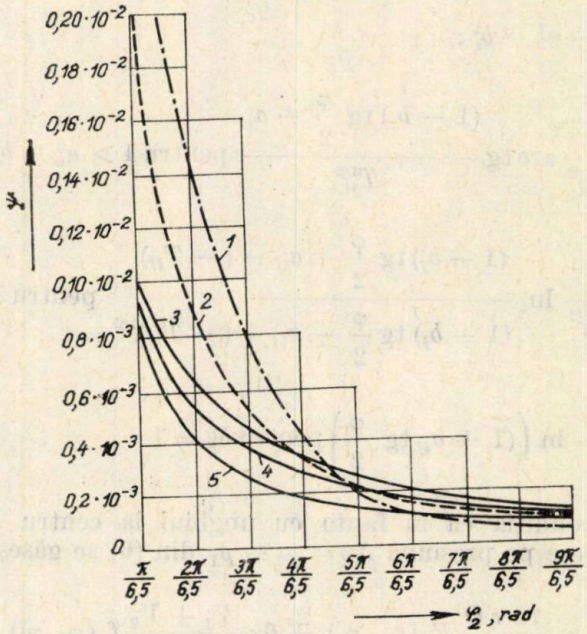


Fig. 5 — Dependența funcției ψ de φ_2 pentru $\varphi_1 = 0$ și $\beta = 0$

1 — $m = 0{,}5$; $n = 0{,}25$; $r = 0{,}25$;
2 — $m = 0{,}25$; $n = 0{,}25$; $r = 0{,}25$;
3 — $m = 0$; $n = 0{,}25$; $r = 0$;
4 — $m = 0$; $n = 0$; $r = 0$;
5 — $m = 0$; $n = 0$; $r = 0{,}25$.

Cu aceste valori s-au trasat grafice pentru a ilustra dependența pierderilor volumice de parametrii fantei.

În fig. 5 se dă variația funcției ψ de unghiul φ_2 pentru $\varphi_1 = 0$ și $\beta = 0$.

Din grafic rezultă că prin mărirea unghiului φ_2 funcția ψ scade ajungînd ca la $\varphi_2 = \dfrac{9\pi}{6{,}5}$ valoarea acesteia să nu depindă practic de m, n și r.

Pentru fante avînd φ_2 mic o importanță mare o are excentricitatea. Cu cît excentricitatea este mai mare cu atît ψ crește.

Ovalitatea suprafeței interioare a fantei duce la mărirea valorii funcției ψ (curba 3) față de cazul cînd aceiași suprafață este circulară

(curba 4) iar ovalitatea suprafeței exterioare, la micșorarea funcției ψ (curba 5).

Variației funcției Φ cu unghiul φ_2 pentru $\varphi_1 = 0$ se vede din fig. 6

Pentru $n = r$ (curbele 1 și 2) dependența lui Φ de φ_2 este identică cu cea de la fantele circulare [1]. Cînd numai una din suprafețe este ovală iar cealaltă circulară și $m = 0$, funcția Φ este mai mică (curba 3) decît valoarea acesteia la fante cilindrice concentrice.

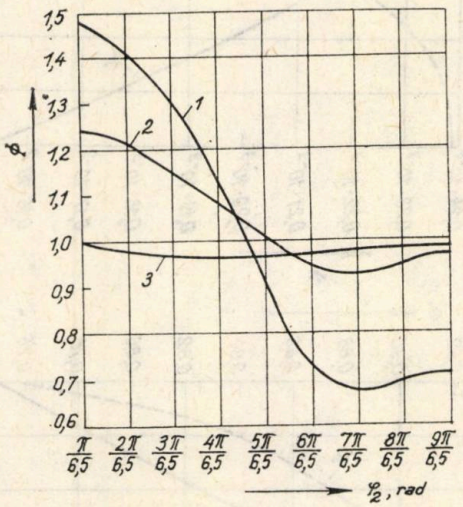


Fig. 6 — Variația funcției Φ unghiul φ_2 pentru $\varphi_1 = 0$

1 — $m = 0{,}5$; $n = 0{,}25$; $r = 0{,}25$
2 — $m = 0{,}25$; $n = 0{,}25$; $r = 0{,}25$
3 — $m = 0$; $n = 0{,}25$; $r = 0$.

Dependența funcției ψ și Φ de m, n, și r pentru $\beta = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{6\pi}{6{,}5}$ este dată în figurile 7, 8 și 9.

Din curbele trasate în fig. 7 și fig. 8 se observă că funcțiile ψ și φ scad odată cu mărirea lui m și respectiv r. Pentru $m = 0{,}25$ și $n = 0$ prin creșterea lui r de la 0 la 0,5 funcția ψ scade de peste 3 ori.

La mărirea ovalității cilindrului interior, din fig. 9 se vede că funcția ψ crește pe cînd funcția Φ scade. Creșterea lui ψ este mai mare decît scăderea lui Φ la aceiași valoare a lui n.

Toate graficele prezentate sînt alcătuite considerînd $\beta = 0$. Pentru $0 < \beta < \pi$, m avînd valori pozitive, $\varphi_2 < \pi$ iar $\varphi_1 = 0$ funcțiile ψ și Φ sînt mai mari la aceleași valori ale lui n și r decît în cazul $\beta = 0$. În acest caz rezultă că *pierderile* volumice vor fi mai mari.

Pentru a se obține pierderi volumice minime este necesar ca fanta formată să aibă unghiul la centru cît mai mare, iar în acest unghi să fie cuprins punctul în care fanta are grosimea minimă.

În cazul cînd suprafața interioară este în mișcare de rotație și $m \neq 0$ $n > 0$, $r > 0$, la o rotație, pierderile volumice oscilează între un maxim și un minim.

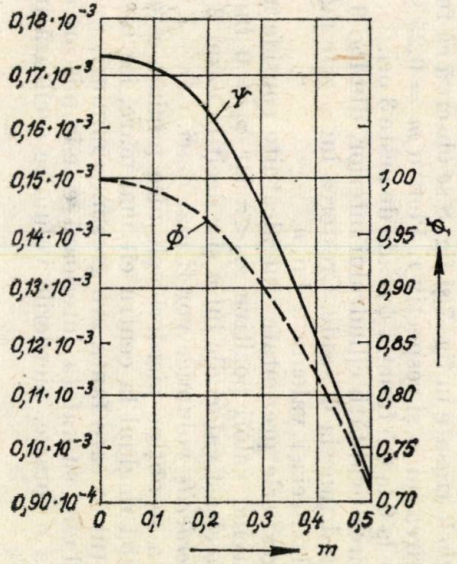


Fig. 7 — Variația funcțiilor ψ și Φ cu m pentru $n = r = 0{,}25$

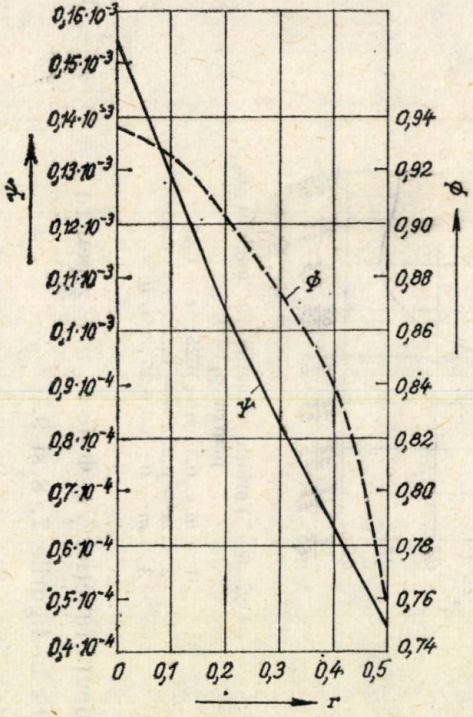


Fig. 8 — Variația funcțiilor ψ și Φ cu r pentru $m = 0{,}25$, $n = 0$

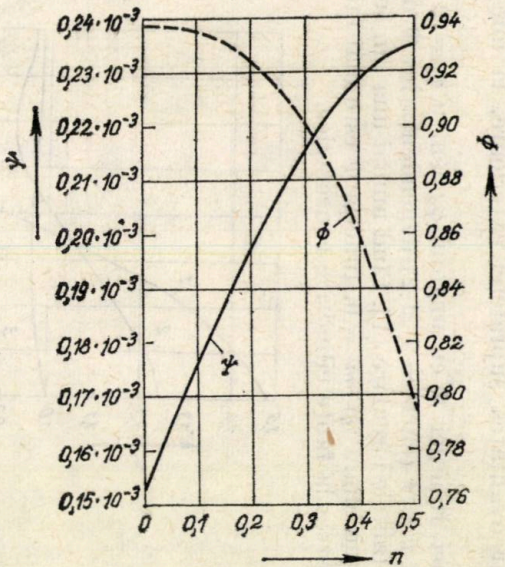


Fig. 9 — Variația funcțiilor ψ și Φ cu n pentru $m = 0{,}25$ $r = 0$

Concluzii

În lucrare se prezintă relaţiile de calcul pentru pierderile volumice în fantele cilindrice cu ovalitate mică.

Se dau de asemenea grafice de variaţie a funcţiilor ψ şi Φ, care caracterizează pierderile volumice, cu mărirea excentricităţii şi a ovalităţilor suprafeţelor. Se constată că ovalitatea suprafeţei exterioare duce la micşorarea pierderilor volumice pe cînd ovalitatea suprafeţei interioare măreşte valoarea acestor pierderi, la aceleaşi valori ale lui δ_0 şi R_1. Prin aşezarea excentrică a celor două suprafeţe se poate micşora valoarea pierderilor volumice dacă în unghiul $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (fig. 1) se găseşte grosimea minimă a fantei.

Prin urmare la realizarea fantelor cilindrice cea mai mare atenţie trebuie acordată la obţinerea suprafeţei interioare cu o ovalitate cît mai mică, deoarece în caz contrar se măresc pierderile de lichid. În schimb ovalitatea suprafeţei exterioare a fantei, în limitele impuse de rotirea relativă a celor două suprafeţe, duce la obţinerea unei mai bune etanşări.

Catedra de maşini unelte şi scule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *I. Gheghea*: Calculul pierderilor volumice prin fante cilindrice subţiri. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, nr. 3/1969
2. *I. S. Gradstein, I. M. Rîjic*: Tablitî integralov sum, readov i proizvedenii — Gosudarstvennoe izdatelistvo fizico-matematicescoi literaturî, Moscova, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

AUTOMATICĂ

C. Z.: 621—52

MODEL ELECTRIC PENTRU STUDIUL UNOR PROBLEME DE TRACȚIUNE ELECTRICĂ*

ADRIAN PETRESCU

1. Introducere

Modernizarea transporturilor feroviare, prin extinderea tracțiunii electrice, implică elaborarea unor metodologii corespunzătoare de studiu și proiectare a liniilor electrice și a amplasării stațiilor de alimentare pe întregul parcurs al căilor electrificate.

Considerentele care stau la baza proiectării acestor sisteme sînt legate de profilul căii ferate, de parametrii locomotivelor electrice, de încărcarea trenurilor, de natura graficelor de circulație, etc.

Soluționarea problemelor care apar în proiectare și exploatare, în acest domeniu, se poate efectua, fie cu ajutorul metodelor grafo-analitice, fie folosind metode numerice, apelîndu-se la calculatoarele electronice, fie utilizînd metodele de modelare electrică.

Atît în țara noastră cît și în străinătate, modelararea electrică a jucat și joacă un rol important în studiul și proiectarea sistemelor de tracțiune electrică feroviară [1, 2, 3], datorită unor avantaje ca : simplitatea și prețul de cost relativ scăzut al modelului, intuitivitatea și ușurința de interpretare a rezultatelor precizia satisfăcătoare și ușurința de interpretare a rezultatelor precizia, satisfăcătoare, posibilitatea de folosire în calitate de operator a unor persoane cu calificare medie, etc.

În cele ce urmează se vor preciza ideile care stau la baza realizării unui model electric simplu și ieftin pentru studiul problemelor de tracțiune electrică.

2. Modelul dual.

În tehnica modelării electrice a diverselor sisteme și cîmpuri fizice, folosirea principiului dualității permite realizarea fizică a modelului sub două forme, alegîndu-se aceea, care este mai avantajoasă sub aspectul constructiv și al exploatării.

Este cunoscut faptul că atît circuitele electrice planare, cît și cele neplanare (prin folosirea unor transformatoare ideale) se bucură de proprietatea de dualitate.

---

* Lucrare comuncată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej „București” 1968

Circuitul electric dual al unui circuit dat reprezintă modelul său matematic. Există o corespondenţă biunivocă între distribuţiile curenţilor şi tensiunilor într-unul din circuite şi distribuţiile tensiunilor şi curenţilor în cel de-al doilea circuit. De asemenea, există o corespondenţă între buclele şi nodurile din cele două circuite, precum şi între elementele de circuit.

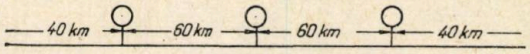


Fig. 1

Pentru un circuit electric dat, circuitul dual se poate construi fie pornind de la ecuaţiile circuitului, fie pe cale grafică pe baza unor reguli cunoscute în Electrotehnică.

Realizarea fizică a modelului dual pentru studiul instalaţiilor de tracţiune electrică prezintă avantajul unei mari simplităţi constructive, a unui preţ de cost redus.

Problemele studiate pe model necesită examinarea unui sector de cale ferată, care cuprinde cel mult 3 staţii de alimentare dispuse la intervale de cel mult 60 km, precum şi sectoarele alăturate pe o distanţă de aproximativ 40 km, fiecare (figura 1). [1]

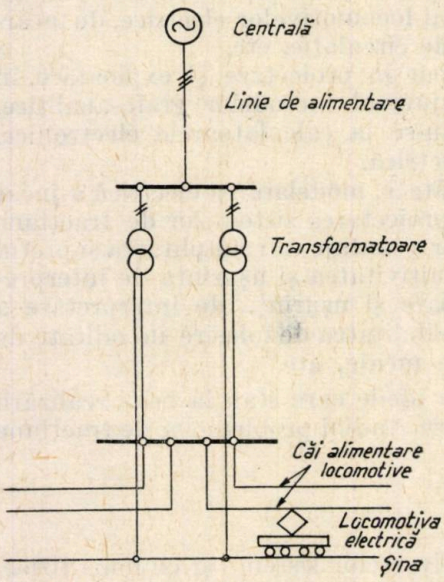


Fig. 2

Schema electrică de principiu a unei staţii de alimentare este dată în figura 2, iar în figura 3 se prezintă schema echivalentă redusă la secundarul transformatorului. În figura 3 elementele R şi L reprezintă rezistenţa şi inductanţa liniei de alimentare, elementele T_T şi L_T reprezintă rezistenţa şi inductanţa transformatorului, iar şinele şi liniile aeriene de contact au fost împărţite în tronsoane avînd scheme echivalente formate din elemente concentrate : r — rezistenţa echivalentă a şinei, r_c şi L_c — rezistenţa şi inductanţa liniei de contact, M — inductanţa mutuală între cele două linii de contact considerate. Locomotiva electrică este înlocuită prin grupul format din rezistenţa R_L în paralel cu inductanţa L_L.

În realizarea modelului* pe baza schemei echivalente din figura 3 tronsonul de cale are o structură complicată conţinînd şi o inductanţă mutuală.

Pentru simplificarea realizării fizice a modelului este de dorit a se elimina, pe cît este posibil, inductanţele proprii şi mutuale, întrucît preci-

* Modelul construit la SNCF (Franţa) se bazează pe schema echivalentă din fig. 3. În lucrarea de faţă se utilizează schema dual ă.

zia de construcție este redusă și valoarea lor nu se poate varia continuu. Pentru eliminarea inductanțelor mutuale din fiecare tronson de cale se poate elabora o nouă schemă echivalentă ai cărei parametri urmează a fi calculați.

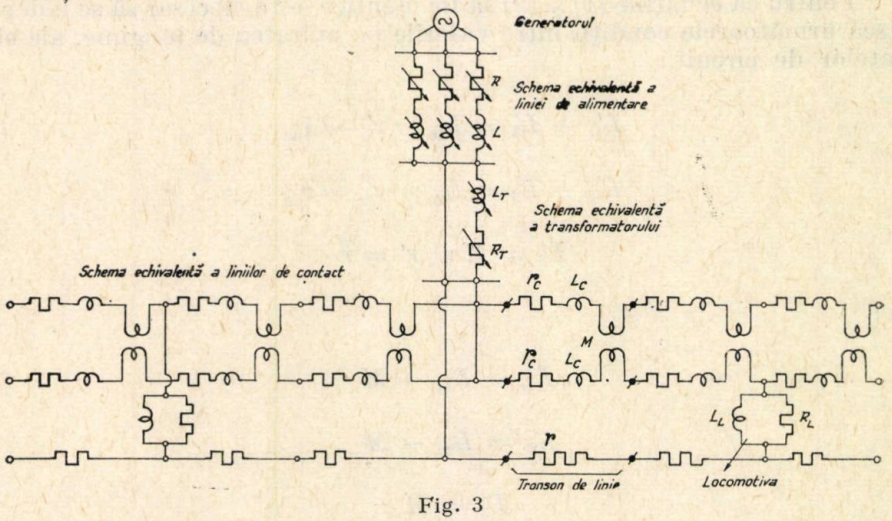


Fig. 3

Pe baza schemei echivalente corespunzătoare unui tronson de linie de contact cu lungimea dx (fig. 4) se pot scrie următoarele ecuații : *

$$L_{1c}\frac{\partial i_1}{\partial t} + (r_{1c} + r)i_1 + M\frac{\partial i_2}{\partial t} + ri_2 = -\frac{\partial U_1}{\partial x} \qquad (1)$$

$$L_{2c}\frac{\partial i_2}{\partial t} + (r_{2c} + r)i_2 + M\frac{\partial i_1}{\partial t} + ri_1 = -\frac{\partial U_2}{\partial x}$$

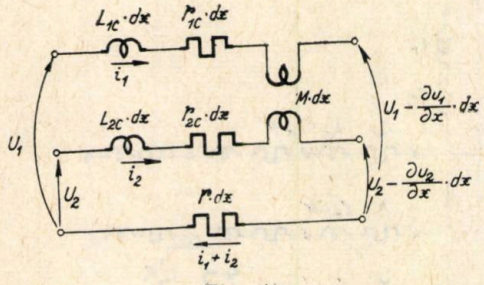


Fig. 4

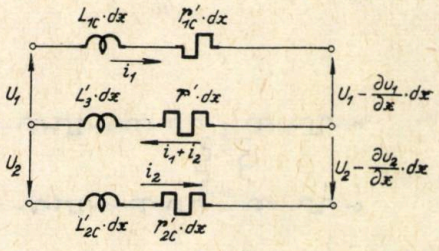


Fig. 5

Schema din figura 5 cu parametrii : $L'_{1s}, L'_{2c}, r'_{1c}, r'$, în care se păstrează (condiție impusă) aceleași valori pentru tensiuni și curenți ca în figura 4 este descrisă de ecuațiile :

$$(L'_{1c} + L'_3)\frac{\partial i_1}{\partial t} + (r'_1 + r')\,i_1 + L'_3\frac{\partial i_2}{\partial t} + r'i_2 = -\frac{\partial U_1}{\partial x} \qquad (2)$$

* Valorile parametrilor electrici sînt date pe unitatea de lungime, în acest mod lungimea tronsonului dx nu mai apare ca factor în termenii ecuațiilor (1) și (2)

$$(L'_{2c} + L'_3)\frac{\partial i_2}{\partial t} + (r'_{2c} + r')i_2 + L'_3\frac{\partial i_1}{\partial t} + r'i_1 = -\frac{\partial U_2}{\partial x}$$

Pentru ca ecuaţiile (1) şi (2) să fie identice este necesar să se îndeplinească următoarele condiţii între valorile pe unitatea de lungime, ale elementelor de circuit :

$$L'_{1c} + L'_3 = L_{1c}\,; \quad r'_{1c} = r_{1c} \tag{3}$$

$$L'_{2c} + L'_3 = L_{2c}\,; \quad r'_{2c} = r_{2c}$$

$$L'_3 = M\,; \quad r' = r$$

sau :

$$L'_{1c} = L_{1c} - M \tag{4}$$

$$L'_{2c} = L_{2c} - M$$

$$L'_3 = M$$

Folosirea în model a schemei echivalente din figura 5 nu va modifica distribuţia iniţială de curenţi şi tensiuni în sistem.

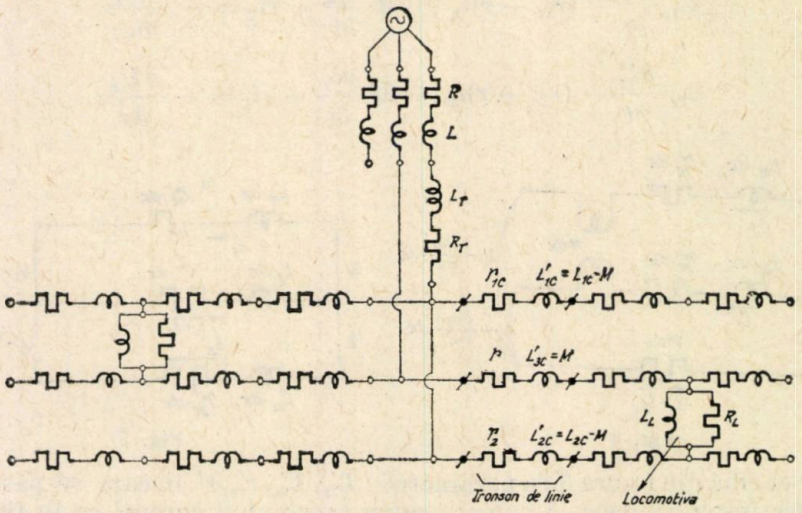


Fig. 6

În aceste condiţii schema echivalentă redusă la secundarul transformatorului (figura 3) se va simplifica ca în figura 6.

Configuraţia modelului dual (figura 8) se poate obţine plecînd de la schema echivalentă a unui sector de cale cu 3 staţii (figura 7) pe baza regulilor de construcţie a circuitelor electrice duale.

În figura 9 sînt schemele detaliate ale elementelor circuitului primar și dual.

3. Stabilirea criteriilor de similitudine și a factorilor de scară.

Acestea se fac pe baza analizei ecuațiilor modelului și obiectului modelat.

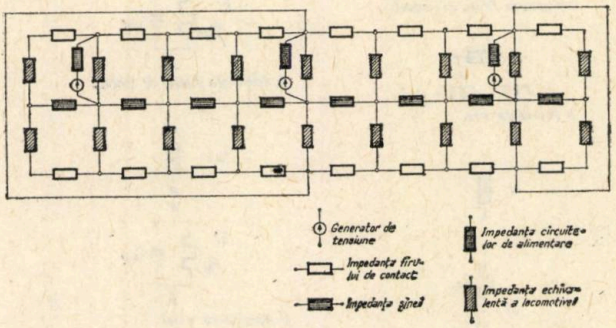


Fig. 7

Fie o buclă* din schema echivalentă primară și nodul corespunzător din schema dual (figura 10 și figura 11).

Pentru bucla din figura 10 se poate scrie ecuația :

$$U(\omega t) = R_A i_1 + L_A \frac{di_1}{dt} + r_{1c} i_1 + L'_{1c} \frac{di_1}{dt} + L_L \frac{di_1}{dt} + r i_1 +$$

$$+ M \frac{di_1}{dt} + L_L \frac{di_2}{dt} - r i_3 - M \frac{di_3}{dt} - R_A i_4 - L_A \frac{di_4}{dt}, \qquad (5)$$

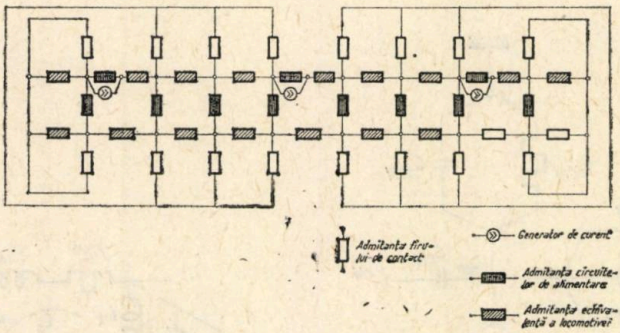


Fig. 8

iar pentru nodul din figura 11 ecuația :

$$I_M(\omega_M t_M) = G_{AM} U_{1M} + C_{AM} \frac{dU_{1M}}{dt_M} + G_{1CM} U_{1M} + C'_{1CM} \frac{dU_{1M}}{dt_M} +$$

* Parametrii R_A și L_A corespund sursei de alimentare cu energie electrice a liniei

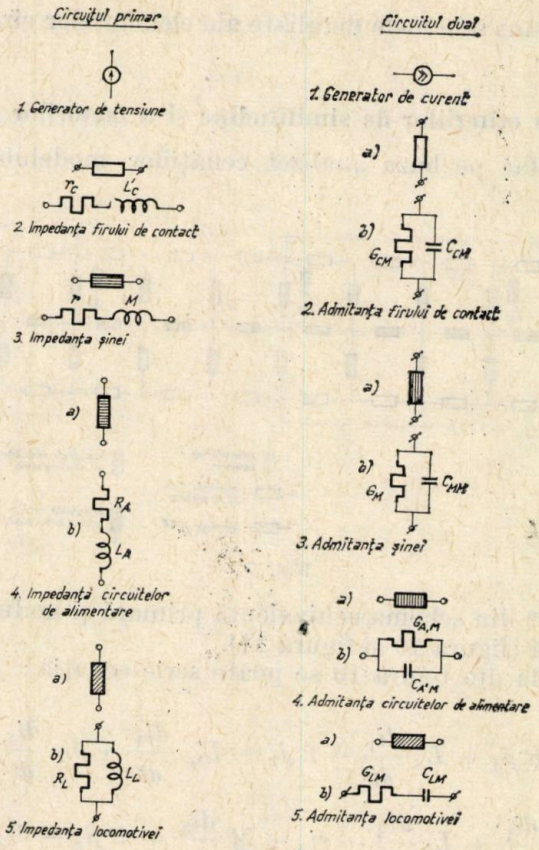


Fig. 9

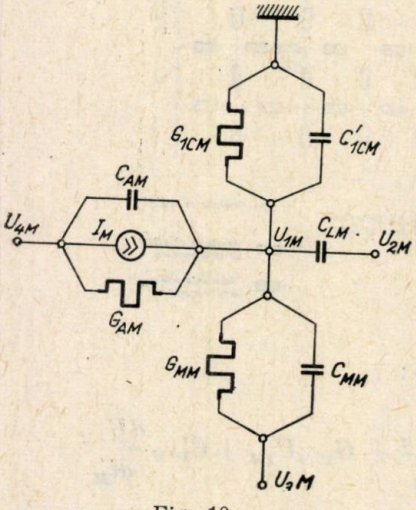


Fig. 10

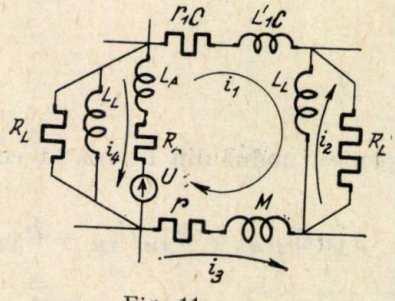


Fig. 11

$$+ C_{1M}\frac{dU_{1M}}{dt_M} + G_{MM}U_{1M} + C_{MM}\frac{dU_{1M}}{dt_M} - C_{1M}\frac{dU_{2M}}{dt_M} -$$

$$- G_{MM}U_3 - C_{MM}\frac{dU_{3M}}{dt_M} - G_{AM}U_{4M} - C_{AM}\frac{dU_4}{dt_M}. \qquad (6)$$

Stabilirea corectă a valorilor parametrilor modelului dual necesită alegerea unor factori de scară care sînt egali cu raportul mărimilor analoge, din obiectul modelat și model. Mărimile ce caracterizează modelul vor purta indicele M.

Factorul de scară pentru tensiuni :

$$N_U = \frac{U}{I_M} \qquad (7)$$

Factorul de scară pentru curenți :

$$N_i = \frac{I}{U_M} \qquad (8)$$

Factorul de scară pentru inductanțe :

$$N_L = \frac{L}{C_M} \qquad (9)$$

Factorul de scară pentru rezistențe :

$$N_R = \frac{R}{G_M} \qquad (10)$$

Factorul de scară pentru timp :

$$N_t = \frac{t}{t_M} \qquad (11)$$

Factorul de scară pentru pulsație :

$$N_\omega = \frac{\omega}{\omega_M} \qquad (12)$$

Folosind relatiile de mai sus, care definesc factorii de scară, mărimile din ecuația modelului (6) se pot exprima în funcție de mărimile primare și factorii de scară. Ecuația astfel obținută trebuie să fie identică cu ecuația (5).

Din condiţia de identitate se obţin criteriile similitudine. Introducînd factorii de scară în ecuaţia (6) se obţine :

$$\frac{1}{N_U} U\left(\frac{\omega t}{N_t N_U}\right) = \frac{1}{N_R N_i} R_A i_1 + \frac{N_t}{N_L N_i} L_A \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{N_R N_i} r_{1c} i_1 +$$

$$+ \frac{N_t}{N_L N_i} L'_{1c} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_t}{N_i N_L} L_L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{N_R N_i} r i_1 + \frac{N_t}{N_L N_i} M \frac{di_1}{dt} -$$

$$- \frac{N_t}{N_L N_i} L_L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{N_Q N_i} r i_3 + \frac{N_t}{N_L N_i} M \frac{di_3}{dt} - \frac{1}{N_L N_i} R_A i_4 -$$

$$- \frac{N_t}{N_L N_i} L_A \frac{di_4}{dt}. \qquad (6')$$

Inmulţind în dreapta şi în stînga cu N_U şi punînd condiţia ca ecuaţia (6') să fie identică cu ecuaţia (5) rezultă următoarele criterii de similitudine :

$$\frac{N_U N_t}{N_L N_i} = 1; \quad \frac{N_U}{N_L N_i} = 1; \quad U_t U_\omega = 1. \qquad (13)$$

Astfel, rezultă din cei 6 factori de scară 3 sînt dependenţi, iar 3 independenţi. Aceştia din urmă vor fi aleşi din considerente de exploatare şi realizare constructivă a modelului.

Factorii de scară independenţi vor fi următorii :

$$N_U, N_i, N_t, \qquad (14)$$

iar cei independenţi vor avea valorile :

$$N_L = \frac{N_U}{N_i} N_t, \qquad (15)$$

$$N_R = \frac{N_U}{N_i}, \qquad (16)$$

$$N_\omega = \frac{1}{N_t}. \qquad (17)$$

4. Valorile elementelor modelului dual.

Valorile elementelor modelului dual şi gamele lor de variaţie se pot stabili pe baza valorilor elementelor din schema echivalentă primară şi a factorilor de scară.

Au fost aleși ca factori de scară independenți : N_U, N_i și N_t stabiliți pe baza următoarelor corespondențe :

Tensiune maximă în sistemul de alimentare raportată la secundarul transformatorului $U_{max}=4OKV$	Curent maxim în model ... $I_{max}=0,1$ A
Curentul maxim în sistemul de alimentare raportat la secundarul transformatorului $I_{max}=2,5$ KA	Tensiunea maximă în model ... $U_{max}=100$ V
Unitatea de timp în sistem=1 sec.	Unitatea de timp în model ... =1 sec.

În consecință factorii de scară vor avea următoarele valori :

$$N_U = \frac{U}{I_M} = \frac{40 \cdot 10^3}{10^{-1}} = 4 \cdot 10^5 \left[\frac{V}{A}\right]$$

$$N_i = \frac{I}{U_M} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{10^2} = 2,5 \cdot 10 \left[\frac{A}{V}\right]$$

$$N_t = \frac{t}{t_M} = \frac{1}{1} = 1$$

$$N_L = \frac{N_U}{N_i} N_t = \frac{4 \cdot 10^5}{2,5 \cdot 10} = 1,6 \cdot 10^4 \left[\frac{V}{A}\right]^2$$

$$N_R = \frac{N_U}{N_i} = \frac{4 \cdot 10^5}{2,5 \cdot 10} = 1,6 \cdot 10^4 \left[\frac{V}{A}\right]^2$$

$$N = \frac{1}{N_t} = \frac{1}{1} = 1$$

Plecînd de la valorile elementelor din schema echivalentă primară și pe baza valorilor numerice ale factorilor de scară stabiliți mai sus, se obțin valorile și gamele de variație ale elementelor modelului cu ajutorul relațiilor (7) . . . .(12).

Efectuarea unor calcule cu valori reale, pentru elementele schemei echivalente reale, a arătat că elementele componente ale modelului dual pot fi realizate fără dificultăți, cu materiale produse în țară [1].

Catedra de calculatoare
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1) x x x — Documentație Institutul de Proiectări Căi Ferate.
2) *A. Petrescu* — Model electric pentru sistemele de tracțiune electrică feroviară. Comunicare la Sesiunea cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, octombrie 1968.
3) *P. Boiangiu, E. Nicolau, C. Niță* — Instrumente, dispozitive și mșini matematice Editura Tehnică, București, 1963.
4) *M. Pelegrin*, — Calculatoare analogice și numerice, aplicații în automatizări. Editura Tehnică, București, 1966
5) *A. Petrescu* — Calculatoare automate și programare București 1970.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 2

MANAGEMENT

C. Z.: 621.33

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF THE OPERATIONAL DUTY OPTIMIZING OF THE ELECTRIC TRACTION*

AL. POPA, A CARABULEA

1. The problem

The development of the railways electrification on a world wide scale as well as in our country implies the study of the solutions even in the electric traction research and design phase, so that the optimum practical variant should be applied and total research, design, construction and operating expenses should be minimum in the context of the restrictions imposed by the railroad operation and the achievement of the proposed goals.

The present paper tries to present the mathematic determinist and probabilist models, according to the structural and forecasting variants, taking account of the whole range of expenses during the design — construction—mounting and working cycle of the electric traction. On these models basis it may be computed the expenses proper as well as the necessary capital costs in the various steps of railways electrification, taking into account all the aspects which may be included in the technico-economical studies justifing the electrification.

At the same time the paper presents and considers the complex structure of the computation logical diagram thus enabling to study the expenses, the application of the operational and cybernetic research in the study of the extremum of a function, taking into account the rectriction imposed.

The algorithm conceived and texted on a calculus example, basis starts from a series of inedited premises concerning all the expenses fot the railway electrification consideration and provides the design and operating practice by new means of investigation in the field of the technico-economic optimization at the level of scientific research and the achieving of the new goals by mathematic simulation and digital computers utilization.

* Manuscript received 17 Iulie 1971.

1. Determinist and probabilist mathematic models.

The determinist and probabilist models which cover accurately the real phenomena of the railway electrification may be represented as;

$$1)\ Z_t^{d(pr)} = Z_{cp}^{d(pr)} + Z_{cm}^{d(pr)} + Z_{exp}^{p(pr)} = (C_t^{d(pr)} + C_{ech}) + p_n(I_t^{d(pr)} + I_{ech}) = \text{minim}$$

Taking into account the lagging in time of the expenses (C_t) and capital costs (I_t) the ratio (1) may be written under the form:

$$2)\ Z_t^{d(pr)} = \left[\frac{\sum_1^{tc} C_i(1+p_n)^{tc} - 1}{p_n(1+p_n)^{tc}}\right] + p_n\left[\sum_1^{tc} I_i(1+p_n)^{+(t_c-i)} + I_{ech} - V_n\right] =$$

$$= \text{minim}$$

In the ratios (1) and (2) the following magnitudes are used:

- $Z_t^{d(pr)}$ = determinist(d) and probabilist (pr) calculus expenses.
- $Z_{cp}^{d(pr)}$ = research (c) and design expenses (p)
- $Z_{cm}^{d(pr)}$ = construction — mounting works expenses (cm)
- $Z_{exp}^{d(pr)}$ = objective operating expenses
- $C_t^{d(pr)}$ = general determinist (d) and probabilist (pr) expenses.
- p_n = economic efficiency coefficient
- $I_t^{d(pr)}$ = capital costs for the electrification execution in the determinist (d) or probabilist (pr) variant.
- t_c = The electrification works of a railway section lagging duration in time.
- C_{ech}: I_{ech} = expenses and capital costs of variant equivalation from the energetic point of view. These are added to the adverse solution for power and energy.
- V_n = net income obtained following the partial commissioning of electrified railway portions before operating the whole electrified portion.
- i = The report year of capital costs and expenses per year.

The restrictions for mathematic model solving (1) and (2) may be written;

$$3)\ P_p^b > P_c^e;\quad E_p^b > E_c^e;\quad I_r \leqslant I_p;\quad C_t^{le} \geqslant E_p^b;\quad t_r^e < t_p^e$$

$$N_{pr}^t \leqslant N_{pp}^t \quad Q_m^1 \leqslant Q_{\max}^t$$

where:

P_p^b = the power taken over at the bars of the traction supplying substantions level.

P_c^e = the power consumed by the electric locomotives in function.

E_p^{bl} = the energy taken over the electrified railway network conditioned by the consumer's working conditions.

E_c^e = the energy consumed by the locomotives on each section which completes the sector of the considered railway.

I_r; I_p = carried out (I_r) and planned (I_p) capital costs for the electrified railway construction.

C_t^{le} = the power required to provide the maximum transport capacity of the electric way to be greater than that taken over (E_p^b) at the supply bars.

t_r^e = the time for works execution not to exceed the term planned (t_p^e) for the works conclusion.

Q_m^t = Travellers and goods traffic should be at a limit equal to that requested by the consumer ($Q_{\max}^t$) taking into account the highest peak of goods and travellers flux on the considered railway section.

N_{pr}^t = the number of the pairs of trains realized to be at limit equal to that of planned pairs (N_{pp}^t) taking account of time maximum capacity of the electric railway.

All these restrictions should include the minimum of the determinist and probabilist expenses and anable the establishment of the premises for the determination of the electrified railway optimum working conditions.

The general determinist and probabilist mathematic models (1) (2) may be reorganized taking into account the operational research concepts and the new aspects intervenning in the design, mounting and wor, king of the electric traction, and can be written;

$$4)\ Z_t^{d(pr)} = [C_c^{d(pr)} + C_p^{d(pr)} + C_{AM+G}^{d(pr)} + C_{SF+R}^{d(pr)} + C_{A+S}^{d(pr)} + C_{\cos\varphi}^{d(pr)} + C_{\inf}^{d(pr)} +$$

$$+ C_{RC}^{d(pr)} + C_{\mathrm{DIV}}^{d(pr)}] + p_n[I_{p_z}^{d(pr)} + I_{\Delta p}^{d(pr)} + I_{\cos\varphi}^{d(pr)} + I_{\inf}^{d(pr)} + I_{rp}^{d(pr)} +$$

$$+ I_M^{d(pr)} + I_D^{d(pr)}] = \text{minim.}$$

The restrictions in solving the determinist and probabilistic models of the form (4) are of the type of those written with the relations (3).

In order to show the expenses and invertments destination we should be carried out some considerations on the structure of each term of the mathematic form (4).

The power expenses refer to the locomotive input power as well as at the power loss in the stations and contact line afferent to the railways and it may be written;

$$5)\ C_c^{d(pr)} = C_E^{d(pr)} + C_{\Delta E}^{d(pr)} + C_{\mathrm{aux}}^{d(pr)} = p_c^e[E_c^{d(pr)} + \Delta E^{d(pr)}] + C_{\mathrm{aux}}^{d(pr)} =$$

$$= [p_c^e t_f (P_c^{d(pr)} + \Delta P_c^{d(pr)}) + C_{\mathrm{aux}}^{d(pr)}],$$

where :

p_c^e = cost of electric power

$C_E^{d(pr)}$ = electric power consumed by the locomotive.

$C_{\Delta E}^{d(pr)}$ = expenses for loss of power in the traction stations and in the contact line.

$C_{\text{aux}}^{d(pr)}$ = expenses for different ancillary materials lubricating oils, vaseline for mechanic contacts, ancillary materials for the research-design — mounting operating phase.

$E_c^{d(pr)}$ = consumed power; $\Delta E^{d(pr)}$ = power loss.

t_f = electric receivers operating period.

$P_c^{d(pr)}$ = electric input power: $\Delta P^{d(pr)}$ = loss of power

The expenses (C_c^d) and ($C_c^{(pr)}$) may be written;

$$6)\quad C_c^d = [p_c^e (E_c^d + \Delta E^d) + C_{\text{aux}}^d]; \quad C_c^{pr} = [p_r^e \cdot C_c^d][\text{lei/year}]$$

where :

p_r^e = probability of the power demand function of the regime imposed by the electrified railway working and the interruption appearing due to the line disangaggement caused by damages conditioned by internal or external factors. It should be observed that in the determination of power costs are considered the research — design — mounting and working of electrified railways.

The staff expenses are determined by a relation of the form :

$$C_p^{(d)} = \left(n_{si} + \sum_{1}^{C_1} C_h x_h \right) h_m \cdot S_m = y_k \cdot h_m \cdot S_m \,(\text{lei/year})$$

$$7)\quad C_p^{(pr)} = V_t^m S_m^m p_r^m + V_t^i S_m^i p_r^i + V_t^t S_m^t p_r^t + V_t^f S_m^f p_e^f + V_t^{\text{pag}} S_m^{\text{pag}} \cdot p_r^{\text{pag}}) \,(\text{lei/year})$$

The probabilistic expenses may be written also in the form;

$$8)\quad C_p^{(pr)} = \left[\sum_{t=1}^{r} \sum_{c=1}^{g} nt_c \cdot xt_c \cdot St_c \cdot pt_c \right] (\text{lei/year})$$

where :

n_{si} = the number of workers who do not depend neither in influence factors (X_h) nor on correlation factors (C_h) for ($h = 1 \ldots . C_1$).

h_m = working condition of each worker

S_m = mean wages : Y_k = total number of workers for tie execution of a work volume (V_t)

p_r = probability of reduction or increase of the staff on different categories such as workers (m) engineers (i), technicians

(t) clerks (f) ancillary force (paj), taking account of the introduction of the automation and the electronic computers in the electric traction control.

n_{tc} = rates of production for different categories of workers ($t = 1 \dots s$) necessary in various working sectors ($c = 1 \dots g$)

x_{tc} = number of workers necessary for the execution of a volume of works during one year.

S_{tc} = wages; p_{tc} = probability of staff increase or reduction function of the work output.

There is a world wide trend, of staff driving the electric trains reduction by a considerable amount, the different driving actions being taken over by the automatic devices. Besides, the train control on a program base by means of some computers placed in the control centres or installed on locomotives is more and more grounded, the man having only the observing control and intervention in case of damages.

The mathematic models (7—8) are solved having in view the research — design — mounting and working phases of the installations subjected to electrification.

In this way is determined the staff necessary for the design and working of the electrified installations.

The amortization of expenses for the equipment used in the research — design and mounting — working steps as well as the general expenses are calculated by relations;

$$C^{(a)}_{AM+G} = [p_{\text{amort}} i_{sp} + P_G] P^a_a = [C^{\text{CFR+PROIECT}}_{AM+G} + C^{\text{MONTAJ}}_{AM+G} + C^{\text{EXPLOATARE}}_{AM+G}] \text{(lei/year)}$$

9)

$$C^{(pr)}_{AM+G} = [C^a_{AM} \beta_f + G^{(a)}_G \cdot p_r] = [p_{\text{amort}} \cdot i_{sp} \cdot P_a p_f + p_G \cdot p_r P_a] \text{(lei/year)}$$

where :

p_{amort} = amortization amount. For the operating phase it can be constant or variable function of the installation operating life.
The variable dimension is recommended to prevent the rapid obsolescence of the equipement used in the railway electrification (electronic computers used for the locomotive control, station electrodynamic control equipement, etc.).

i_{sp} = specific investment in electric installation with which the power passes (P_a)

C_{AM} and C_G — amortization expenses (C_{AM}) and general costs (C_G)

p_f = installation operational probability taking into account the internal and external factors (internal over-voltage) and overtension, etc.). The continuous supply duty is rated on base of succes — fully and notsuccesful coefficients of the electric equipements.

p_r = the probability of meeting the general expenses provided for guarding, taxes, official trips and telecomunications.

p_g = specific coeficient for general cost computation

p_a = power absorbtion in continuous operating conditins of contact lines —

The amortization and general expenses for the design and mountig equipments refer to the period they have been used for electrification. The lines and the stations, the apparatuses for the power factor compensation and the equipement used to provide the protection level of telecomunication circuits closed to the contact electric main should be amortized.

The expenses for a safe operation, wear, equipement repair or replacing are determined by relation of the form :

$$10)\quad C_{SFR}^{(a)} = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} m_{jl}C_{jl} + Sf_{is} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{r=1}^{p} C_{ir}\right] \text{(lei/year)}$$

$$C_{SFR}^{(pr)} = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_{jl}C_{jl}p_{aj} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{r=1}^{p} C_{ir}p_{ir} + \sum_{f=1}^{t} t_f P_{mf} p_c^{en}\right] \text{(lei/year)}$$

where :

m_{jl} = the number of elements in the technologic steps (j) subjected (1) to replacements and to which the costs (c_{jl}) are affiliated;

S = the cost of the planned suspentions; f_{is} — failure factor.

C_{ir} = maintenance expenses ($i = 1 \ldots t$) and repairs ($r = 1 \ldots p$)

p_{aj} = trouble probability of the elements in steps (j).

p_{ar} = trouble shooting in case an accidental wear established by Voltera type equations.

t_f = down-time period of the contact line.

P_{mf} = power at the damage apparition moment.

p_c^{en} = the undelivered electric energy cost taking into account the fact that goods are not transpored during the electric contact line disconnection which causes disturbances in the economic circuit and having view the losses appearing in buyer's electric installation due to the equipement famage in the operating diagrams.

The safety in operation or the reliability may be studies on base of the mathematic models of the type Markov. These models make possible the determination of such factors as : the equipement life, the number of equipements still in function in case of an aleatory wear of the damage, progress, consuming probability on Stielyes integral base, the damage duration and operating life of the equipements, the probabilities of the succes and failure conditions, the medium number of function failings of the installations and the functioning medium time on the Weibull processes base of the Euler integral of the second species. If during

a period of time the power supply system remains in the state (i) and brings a profit (v) which conditions a certain profitableeness the income (v) increase can be determined through the Howards algorithm suited for programming on a digital computer.

The mathematic forming of expenses for waiting and storage must be extended upon the installation execution and working stages because it strats from the idea that in the phase research and design stage the general design is already materialized, and the unproductive times are practically negligiabile.

The calculus relations of the determinist and probabilist expenses for waiting may be written;

$$C_A^{(d)} = (C_A^m + C_A^{cL})^{(d)} = \sum_{i=1}^{p} [\lambda_i t_{fi} C_i' + (s_i - \lambda_i/\mu_i) C_i''] t_i \text{ (lei/year)}$$

11)

$$C_A^{(pr)} = (C_A^m + C_A^{en})^{(pr)} = \left[\sum_{n=s+1}^{m} \sum_{i=1}^{p} (n_i - s_i) \cdot p\ (C_i)\ k_i' + \sum_{n=1}^{s_i} \sum_{i=1}^{p} (s_i - n_i) p\,(C_i)\ k_i'' \right]$$

where :

C_A^m ; C_A^{ex} = expenses for waiting during mounting stage (C_A^m) and respectively worting stage (C_A^{ex}) of the installations.

λ_i ; μ_i = arrival rate of the mounting equipements (λ_i) respectively of the goods in the transport stations and the servicing rate (μ_i) in mounting and working.

t_{fi} = waiting time of the units during mounting and working stages of the installations.

c_i' ; c_i'' = wating specific expenses at producer (C_i') and consumer (C_i'').

s_i = number of tetations which serve during the mounting and respectively the working stage of the electrified railways.

t_i = period on which the calculus is effected.

n_i = number of units in the waiting line during the mounting line and working stage is $[ni = (s + 1) \ldots m]$ because it is considered that the units which are in the machining stage at the (c) stations are waiting too.

$p\ (Ci)$ = the probability of demand apparition in the mounting and working stage ($i = 1 \ldots p$).

k_i' ; k_i'' = costs for waiting at the producer (K_i') and at the consumer respectively (K_i'').

The determinist and probabilist expenses for the equipement stocking during installation mounting stage and caused by the goods storage in the electrified railway working stage involve the determi-

nation of the equipement optimum batches purchase and respectively the strict observation of the stock forming conditions in operation.

At the same time are determined the surfaces necessary to the storage, so as the field provided for the warehouses should be as small as possible thus preventing the loss of agricultural circuit surfaces.

A relatively new method to determine the storage surfaces intended for equipement and packages transport consists of the statistic — mathematic methods use. This leads the determination of surfaces three time smaller for the same volume of equipements than with the methods used until now in the design activity.

The mathematic models for the storage expenses may be written.

$$C_s^{(a)} = [C_s^m + C_s^{ex}]^{(d)} = \sum_{i=1}^{p} [A_i P_i + C_i^{ad} t_i] \text{ (lei/an)}$$

$$12)\quad C_s^{(pr)} = [C_s^m + C_s^{exp}]^{(pr)} = \left[\sum_{i=1}^{p} t_i C_i^{(s)} + \sum_{v_i=1}^{s_i} (s_i - 0{,}5\, v_i)\, p\,(v_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{p} C_i^{(s)} s_i t_i \sum_{v_i = s_i} \frac{p(v_i)}{v_i} + \sum_{i=}^{p} \sum_{v_i > s_i} \frac{(v_i - s_i)^2}{2 v_i} \cdot p(v_i) \cdot t_i, C_i^{(r)} \right] \text{ (lei/year)}$$

The considerations concerning the materials storage make easier the determination of the risk coefficient in the formation of the excees stocks, and the existing stock breakage in case of supply interruption. This theory basis the optimum reserves can be established so as the stockage expenses should represent a minimum in the restriction area.

The following magnitudes enter in the relations (12).

C_s^m ; C_s^{ex} = expenses for storage in the installation mounting (C_s^m) and operating (C_s^{ex}) stages;

A_i = the unput of equipements of goods respectively and (Pi) is their stockage cost for mounting and operating in the determinist variant.

C_s^{ad} = management expenses during the (t_i) period.

s_i = probabilist stock, v_i = stochastic demand

$p\,(v_i)$ = demand possibility $C_i^{(s)}$ = stockage cost-

$C_i^{(r)}$ = stock breaking cost.

The mathematic models of the compensation costs for the power factor may be written as follows;

$$a)\quad C_{\cos\varphi}^{(d)} = p_c^e \left[\sum_{f=1}^{F} t_f \sum_i \sum_j p_s^{(s)} Q_{cij}^{ic} + \sum_{f=1}^{F} \frac{t_f}{u^2} \sum_i \sum_j R_{ij} Q_{ij}^2 \right] +$$

$$13)\qquad + p_{a+r} \left[i_{sp}^e \sum_i \sum_j Q_{ij}^{ic} + I_{\cos\varphi}^{a} \right];\ \text{(lei/year)}$$

$$b)\quad C_{\cos\varphi}^{(pr)} = \left[p_e^{reg} \cdot C_{\cos\varphi}^{(d)} \right] \text{(lei/year)}$$

where :

$C^{(d)}_{\cos\varphi}$ and $C^{(pr)}_{\cos\varphi}$ = working expenses of power factor compensation installation in determinist and probabilist conditions.

p_r^{reg} = execution probability of the operating conditions producing the losses in the relation (13 a).

p_c^e = power loss cost proce = 0.13 (lei/hwh)

p_s^s = specific coefficient of the active loss caused by the reactive power circulation.

t_f = operation time of the receivers on a certain section ($f = 1 \ldots F$) of the load curve

Q^{ic}_{cij} = reactive power required by the consumer for the running of the different static and dynamic elements of the installation supplied at the voltage (U)

R_{ij} = the active resistence of the elements in the technologic chain providing the electrified railway power supply.

p_{a+r} = specific amortization and repairing factor.

i^c_{sp} = specific investment in the power factor compensation capacitors.

$I^{(d)}_{\cos\varphi}$ = investiment for different installations necessar : for the power factor compensation in determinis conditions.

The expenses regarding the influence of the contact lines on the closed tellecommunication circuits to which are added the expenses for the area occupied by the traction stations and other various expenses are written ;

$$14)\quad C^{d(pr)}_{I+R+D} = [C^{d(pr)}_{\text{inf}} + (p_{\text{rec}} \cdot S)^{d(pr)} + C^{d(pr)}_{D}] \text{ (lei/year)}$$

The expenses for the line influence refer to the operation and maintenance of the protection equipment installation the contact line as well as on the tellecommunication closed circuit for the damping of the electromagnetic induction disturbing the weak current line operation.

The expenses for the surface (S) occupied by the station refer to the crop cost which might be obtained if its cost is equal to (p_{rec}) in (lei/year . m^2).

The underground works are recommended for the substantions constructions if the technico-economical conditions are fulfilled in order to save the agricultural surfaces. The various expenses (C_D) refer to the overheads of the computer used for the optimum variant selection, to the site set up management, to the internal transport erecting companies and to the borrowed equipement for the erection mechanization rent payement.

The investments intervenning in the relation (4) are computed as follows;

15) $I_{pz}^{(d)} = [I_l^c + I_S^E + I_L^E + I_C^{Ed} + I_D]$ (lei)

$$I_{pz}^{(pr)} = \left[\frac{p_a}{p_a + p_b} I_{la}^c + \frac{p_b}{p_a + p_b} I_{lb}^c\right] \text{(lei)}$$

The investments $I_{pz}^{(d)}$ proper are refering to the investments for the fixed installation (I_f) and the investments for the electric locomotives (I_L^E).

The investments for the fixed installations include contact line investment (I_l^c) investments for the traction electric substantions (I_S^E), investments for the electrodynamic centralization (I_C^{Ed}) of the whole complex of installations and investiments for locomotive sheds (I_D).

The probabilistic investiments (I_{pz}^{pr}) refer to the dimensioning conditions of the contact lines, taking into account the probable weather conditions intervenning in design. In the present case the probabilities of apparition of the hoartfrost (p_a) and of the maximum wind (p_b) are considered. In order to obtain a coresponding dimensioning of the electric line poles, as well as of the aerial conduit, it is assumed that both natural conditions act simultaneuosly and for each one it should be considered the investment claimed (I_{ea}^c respectively I_{eb}^c).

The investments regarding the compensation power and energy consumed in the from of losses are calculated as follows;

16)

$$I_{\Delta P+M}^{(d)} = I_{\Delta P} + I_M = (i_{sp}^s + i_{sp}^M t_f)\ \Delta P_{\max} \quad \text{(lei)}$$

$$I_{\Delta P+M}^{(Pr)} = p_r^r\, I_{\Delta P+M}^{(d)} = p_r^r\, [(i_{sp}^s + i_{sp}^M t_f)\ \Delta P_{\max}] \quad \text{(lei)}$$

where :

i_{spi}^s = specific investment for the installation in the energetic supply system of a suplementary power for covering the losses in contact line and stations.

p_r^r = the probability of execution of the continous operating conditions.

i_{sp}^M = the specific investment in the mining extraction sources of the fuel, for supplying the centrals producing the necessary to cover the loss of energy in the contact line and in the railway electric supply stations. These investments enter directly in the competence of those who are designing constructing and operating the electrified railways. The other investments interferring in the general mathematic model structure are calculated by the relation :

$$I_l^{(d)} = (I_{\cos\varphi} + I_{\inf} + I_{rp} + I_{DV}) = (i_{sp}^c Q_c^{tc} + i_{sp}^{\inf}\, \eta_s^{\inf} + i_{sp}^{rp} \eta_{op}^r + I_{DV}) \quad \text{(lei)}$$

(17)

$$I_l^{(pr)} = p_r^{dr}\, I_r^{(d)} = (p_c^r\, i_{sp}^c\, Q + p_r^t\, i_{sp}^i\, \eta_s^t + \sum_{j=1}^{c} p_{rj}^{rp},\ i_{rp}^{rp},\ \eta_{aj}^{rp} + p_r^d\, I_{DV}) \quad \text{(lei)}$$

where :

$I_l^{(d)}$; $I_l^{(pr)}$ = the total determinist and probabilistic investments including investments for the compensation power factor ($I_{\cos\varphi}$), for the contact line influence on the tellecommunication contact (I_{inf}) for the parameter adjusting (I_{pr}) regarding the frequency, voltage, and the consumer's continous supply with energy plus the different investments (I_{DV}) concerning the site arrangements and the equipement for the internal transport inside the site.

p_l^{dr} = the execution probability of different operation conditions.

p_c^r = the execution probability of the planned compensation for the imposed power factor.

p_r^i = the execution probability of the dangerous and disturbing magnitudes induced in the telecommunication circuit by the contact electric line.

p_r^{rp} = the probability of quality energy delivery ($U = ct$) ($f = ct$) at the voltage and frequency established without interrruption.

p_r^d = the probability of execution or decrease of different investments.

i_{sp}^c ; i_{sp}^{rp} ; i_{sp}^i = specific investments for the purchasing of the installation of power factor compensation (i_{sp}^c) producing or consuming the reactive power for the parameter adjustment (i_{sp}^{rp}) by means of a number (n_{rp}^u) of apparatuses for the damping of the dangerous and distrurbing influence (i_{sp}^i) of the contact line on the telecommunication closed circuits by means of some devices (n_a^i).

The mathematic models (4) takes account of the relations (5 —17) and taking into account of the railway specific (under the form of traction investments) may be represented as followed ;

18)

$$Z_l^{d(pr)} = (C_{cpm}^{d(pr)} + C_{tr}^{d(pr)} + C_{sp}^{d(pr)}) + p_n\,(I_{cdm}^{d(pr)} + I_{tr}^{d(pr} + I_{sp}^{d(pr} = \text{minim.}$$

The restrictions are of the type of those given by the relations (3). The following values interfer in the mathematic model (18) ;

$C_{cdm}^{d(pr)}$ = determinist and probabilist expenses for design-mounting research.

$C_{tr}^{d(pr)}$ = determinist and probabilist expenses for railway traction.

$C_{sp}^{d(pr)}$ = special determinist and probabilist expenses including those for, waiting, storage, equipement wear and replacement, staff costs, reliability, general costs and expen-

ses for the variant equivalation regarding energetic aspect and the volume of goods transported on an electrified railway sector.

$I_{epm}^{d(pr)}$ = the determinist and probabilistic investments for research design and installations mounting.

$I_{tr}^{d(pr)}$ = determinist and probabilisit for the railway traction performance.

$I_{sp}^{d(pr)}$ = special determinist and probabilistic investments refer to the covering of power and energy loss in the contact line and in the electric stations on the studied journey, to the power factor compensation, to the adjustment of the parameters providing the quality of the power consumation, to the influence damping, and to different other investments aspects,

If the terms of the relation (18) are reorganized in order to emphasize the performance time of the research design and assembling, and the expenses for traction are putlined and the expenses for the power factor compensation, and the expenses for the line influence are detached, a mathematic model with the following form may be written;

$$Z_t^{d(pr)} = Z_{epm}^{d(pr)} + Z_{tr}^{d(pr)} + Z_{\cos\varphi}^{d(pr)} + Z_{\inf}^{d(pr)} + Z_{DIV}^{d(pr)} = C_t^{d(pr)} + 0{,}1\, I_t^{d(pr)} \text{ minim}$$

19)

where :

$Z_{DIV}^{(dpr)}$ = various total determinist and probabilist expenses. In this case the restrictions do not modify their written form by means of the relations (3).

The model (19) may be written also :

20)

$$Z_t^{d(pr)} = \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{0} t_{ij} p_{ij} \right)^{d(pr)} + C_{tr}^{d(pr)} + C_{inf}^{d(pr)} + C_s^{d(pr)} + 0{,}1\, I_t^{d(pr)} = \text{minim}$$

where :

tij = the time requested for the performance of the installation research — design and mounting cycle;

pij = time unit cost for (i) stages and (j) operations

20 a) $$C_s^{d(pr)} = (C_p^{d(pr)} + C_{SF}^{d(pr)} + C_{A+S}^{d(pr)} + C_{DIV}^{d(pr)}) \qquad \text{(lei/year)}$$

The calculus relations used in the determinist (CPM) and probabilist (PERT) method of the operational research are applied in the determination of the researcrh — design and mounting performance.

At the same time it is carried out the chart of the work time display and it is determined the number of hamiltonian roads between the beginning and the end of the operations intervening in the research — design and mounting of the installations of railway electrification.

On the König diagram basis at least a hamiltonian road may determined in any completed chart.

The optimum hamiltonian road may be realized on two journeys, namely; on the commercial journey when are reached once and only once all the graph railway jonctions, being realized the minimum expenses on the chinese postman road, when they are covered once and only once all the graph lides with minimum expenses. In the first case the Foulkes algorithm and the method of the minimum transition on the line are applied for the determination of the optimum hamiltonian road.

If the traction expenses structure is detailed taking into account the specifications in literature [2] [3] [4] [5] the mathematic model (20) may be written;

$$Z_t^{d(pr)} = \left(\sum_i \sum_j t_{ij} p_{ij} \right)^{d(pr)} + \left(\frac{(I_L . Th_L . S)}{T_c . t_{iL} . V_{oc}} + \frac{G_v . L_{sp}^v . r . s}{T_c . t_{iv} . V_{oc}} + \right. \tag{21}$$

$$\left. + \frac{b . L_m p_c^e}{367 . \eta_T} \right) \frac{Q_k}{G_v} + C_{\cos\varphi}^{d(pr)} + C_{\inf}^{d(pr)} + p_n I_t^{d(pr)} = \text{minm}$$

The quantities interfering in relation (21) refers to :

I_L = investments for locomotive purchasing

T = traction time, namely simple or multiple traction;

h_L = the time when the locomotives are in the repairing shops.

S = space length on railway section in electrification.

T_c = lenght of time = 8760 hours/year.

t_{iL}; t_{iv} = life of locomotives (t_{it}) and rail road cars (t_{iv}).

V_{oc} = commercial speed of trains.

G_v = train medium tonnage

i_{sp} = specific investment for car accomplishment

r = car burdening factor. The rational burdining of cars may be solved by means of Euler function which assumes the variational calculus utilization to establish the minimum marginal cost determination in case of load optimum payment ordering on each car.

b = internal service consumption of electric locomotives.

d_c^e = cost price of energy 0.15 lei/kwh;

η_T = output of transformation in the energetic chain linking the depot with consumer energy.

Q_k = forwarding of goods.

The mechanical work (L_m) is calculated by means of a relation with with the form;

22)

$$L_m = [(G_L R_L + G_V R_V) + (G_L + G_V)(i + 3{,}8 \cdot 10^{-3} V_f^2)] 10^{-3} [t_f - k_m].$$

where:

G_L; G_V = locomotive weight (G_L) and car weight (G_V)
R_L; R_V = specific resistances on locomotive rolling (R_L) and car rolling (R_V).
I = railway line ratio gradient.
V_f = train breaking speed

In order to establish the rational services on the electrified railway, the mathematic model (4) is written taking into account the models (5 — 22) so that an optimum section calculation of the contact line and an optimum current circulation determination on the electrified line where the loss power are minimum, can be obtained.

The general mathematic model structure for the electric optimum service study of the electrified railway is thus represented;

$$Z_t^{d(pr)} = \left[(A_c^{d(pr)} + B_c^{d(pr)} S) l + \frac{C_c^{d(pr)}}{S} \cdot l \right] + p_n \left[(A_i^{d(pr)} + B_i^{d(pr)} S) l + \right.$$

23)

$$\left. + \frac{C_i^{d(xr)}}{S} \cdot l \right] = \text{minim}$$

where:

$A_c^{d(pr)}$ = expenses which do not depend on the section (S) of the contact line, namely; the staff expenses, operating safety, storage and waiting expenses, expenses for the crop on the occupied surface and diverse determinist and probabilistic expenses.

$B_c^{d(pr)}$ = expenses depending on contact line conduit section (S) and refer to: damping expenses and electric line influence expenses close to the telecommunication circuits.

$C_c^{d(pr)}$ = expenses inversely proportional to the section (S) of the contact line conduits, and refer to the expenses for power factor compensation, in view to reduce the active losses caused by the reactive power circulation and to expenses for power losses and active energy.

$A_i^{d(pr)}$ = investments which do not depend of the contact line section (S) and refer to poles, investments for the parameter adjustment and other various investmenst.

$B_i^{d(pr)}$ = investments depending on the contact line section (S) and are refering to conduits, investments for reactive power circulation reduction through the line and to investments for the neighbouring line influence reduction.

$C_i^{d(pr)}$ = investments used in purchasing installations necessary to the power loss covering and in the mine opening in order to get the fuel necessary to produce the power lost in the contact line.

In view to determine the optimum section of the contat line conduits the extreme of the function (23) is looked for, by derivation and equliation with zero. The following expression is obtained;

$$24) \quad \frac{dz_t^{d(pr)}}{dS} = \left[B_c^{d(pr)} \cdot l - \frac{C_c^{d(pr)}}{S^2} \cdot l \right] + p_n \left[B_i^{d(pr)} \cdot l - \frac{C_i^{d(pr)}}{S^2} \cdot l \right] = 0$$

The expression (24) serves to calculate the economic section. It is obtained the expression;

$$25) \quad S_{ec}^{d(pr)} = \sqrt{\frac{(C_c^{d(pr)} + p_n C_i^{d(pr)})}{(B_c^{d(pr)} + p_n B_i^{d(pr)})}} \quad (\text{mm}^2)$$

If we are taking into account the structure of the terms intervenning in the relation (23) the mathematic model of the expenses ($Z_t^{d(pr)}$) may be written under the form:

26)

$$Z_t^{d(pr)} = p_c^e \left[U \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot t_f + t_f \cos\varphi \cdot \frac{\rho l}{S} I_f^2 \right]^{d(pr)} + C_p^{d(pr)} \cdot p_r^p + p_{\text{amor}} I_t^{d(pr)} p_j +$$

$$+ p_G \cdot p_r P_a^{d(pr)} + [C_{SF+R}^{p(pr)} + C_{A+S}^{d(pr)}] + p_c^e \left[t_f \cdot p_s^s \cdot Q_C^{ic} + t_f \frac{RQ^2}{U^2} \right] p_r^{\text{reg}} +$$

$$+ C_{I+RC+D}^{d(pr)} + p_n [I_{pz}^{d(pr)} + (i_{sp}^s + i_{sp}^M \cdot t_f) p_r^r + p_r^c i_{sp}^e Q_c^{ic} + I_{I+rp+E}^{d(pr)}] = \text{minim}$$

Having in view the signification of the values in the relation (25) and their structure included in the model (26) the economic section of the contact line conduits may be written under the from;

27)

$$S_{ec}^{d(pr)} = I_f \cdot \sqrt{\frac{\rho_c [p_c^e t_f p_r^c (1 - \cos^2\varphi) + t_f \cos\varphi \, p_c^e + p_n (i_{sp}^s + i_{sp}^M t_f) p_r^r]}{[(I_{ps}^{d(pr)} p_r^{cd} + p_r^{rc} I_{ic}^{d(pr)}) (p_{\text{amor}}^{cr} + p_n) + C_{\text{inf}}^{o(pr} p_r^i]}} \quad (\text{mm}^2)$$

where:

I_f = the current intensity, taking into account the normal service of the contact line.

ρ = resistivity of the leading material;

t_f = installation working hours; $I_{pr}^{d(pr)c}$ = the determinist or probabilist investment for the conduit dimensioning, p_r^{cd} = the probability of investment execution and reduction $I_{pz}^{d(pr)c}$

p_r^{rc} = the probability of execution or reduction of the investments for the reactive power compensation installation ($I_{ic}^{d(pr)}$).

p_{amor}^{cr} = constant or variqbile damping dimension.

p_r^t = probability of execution or reduction of investments for the contact line influence on the telecommunication nighbouring circuits.

The expression of the current (I_f) in the relation (27) is written having in view the values interferring in the mathematic model (21), the number of train circulating concomitently and the ratious in literature [7] [5] [3] [1] obtaining;

a) when the recuperative breaking is executed.

$$I_f = \sum_1^N \frac{b\,(G_V + G_L)}{367 \cdot U \cdot t \cdot \cos\varphi \cdot \eta_{ec}\eta_s}\left[\int_{SO}^{S} \frac{F_0}{\eta_L} ds - (G_V + G_L)\frac{\eta_s}{\beta}\int_{V_s}^{V_i} V dV + \right. \tag{28}$$

$$\left. + \int_{Si}^{Ss} (r_t - i)\, ds \right]$$

b) when the resistant force of the mechanical work is considered;

$$I_f = \sum_1^N \frac{b\,(G_V + G_L)}{367 \cdot U \cdot t \cdot \cos \cdot \eta_{ec}\eta_s}\left[\int_{Sc}^{S} \frac{r_t d_s}{\eta_e} + \int_{SO}^{S} \frac{I ds}{\eta_e} + \int_{SO}^{S} f_f \frac{ds}{\eta_e} - \frac{\eta_e}{\beta}\int_{V_0}^{V_s} V \cdot dV \right]; \tag{29}$$

In the relations (28) and (29) the values have the following signification; N = the number of electric trains on the alignement on study.

U = supply voltage; t_f = service time

$\cos\varphi$ = power factor : V = breaking speed at the beginning (Vi) and at the end of the recuperation (V_s).

i = profile slope. S = space on the breaking alignement.

η_{ec} = contact line output

η_s = traction substation output

η_L = locomotive output

η_r = recuperation output

r_t = train specific resistance at elevated plane tunining and power.

f_f = specific breaking power

β = acceleration imparted to the train.

Fo = locomotive traction at the motor.

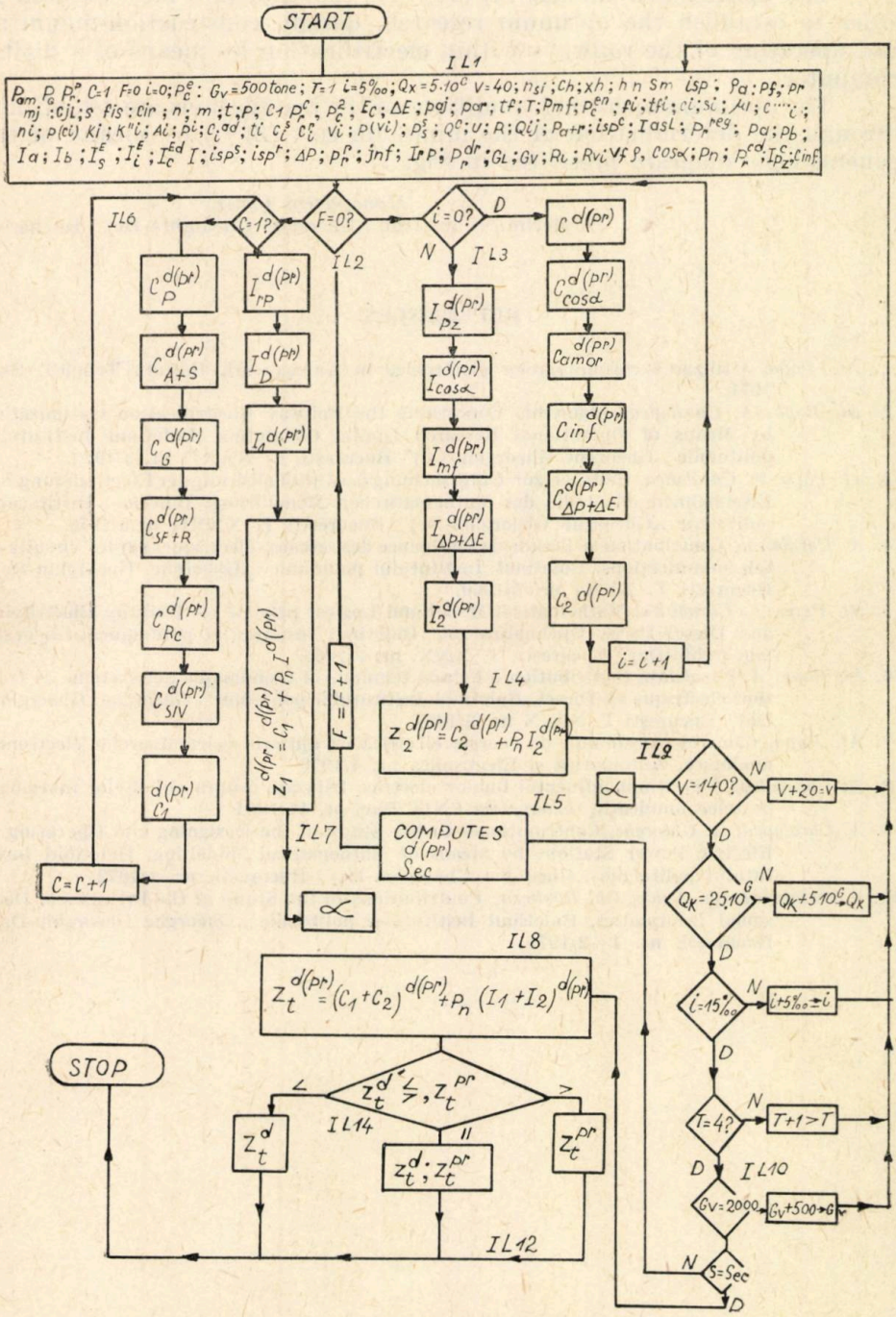

START
IL1
IL2
IL3
IL4
IL5
IL6
IL7
IL8
IL9
IL10
IL12
IL14
C=1?
F=0?
i=0?
D
N
C=C+1
F=F+1
i=i+1
COMPUTES
V=140?
V+20=V
Qk=25,10^6
Qk+5 10^6→Qk
i=15‰
i+5‰→i
T=4?
T+1→T
Gv=2000
Gv+500→Gv
S=Sec
STOP

Fig. 1

The mathematic models (4) (20) (21) (23) and (26) may be used in order to establish the optimum research, design, construction-mounting and operating of the railways within electrification by means of a digital computer.

The optimum operating conditions of the installations are established through the determination of the minimum cost ($Z_t^{d(pr)}$) by means of the general logic diagram presented in Fig. 1.

Management Chair
Polytechnical Institut ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucharest

REFERENCES

1. *Al. Popa*, Utilizarea calculatoarelor electronice în transporturi, Editura Tehnică, Buc. 1971.
2. *Al. Popa, A. Carabulea*, Algorithm Concerning the Railway Electrification Optimization by Means of Operational Research Digital Computers, Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, T. XXXII nr. 3/1970.
3. *Al. Popa, A. Carabulea*, Beiträge zur Untersuchung der Optimalisirung der Electrizierung der Eisenbahnen mit Hilfe der Mathematischen Modellirung, Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, T. XXXII nr.5/1970
4. *A. Carabulea*, Contribution a l'étude de l'influence des reseaux électriques sur les circuits de telecomunications, Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti T. XXXI nr. 5/1969.
5. *Al. Popa, A. Carabulea*, Mathematical Model and Logical Scheme for Railway Electrifying and Diesel Drive Optimalization, Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, T. XXX, nr. 2/1968.
6. *Al. Popa, A. Carabulea*, Contribution à l'étude tehnique et economique des système de traction electrique et Diesel, Buletinul Institutului politehnic'' Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti T. XXIX nr. 2/1967
7. *Al. Popa*, Calculul consumului de energie electrică cu ajutorul calculatoarelor electronice analogice, Automatica şi Electronica nr. 4/1970
8. *A. Carabulea*, Algoritmul influenţei liniilor electrice trifazate asupra circuitelor învecinate de telecomunicaţii, Energetica CNIT Buc. nr. 11/1964
9. *A. Carabulea, A. Gheorghe*, Contributiones to the Study of the Designing and Operating of Electric Power Stations by Means of Mathematical Modelling, Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, nr. 1/1972.
10. *A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru*, Contributions to the Study of the Premises of Decisional Informatics, Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, nr. 1—2/1971

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică ,,Informația'' c. 2673

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele şi iniţialele de prenume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40 820

1973 AUG 1

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV NUMĂRUL 3 ANUL 1973,
MAI—IUNIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquees" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издается в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов

Состовленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présenté, il refléte en premier lieu l'activité scientifique du cors didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

SPSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV – NUMĂRUL 3

MAI – IUNIE

1973

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. ing. *Petru Baltă;* Prof. dr. ing. *George Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua*; Conf. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific); Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu*; Prof. ing. *Ștefan Mantea*; Prof. dr. ing. *Marius Preda*; Prof. ing. *Mihai Renert*; Conf. dr. ing. *Mircea Soare*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru.*

Redactor responsabil

Rector

Prof. dr. docent *Radu Voinea*

Membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

D. Filipescu
Asupra unor mulțimi aleatoare din spațiile euclidiene E_3 și E_n 21
C. M. Bucur
Formulă mixtă de aproximare pentru funcții de două variabile 31

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

Th. Bădescu, T. D. Ionescu
Studiul asupra independenței dintre umectabilitatea pigmenților și proprietățile reologice ale unor sisteme dispersate pe baza de galben de crom 35
Gr. Teodorescu
Metode de determinare pentru chinină și chinidină 43

MECANICA

N. I. Manolescu, C. Niță
Contribuții privind stabilirea condițiilor de asigurare a contactului permanent la mecanismele cu came polidine 53

AVIAȚIE

St. Gălețușe
Distribuția de presiuni pentru turbulența unui fiim de aer, luînd în considerație influența forțelor de inerție 63

HIDRAULICĂ

Julieta Florea, V. Panaitescu
Sur l'etude de la stabilite du mouvement d'un fluide a l'aide des calculateurs analogiques 75

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

I. Ungureanu, V. Tache
Contribuții la stabilirea bazelor calculului forțelor de strîngere a pieselor în dispozitive 91
C. Minciu
Determinarea modurilor de vibrații din mecanismul fictiv al lanțului cinematic de rulare al mașinilor de prelucrat roți dințate 103

REZISTENȚA MATERIALELOR

K. Schuller
Untersuchungen einer Zerstorungesfreien bestimmungs — Methode der Streckgrenze von Stählen 113

ELECTRONICA

D. Stoichescu
Procedee și metode de transmisie a datelor cu detecția și corecția erorilor 125

MANAGEMENT

Al. Popa, A. Carabulea
Contribution to the Study of the Operational Duty Optimizing of the Electric Traction 143

Резюме

Д.К. 513

Д. Филипеску

Размер возможных множеств пространств E_3 и E_n

Работа содержит интегральные формы касающиеся элементов возможных множеств из пространств E_3 и E_n.

По сравнения с другим подобными работами, учитывая вероятный характер эоответствующих применений, геометрические формы возможны не только как положение в связи с кинематическим размером пространства, но и как число.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 517

К. М. Букур

Интерполяционная формула смешанного типа для функцией двух переменных.

Если $f:D\to R$, $D\varepsilon R_2$ и известны значения функции $f(x, y)$ в точках (x_{ij}, y_i) некоторой сетки на D, задача аппроксимации функции интерполяционными многочленами на D возможна лишь в случае определенной сетки и для определенного числа точек.

Для исключения этих ограничений строится одна формула интерполяционного типа в которой применяется также один вариант метода наименьших квадратов.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 093.2:532.135.667.622

Тх. Бадеску, Т. Д. Ионеску

Исследование взаимозависимости между увлажняемости пигментов и реологическими свойствами ряда дисперсого система на основе желтого крома.

Исследование взаимозависимости между увлажняемости пигментов и реологическими свойствами ряда дисперсого система на основе желтого крома.

Определяются количественные соотношения между увлажнением пигментов и вязкостью, тиксотропия и адгезиья некоторых чернил для офсетной печати. Подтверждается роль пигмента путем сопоставительного изучения переноса, оптической плотности и цвета полученных печатных изделий.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Summary

D.C. 513

D. Filipescu

About Some Aleatory Sets Within the Spaces F_3 and E_n

This paper includes some integral formulas concerning the elements of certain aleatory sets within the spaces E_3 and E_n.

With respect to other similar works, taking into account the probabilistic characteristics, of the respective applications, the geometrical figures are aleatory, not only according to their position as against the space kinematic measure, but also as number.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 517

C. Bucur

Mixed Approximation Formula for Two Variables Fonctions

If $f: D \to R$, $D \varepsilon R^2$ and the values of the function $f(x, y)$ are known in the points (x_{ij}, y_i) of a network on D, the problem of aproximating the function by interpolation polynomials in D is possible only in the case of a certain configuration of the network and foracertain number of points. With the aim at avoiding these restrictions an approximation formula partlally interpolation, is being built, using the method of least squares too.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 093.2:532.135.667.622

Th. Bădescu, T. D. Ionescu

Studies about Interdependence between the Pigments Moistering and the Rheologyeal Propertyes of Ony Dispers Systems ou Yellow Chrom Bases

It is established quantitative relationships between the pigments moisteriong and the viscosity, the tixotropy and the adhesivity of ony offset inks. Through corelative studies between transfer, optically desity and the obtined colour of print, it is established the pigments rol.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 547.942

Гр. Теодореску

Методы опеределения хинина и хинолина.

Видимый и ИК спектры соединения, полученного взаимодействием хининое ремнекота аммония.

Определение было произведено непосредственно объемным методом используя соль Реинеке как осаждающего вещества. После фильтрования осадок растворяется ацетоном, обрабатываетс яизбытком раствора азотнокислого серебра и нитрируется избыток раствором роданистого аммония.

Для колориметрического метода, была использована соль Реинеке как осадочный реактив. После фильтрирования осадок растворялся в ацетоне и измерялся интенсивность окрашивания, используя колориметр Бланге.

Строение ренскота хинина была установлено определением молекулярного веса, с помощью видимых спектров рейнскота аммония и рейнекота хинина. Строение реинекота хинина была характеризировано с ИК спектра хинина и полученного соединения.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 621.835

И. И. Манолеску, К. Ницэ

Вшмад в иследования условий устаыовления постоянного контакта в полидиновыь кулаковыи механизмах

В данной статье определяется условие постоянного контакта между такетом и кулачком при внешней суммарной действующей силе такета на профиль кулачка, приведенной массе и, управляемых элементов, угловой скорости — ω_1 — кулачкого вала, тотальном ходе — h — такета, как и при константе упругости — κ — управляемых элементов.

Определяется величина неразмерного коэффициента K —то есть, коэффициента постоянного контакта.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 532.517.4

С. Гэлетуше

Распределение давлений два турбулентного движения воздушной пленки с учетом воздействия инерционных сил.

В данной работе исследовано движение воздушной пленки в турбулентном режиме между вращающейся круглой поверхностью и плоской еподвижной поверхностью. Для определения распределения явлений учлось воздействие сил инерции. Теоретически, полученные результаты были сопоставлены с экспериментальными данными и было получено хорошее соответствие.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 547.942

Gr. Teodorescu

Methodes for the Determination of Quinine and Quinidine. Visible and I.R. spectra of the compind obtained by the combination between quinine and ammonium reineckate

In the volumetric methode determination has been effected indirectly by using the Reinecke salt as precipitating reagent. After filtration, the precipitate hasbeen dissolved with acetone, and treated with silver nitrate solution in excess, the excess being titrated with ammonium thiocyanate solution. In the colorimetric method, Reinecke salt has benn used to precipitate and the formed precipitate has benn dissolved in acetone; the intensity of the colour has been measured by means of a B. Lange colorimeter. The strucure of the obtained compound has been assigned by the determination of the molecular mass, by means of vizible spectra for ammonium reineckate and quinine and of its compound, obtained by combination with ammonium reineckate has also been recorded.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 621.835

N. I, Manolescu, C. Niţă

Contribution to the Problem for EstablisLment the Conditions for Assuring the Permanent Contact in the Polidine Cams Mecanismes

The paper deals with requirements — to be met in order to secure a continuons contact between cam and follower depending upon the driving force, reduced mass elements, camshafts angular velocity ω_1, follower total displacement $-h-$ and elastic coefficient as well. The nondumensional coefficient — K_c — called continuous contact coefficient is determined.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 532.517.4

S. Găletuşe

The Pressure Distribution for the Turbulent Motion of the Air Film, by Considering the Influenee of the Inertia Forces

In the present paper, the turbulent motion of the air film, drawn by a circular surface which turns and a fixed surface, was studied.

In order to determine to the pressure distribution, the influence of the inertia forces was taken into consideration. The theoretical results obtained were compared with the experimental data and a good agreement was obtained.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 532:681.142.4

Жульета Флоря, В. Панаитеску.

Относительно изучения стабильности движения с помощью аналоговых калькуляторов.

После краткого изложения математической проблемы линейной стабильности движения жлкдкостей, развивается метод изучения линейной стабильности с помощью аналогового калькулятора. Для иллюстрирования предложенного метода изучается стабильность горизонатльного движения по типу Пауссей между двумя параллельными плоскостями, рассматривая как случай невязкой, так и случай вязкой жидкости. Сопоставляется метод применения аналоговых калькуляторов с другими математическими методами, применяемыми для изучения этой проблемы и подчеркивается преимущество предложенного метода. Особо выделены случаи течений, стабильность которых может быть изучена предложенным методом.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 621.881:531.2

И. Унгуряну, В. Таке

Вклад в установлении основ расчета нажимных сил деталей в приспособлении.

Исходя из самого общего случая действия сил при обработке на станках одной детали, установленной в приспособлении, были написаны управления статического уравновесия, считая и деформации упругой системы приспособление-деталь.

Соответствующая наименьшему расходу энергии, необходимой для сопранения контакта между приспособлением и деталями, система уравнений была решена матричным методом исследуя одну функцию-обьект.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 621.9

К. Минчу

Определение форм колебаний фиктивного механизма из кинематической цепи обкатки от зубофрезерных станков.

Работа приности вклад в определении динамических характеристик кинематической цепи обкатки от зубофрезерных станков. Определяются вынужденные колебания из этой закрытой кинематической цепи, подчеркивая формы колебания элементов фиктивного механизма образующегося между деталью и инструментом.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 532:681.142.4

Julieta Florea, V. Panaitescu

On the Study of a Fluid Movement Srability with the Help of Ana logue Computers

Following a brief exposition of the mathematical problem of the linear stability of a fluid movement, a method of study in the linear stability with the help of analoque computers is developed. To illustrate the proposed method, the stability of a Poiseuille type plane movement, between two parallel planes is studied, considering both the case of a non-viscid and of a viscid fluid. The method of using analogue computers is compared with other mathematical methods, used in studying this problem and the advantages of the suggested method are emphasized. The flow cases whose stability can be studied through the exposed method are rendered evident.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 621.881:531.2

I. Ungureanu, V. Tache

Contributions to the Establishing of the Basis of the Calculus of Clamping forces in Fixtures

Starting with the most general situation of the action of machining forces on workpieces clamped in the working fixture for machine-tools, there were written the equations for the static equilibrium taking in account the deformations of fixture — workpiece system.

Following on objective function correspondingly of a minimum energy consumption necessary for maintaning the contact of the vorkpiece surfaces with the locating elements of the fixture, the equation system being solved by a matricial method.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 621.9

C. Minciu

Vibration Mode Determination for the Fictitious Mechanism of the Working Kinematic Chain of the Gear-tooth Cutting Machines

The paper brings about some contributions to the determination of the dynamic characteristics of the working gear kinematic chain of the gear cutting machines. The forced vibrations of this closed kinematic chain are determined and especially those of the fictitious mechanism elements (consisting of tool and working piece).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 539.384:669

К. Шуллер

Исследования метода определения предела текучести для стали.

В работе исследуется применимость квази... метода определения предела текучести при помощи соотношения твердости скалывания (твердости Бринеля).

С этой целью в первую очередь определяется твердость скалывания и указываются ее характеристики. В продолжении описывается метод испытания, статистически обрабатываются результаты приблизительно 700 собственных испытаний и сравниваются полученные отношения с указанными в литературе по специальности.

Соответствие между расчетными величинами на основе предложенных соотноженных соотношений и величинами предела текучести, полученными методами испытания пробных отрезков являются хорошей.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 621.38:681.3.04...51

Д. Стойкеску

Способы и методы передачи данных корректирующими и детектирующими кодами

Описано несколько новых теоретитских и практических методов детекции и коррекции появляющихся в канале связи. Проблемы, представленные в работе, отличаются от классических, встреченных в теории линейных и циклических кодов: кроме того, они связаны с практически осуществленными примерами.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Д.К. 621.33

А. Попа А. Карабуля

К оптимальному изуйению электрической тяги методами операционального исследования II

Соображенный алгоритм позволяет учесзь все затраты, вызланные применением операционального исследования к изучению оптимизации электрической тяги и облевчает уточнение структуры себестоимости исследовательских работ, работ проэктирования, монтажа эксплуатации и развития осуществляемых обчектов

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 539.384:669

K. Schuller

A Study on a Non-destructive Method for Determining the Technical Yield Stress for Steel

The paper describes a research work on the applicability of a new method for the quasi-non destructive determination of the technical yield stress based on the ratio between the shear hardness and the Brinell hardness.

The concept of shear hardness is defined and some of its properties are described. An adequate experimental technique is presented, the results of more than 700 test made by the author are statistically treated and compared with other data published in literature.

A very good agreement was found between the yield stress values abtained from the proposed relations and those obtained from the classical tencile test on plain specimens.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 621.38:681.3.04...51

D. Stoichescu

Some Methods and Techniques for Data Transmission with Error Detection and Correction

Some theoretic and practical new techniques for error detection and correction are described. The problems presented in the paper are different from the classical one, met in the theory of linear and cyclic codes ; also they have the quality of being related to some equipment which is already in operation.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.C. 621 33

Al. Popa, A. Carabulea

Contributions to the Study of the Operational Duty Optimizing of the Electric Traction. II

The present paper tries to present the mathematic models, taking account of the whole range of expenses during the design construction—mounting and wosking cycle of the electric traction.

The algorithm conceived and tested on a calculus example,basis starts from a series of inedited premises concerning all the expenses for the railway electrification consideration and provides the design and operating practice by neu means of investigation the field of the technico — economic optimization at the level of scientific research and the achieving of the new goals by mathematic simulation and degital computers utilization.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Résumé

C.D. 513

D. Filipescu

Sur de certaines ensembles aléatoires dans les espaces euclidiens E_3 et E_n

L'ouvrage comprend certaines formules intégrales concernants les éléments de certaines ensembles aléatoires des espaces euclidiens E_3 et E_n.

Les figures géométriques respectives sont aléatoires, non seulement comme position par rapport à la mesure cinématique des espaces E_3 et E_n, mais aussi comme nombre.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 517

C. Bucur

Une formule mixte pour l'approximation des fonctions de deux variables

Si $f : D \to R$, $D \subset R^2$ et s'il donne les valeurs du fonction $f(x, y)$ dans les points (x_{ij}, y_i) d'un réseau sur D, le problème d'approximation d'une fonction par les polynômes d'interpolation sur D este possible seulement dans le cas d'une certain configuration de réseau et pour un certain nombre des points.

Dans le but d'eviter ces restrictions on construit une formule d'approximation partielle interpolative, en utilisant aussi la méthode des plus petits carrés.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 093.2:532.135.667.622

Th. Bădescu, T. D. Ionescu

Etude sur l'interdependence entre la mouillabilité des pigments e les propriétés rhéologiques des certains systeme disperses a base du jaune de chrome

On établient des relations quantitatives entre la mouillabilité des pigments et entre la viscosité la thixotropie et l'adhesivité des certaines encres offset. On peut confirmer la rôle du pigment par des études corelatifs entre le transfert, la densité optique et la couler des imprimés obtenus.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

Zusammenfassung

D.K. 513

D. Filipescu

Über der aleatorischen Mengen aus den Räume F_3 und E_n

Der Aufsatz enthält Integralformel hinsichtlich der Elemente aleatorischer Mengen aus der Räume E_3 und E_n.

Im Gegesatz ähnlicher Arbeiten und mit Berucksichtigung auf den Wahrscheinlichkeitscharacter der betreffenden Anwendungen sind die geometrischen Figuren nicht nur als Stellung im Verhältnis zur kinematischen Abmessung des Raumes, sondern auch als Zahl aleatorisch.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 517

C. Bucur

Gemischte Approximationsformel für Funktionen von zwei Veränderlichen.

Wenn $f : D \to R$, $D \subset R^2$ und die Werte der Funktion $f(x, y)$ in den Punkten einer Verteilung (x_{ij}, y_i) in D bekannt sind, ist die Approximation der Funktion durch Interpolationspolinome in D nur für eine gewisse Gestaltung der Verteilung und eine gewisse Anzahl der Punkte möglich.

Um diese Einschränkungen zu vermeiden wird eine Approximationsformel, die nur teilweise interpolativ ist, konstruiert. Dabei wird die Methode der kleinsten Quadrate verwendet.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 093.2:532.135.667.622

Th. Bădescu. T. D. Ionescu

Untersuchung des Abhängigkeits der Rheologischer Eigenschafte von die Pigmenten Aufenchtung einiger Zertreugten Systemen aus Chromgelb

Quantitative Beziehung zwischen die Pigmenten Anfeuchtung und die Zähigkeit, die Tixotropie und die Adhäsivitet einiger offset Tinten, sind festgestelt. Durch korrelative untersuchungen zwischen den Ubergang, die optische Sichte und die erlangenen Farben der Drucksachen, ist die Rolle des Pigmentes bestätigt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 547.942

Gr. Teodorescu

Méthodes de détermination de la qpoinine et de la quinidine. Les spectres en visible et en IR du composé obtenu entre la quinine et le reineckate d'ammonium.

Dans la méthode volumetrique, la determination a été fait indirectement avec utilisation du sel Reinecke comme réactif précipitant. Après le filtrage, on a dissous le precipité avec l'acétone, on l'a traité avec un excédént de solution d'azotate d'argent et on titré l'excédent avec une solution de thiocyanate d'ammonium.

Pour la méthode colorimétrique, on a utilisé le sel Reinecke comme réactif précipitant. Après filtrage, le précipité a été dissous dans l'acétone et on a mesuré l'intensité de la couleur en utilisant le colorimètre B. Lange. La structure du reineckate de quinine a été précisee par determination de d'ammonium et le reineckate de la quinine. La structure du reineckate de quinine à été caractérisée aussi par spectre en I.R. de la quinine et du composé obtenu.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 621.835

N. I. Manolescu, C. Niţă

Contributions concernant l'etablissment des conditionnes pour assures le contact permanent aux mecanismes avec des cames polidine

Dans l'article on établit les conditions necessaires pour assurer un contact permanent entre taquet et la came, en fonction de la force totale exterieure qui maintient le taquet sur le profile de la came, de la masse reduite — m — des élémentes conduits, de la vitesse angulaire — $\omega_1 l$— de l'arbre à cames, de la course totale du taquet h, ainsi que de la constante élastique — K_1 — des éléments conduits.

On détérmine la valeur du coeficient nondimensional du K_c contact permanent

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 532.517.4

S. Găletuşe

La répartition de pressions pour le mouvement turbulent d'un film d'air, prenant en considération l'effet des forces d'inertie

Dans ce travail on a étudié le mouvement en régime turbulent d'un film d'air entre une surface circulaire qui tourne et une surface fixe. Pour déterminer la répartition de pressions, on a pris en considération l'effet des forces d'inertie. Les résultats déduits théoriquement on été comparés avec les résultats expérimentaux et on a mis en évidence une bonne concordance.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 547.942

Gr. Teodorescu

Methoden für die Determination des Chinnes und des Chinidines. Sichtbare und infrarote Spektren für das Produkt erhalten aus dem Chinin und dem Reinecke-Salz

In der volumetrichen Methode wurde die Determination indirekt unter Anwendung des Reinecke-Salzes als fällendes Reagens durchgeführt. Nach der Filtrierung wurde der Niederschlag mit Azeton gelöst, mit Silbernitratlösung Überschluss behandelt und der Überschuss mit Ammonium thiozyanat lösung titriert.

Für die kolorimetrische Methode wurde das Reinecke-Salz als fällendes Reagens benützt. Der Niderschlag wurde nach der Filtrierung in Azeton gelöst und die Intensität der Farbe unter Benützung des B. Lange kolorimeters gemessen. Die Struktur des Chinin-Reineckates wurde auf Grund der Determination des Molekulargewichtes festgestellt, indem unsichtbare Spektren für das Reinecke-Salz und Chinin Reineckat verwendet wurden. Die struktur des Chinin Reineckates kennzeichnete sich ebenfalls durch das infrarote Spektrum des Chinins und des erhaltenen Produktes.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 621.835

M. I. Manolescu, C. Niţă

Beitragen für feststehlung der Bedingungen für die vessicherung der ständigen Beruhrung bei den triebwerke mit Polidinischenoken

In dem dargestellten Artikel wird die Bedingung des Erhaltens der dauernden Berührung zwischen dem Stössel und der Nockenscheibe festgestellt, im Verhältnis zum gesamten äusserlichen Gewicht, welches der Stössel auf das Prophyl der Nockenscheibe drückt, zur reduzierten Masse — m — der abgetriebenen Elemente, zur Winkelgeschwindigkeit — ω — der Welle mit Nockenscheiben, zur gesamten Hebehöhe des Stössels, als auch zur elastischen Konstante — K_1 — der abgetriebenen Elemente.

Man bestimmt den Wert des dimensionslosen Koeffizienten K_c, genannt Koeffizient der dauernden Berührung.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 532.517.4

S. Găletuşe

Die Druckverteilung für die turbulente Bewegung eines Luftfilms, wenn den Trägheitskräften reehnung getragen wird

In dieser Arbeit wurde die turbulente Bewegung eines Luftfilms zwischen einer kreisförmigen sich bewegenden und einer ebenen Fläche untersucht. Um die Verteilung des Druckes abzuleiten, wurde der Einfluss der Trägheitskräfte berüksichtigt. Die theoretisch erhaltenen Ergebnisse sind mit den experimentell erhaltenen verglichen worden. Es wurde eine gute Übereinstimmung erhalten.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 532:681.142.4

Julieta Florea, V. Panaitescu

Sur l'étude de la stabilité du mouvement d'un fluide à l'aide des calculateurs analogiques

Dans ce travail, après un courant énoncé du problème mathématique de la stabilité linéaire d'un mouvement fluide, on développe une méthode d'étude de la stabilité linéaire à l'aide des calculateurs analogiques. Pour l'illustration de la méthode proposée on étudie la stabilité d'un mouvement plan de type de Poiseuille, entre deux plans parallèles, en considérant le cas d'un fluide non visqueux (que l'on étudie à l'aide d'un calculateur analogique „Applied Dynamics") autant que le cas d'un fluide visqueux (que l'on étudie à l'aide d'un calculateur analogique „Pace"). On compare la méthode de l'utilisation des calculateurs analogiques avec les autres méthodes mathématiques qu'on emploie d'habitude pour l'étude de ce problème et on souligne les avantages de la méthode proposée. On met en évidence les d'écoulements dont la stabilité peut être étudiée par la méthode exposée.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 621.881:531.2

I. Ungureanu, V. Tache

Contributions á l'établissement des assises du calcul des forces de serage dans pièces des les dispositifs

On a écrit les équations d'équilibre statique à partir de la situation la plus générale de l'action des forces de travail sur une pièce logée dans le dispositif d'usinage pour machines-outils en envisageant les déformations du système dispositif-pièce. Le système d'équations a été résolu moyennant le calcul matriciel en poursuivant une fonction-objective demandée par une consommation minimum d'énergie exigée pour maintenir le contact des surfaces des pièces aux éléments d'appui dans le dispositif.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 621.9

C. Minciu

La détermination des modes de vibration dans le mécanisme fictif de la chaîne cinématique de roulement des machines á usiner des roues dentées

Ce travail apporte des contribution quant à la determination des traites caractéristiques dinamiques de la chaine cinématique de roulement des machines à tailler des roues dentées.

On détermine les vibration forcées de cette chaîne cinématique fermée, et particulièrement les modes de vibration des élèemnts du mécanisme fictif (formé de l'outil et de la pièce).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 532:682.142.4

Julietta Florea, V. Panaitescu

Uber die Forschung der Beständigkiet einer fliessenden Bewegung mit Hilfe von analogischen Rechenmaschinen

Nach einer kurzen Darlegung des mathematischen Problems über die lineare Beständigkeit einer fliessenden Bewegung, wird die Forschungsmethode, mit Hilfe von analogischen Rechenmaschinen, der linearischen Beständigkeit dargelegt.

Um die dargelegte Methode zu erläutern wird die Beständigkeit einer ebenen Bewegung von Typ Poisseuille zwischen paralelle Ebenen, hinsichtlich einer zähen sowie einer nichtzähen Flüssigkeit geprüft.

Die Anwendungsmöglichkeit von analogischen Rechenmaschinen wird mit anderen angewandten mathematischen Methoden vergleicht und die Vorteile der vorgeschlagenen Methode unterstreicht. Es werden Beispiele von Strömmungen derer Beständigkeit durch die ausgeführte Methode studiiert werden können, hervorgerufen.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 621.881:531.2

I. Ungureanu, V. Tache

Beiträge zur Festsetzung der Grundlagen für die Berechnung der Aufspannungskräfte an den in Vorrichtungen befestigten Werkstücken

Von dem allgemeinsten Wirkungsfall der Bearbeitungskräfte auf ein in eine Werkzeugmaschinenvorrichtung befestigtes Werkstück ausgehend, hat man die statischen Gleichgewichtsgleichungen geschrieben, indem man aber den Deformationen des Systems Vorrichtung — Werkstück Rechnung trug.

Einer obiektiven Funktion, entsprechend dem minimalen, notwendigen Energieverbrauch für das Aufrechterhalten des Kontaktes zwischen den Oberflächen des Werkstückes und der Vorrichtungsstützoberfläche, folgend, wurde das Gleichungssystem mit Hilfe von Matrizenberechnung gelöst.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 621.9

C. Minciu

Bestimmung der Schwingungsarten im fiktiven Mechanismus von der an Verzahnungwerkzeugmaschinen kynematischen Wälzkette

Der Bericht bringt Beiträge im Bezug auf die Bestimmung der dynamischen Charakteristiken von der an Verzahnungwerkzeugmaschinen kynematischen Wälzkette.

Zuerst werden die von dieser geschlossen en kynematischen Kette erregten Schwingungen festgesetzt und dann besonders bestimmt man die Schwingungsarten vom fiktiven Mechanismus, das aus der Wälzwerkzeug und dem Werkrad besteht.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 539.384:669

K. Schuller

Recherches concernant une méthode nondestructive pour déterminer la limite d'écoulement des aciers

L'ouvrage présent une analyse sur l'applicabilité d'une méthode quasi-nondestructive pour déterminer la limite d'écoulement basée sur la conaissance du rapport durité de cisaillement durité Brinell.

On introduit la notion durité de cisaillement (définition et propriétés), on présent les méthodes d'essais, résultats des 700 essais personnels dépouillées par des moyénnes statistiques et une comparaison des expressions obtenues avec celles indiquées dans la litérature de spécialité.

Il y a une trés bonne correspondance des valeurs calculées avec les expressions proposées et les valeurs de la limite d'écoulement obtenues par la voie expérimentales sur les éprouvettes.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 621.38:681.3.04...51

D. Stoichescu

Procédés et méthodes de transmission des donnés avec la détection et la correction des erreurs

On décrit quelques nouveaux procédés-theoriques et pratiques-des tinés à la détéction et la correction des erreurs qui apparaissent dans le canal de transmission. Les problèmes présentées dans l'article sont différentes de celles rencontrées dans la théorie des codes linéaires et cycliques ; elles ont aussi la qualité de traiter des exemples deja réalisés pratiquemment.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

C.D. 621.33

Al. Popa, A. Carabulea

Contributions á l'etude optimale de la traction électrique par des methodes de recherches opérationnelle II

L'on présente des méthodes mathematiques et le scheme logique pur l'étude optimale de la traction électrique a l'aide des méthodes de recherche operationnelle.

L'algorythme ainsi conçu permet la prise en considération de toutes les dépluses occasionnées par l'application de la recherche opérationnelle à l'étude eucun d'optimisers la traction électrique rende plus facile la precision de la structure du point de revenu des travaux de recherche, projets, montage, exploatation et développement des objectifs à realiser.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 539.384:669

K. Schuller

Untersuchungen einer zerstörungsfreien bestim-mungsmethode der streckgrenze von stählen

In der Arbeit wird eine quasizerstörungsfreie Methode der Bestimmung der Streckgrenze mit Hilfe des Verhältnisses Kugelschubhärte / Brinellhärte auf ihre Anwendbarkeit untersucht.

Zu diesem Zwecke wird in erster Linie die Kugelschubhärte definiert und ihre Eigenschaften angegeben. Im Weiteren wird die Versuchsmethodik beschrieben und — an Hand von etwa 700 eigenen Versuchen — die erhaltenen Ergebnisse statistisch ausgewertet und den aus der Literatur bekannten gegenübergestellt.

Die Übereinstimmung zwischen den auf Grund der vorgeschlagenen Ausdrücke mit Hilfe der Streckgrenze berechneten und den im Zugversuch bestimmten Werte der Streckgrenze ist sehr befriedigend.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 621.38:681.3.04...51

D. Stoichescu

Verfahren zur Datermibertragung mit Fehlerdetektion und Fehler verbesserung

Es sind einige neue theoretische und praktische Verfahren zur Detektion und Verbesserung der Fehler, welche im Ubertragungskanal erscheinen, dargestellt, Die in der Arbeit aufgefassten Problemen sind von den klassischen, die in der Darstellung linearer und zyklischer Code erscheinen etwa verschieden ; ausserdem sind sie mit practisch verwirklichten Beispiele im Zusammenhang.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

D.K. 621.33

Al. Popa, A. Carabulea

Beitrag zum optimalen Studium des elektrischen Antriebes mit Hilfe von operationellen Forschungsmethoden II

In der Arbeit werden die mathematischen Modelle und das logische Schema für das optimale Studium des elektrischen Antriebes mit Hilfe von operationellen Forschungsmethoden beschrieben.

Der ausgearbeitete Algorithmus erlaubt die Berücksichtigung aller Ausgaben, welche durch die Anwendung der operationellen Forschung im Studium der Optimisierung des elektrischen Antriebes anfallen, und erleichtert die Festlegung der Struktur des Kostenpreises der Arbeiten, welche für die Erforschung, die Konstrucktion, die Montage, den Betrieb und die weiterentwicklung des zu realisierend en Objecktives nötig sind.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 3/1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

MATEMATICĂ

C.Z.: 513

ASUPRA UNOR MULȚIMI ALEATOARE DIN SPAȚIILE EUCLIDIENE E_3 și E_n*

DUMITRU FILIPESCU

I. Fie E_3 spațiul euclidian de coordonate carteziene ortogonale x, y, z. În acest spațiu măsura cinematică are expresia (5)

$$(1)\quad dK = [dP\ d\Omega\ d\psi]$$

unde $dP = [dx\ dy\ dz]$; $d\Omega = |\sin\theta||d\theta d\varphi]$ reprezintă elementul de arie pe sfera unitate, iar ψ este un unghi de rotație.

Considerăm un sistem de m corpuri convexe, $K_1, K_2, \ldots K_m$ de poziție aleatoare în raport cu măsura (1), independente [3], egale, de volum V, cu aria frontierei S și integrala curburii medii $\overline{H}$ iar K_0 reprezintă un corp convex de poziție fixă de volum V_0 și aria frontierei S_0.

A. Dacă notăm cu K_m^r mulțimea aleatoare formată cu punctele comune a r dintre cele m corpuri convexe atunci [6], avem valoarea medie

$$(1)\quad E(V_m^r) = \frac{\binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)]_{V_0}^{m-r}}{[8\pi^2(V_0+V) + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)]^m}$$

unde V_m^r reprezintă volumul (măsura Lebesgue) a mulțimii $K_0 \cap K_m^r$.

Notînd cu

$$(2)\quad p = \frac{8\pi^2 V}{8\pi^2(V_0+V) + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)}$$

$$q = 1 - p$$

formula (1) se mai scrie

$$(3)\quad E(V_m^r) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} V_0.$$

* Manuscris predat redacției la data de 30 martie 1971

Presupunem, în această lucrare, că numărul corpurilor convexe, m este aleator, fiind dat de valorile variabilei aleatoare $\zeta(K_0)$, cu distribuţia :

$$(4) \qquad \zeta(K_0) : \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_m \dots \end{Bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

În această situaţie, (3) reprezintă valoarea medie condiţionată pentru cazul cînd $\zeta(K_0) = m$.

Notînd cu $E(V^{(r)})$ valoarea medie a volumului corespunzător mulţimii $K_0 \cap K^{(r)}$ unde $K^{(r)}$ reprezintă mulţimea aleatoare cu punctele comune *a* r corpuri pentru cazul cînd numărul acestora este aleator, avem formula [2],

$$(5) \qquad E(V^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} E(V_m^r)\, p_m$$

Ţinînd seama de lucrarea [7], vom face ipoteza că pentru orice mulţime măsurabilă Borel K,

$$(6) \qquad P(\xi(K) = m) = e^{-\lambda\mu(K)} \frac{[\lambda\mu(K)]^m}{m!} ; \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dacă p_m are expresia (6) unde $\mu(K) = \mu(K_0) = V_0$ atunci (5) devine, ţinînd seama de (3)

$$(7) \qquad E(V^{(r)}) = \frac{(p\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda p V_0} V_0.$$

Se observă că

$$(7') \qquad \sum_{r=0}^{\infty} E(V^{(r)}) = V_0$$

iar [4]

$$\frac{(p\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda p V_0} \qquad r = 0, 1, 2, \dots$$

reprezintă probabilitatea ca un punct $M \in K_0$ să aparţină mulţimii $K_0 \cap K^{(r)}$.

B. Dacă notăm cu S_m^r aria frontierei mulţimii $K_0 \cap K_m^r$ din (6), avem formula :

$$E(S_m^r) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} \{S_0 + rV_0 S V^{-1} +$$

$$(8) \qquad + 8(m - r)\pi^2 V_0 S[8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0)]^{-1}\}.$$

Dacă ne situăm în ipoteza că numărul corpurilor convexe este aleator, din (4), avem [18],

$$E(S^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} E(S_m^r)\, p_m. \tag{9}$$

Dacă p_m are expresia (6) cu $\mu(K) = V_0$, iar $E(S_m^r)$ are expresia (8), atunci

$$E(S^{(r)}) = \frac{(p\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda p V_0}\{S_0 + rV_0 S V^{-1} + \tag{10}$$
$$+ 8\pi^2 V_0 S\,(q\lambda S_0)\,[8\pi^2 V_0 + 2\pi\,(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)]^{-1}\}.$$

II. Dacă presupunem acum că, corpurile convexe $K_1, K_2, \ldots, K_m$ se împart în s grupe, corpurile fiind egale numai dacă aparţin aceleeaşi grupe, adică avem m_i corpuri egale între ele, de volum V_i şi aria frontierei ∂K_i, $S_i (i = 1, 2, \ldots, s)$, cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$ independente [3], aleatoare ca poziţie în raport cu măsura (1) iar K_0 este un corp convex de poziţie fixă de volum V_0 şi aria frontierei ∂K_0, S_0 atunci notînd cu $K_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ mulţimea aleatoare formată cu punctele comune $a\, r_1$ din cele m_1 corpuri, r_2 din cele m_2, $\ldots$, r_s din cele m_s, avem valoarea medie [2],

$$E\,(V_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}) = \pi \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} V_0 \tag{11}$$

unde $V_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ este volumul configuraţiei geometrice $K_0 \cap K_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ iar

$$p_i = \frac{8\pi^2 V_i}{8\pi^2 (V_0 + V_i) + 2\pi\,(S_0 \overline{H}_i + S_i \overline{H}_0)} \tag{12}$$

$$q_i = 1 - p_i$$

Presupunem acum că m_i reprezintă valorile variabilelor aleatoare $\xi^i(K_0)$, independente, cu distribuţia

$$\zeta^i(K_0) : \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m_i \ldots \\ p_{0_i} & p_{1_i} & p_{2_i} & \ldots & p_{m_i} \ldots \end{Bmatrix} \tag{13}$$

iar $\sum_{m=0}^{\infty} p_{m_i} = 1$; $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Notăm cu $K^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ mulţimea aleatoare formată cu punctele $a\, r_1$, corpuri din grupa I, r_2 din grupa 2, $\ldots$ r_s din grupa s, iar cu $V^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ măsura Lebesgue (volumul) a mulţimii $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}$.

α) Dacă $E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s})$ reprezintă volumul configurației $K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_2 r_s}$, atunci

$$E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}) = E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s} / \xi^1 = m_1,\ \xi^2 = m_2, \ldots,\ \xi^s = m_s)$$

adică o valoare medie condiționată, deci [1]

$$E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_s} E(V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s})\, p^{m_1 m_2 \ldots m_s} \tag{14}$$

Cum variabilele aleatoare sînt presupuse independente

$$p^{m_1 m_2 \ldots m_s} = p_{m_1} p_{m_2} \ldots p_{m_s}$$

și deci

$$E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_s} E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s})\, p_{m_1} p_{m_2} \ldots p_{m_s} \tag{15}$$

Dacă

$$p_{m_i} = e^{-\lambda_i V_0} \frac{(\lambda_i V_0)^{m_i}}{m_i!} \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{16}$$

iar $E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s})$ are expresia (11), atunci

$$E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{(p_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!}\, e^{-\lambda_i p_i V_0} \tag{17}$$

Dacă notăm cu V^r măsura Lebesgue a mulțimii din interiorul lui K_0 ce aparține la r corpuri convexe atunci

$$E(V^{(r)}) = \sum_{r_1 + \ldots + r_s = r} E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}) \tag{18}$$

Cînd $E(V^{r_1 r_2 \ldots r_s})$ are expresia (17), avem

$$E(V^{(r)}) = V_0 \sum_{r_1 + \ldots + r_s = r} \prod_{i=1}^{s} \frac{(p_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!}\, e^{-\lambda_i p_i V_0} \tag{18'}$$

Presupunînd în (18') corpurile convexe egale, obținem (7) cu $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$, deoarece

$$\sum_{r_1 + \ldots + r_s = r} \prod_{i=1}^{s} \frac{k_i}{r_i!} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_s)^r}{r!}$$

β) Notînd cu $S^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ aria frontierei mulțimii aleatoare $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$, avem valoarea medie [2]

$$E\left(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right) = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} \left[S_0 + \right.$$

(19)

$$\left. + \sum_{h=1}^{s} r_h V_h^{-1} V_0 S_h + 8(m_h - V_h)\, \pi^2 V_0 S_h [8\pi^2 V_0 + 2\pi (S_0 \bar{H}_h + S_h \bar{H}_0)]^{-1} \right].$$

Situîndu-ne în ipoteza că $m_1, m_2, \ldots, m_s$ sînt valorile variabilelor aleatoare $\xi^i(K_0)$ cu distribuția (13) și notînd cu $S^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ aria frontierei $\partial (K . \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s})$ avem valoarea medie

$$E\left(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}\right) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_s} E\left(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right) p_{m_1} p_{m_2} \ldots p_{m_s} \tag{20}$$

sau dacă p_{m_i} are expresia (16) iar $E\left(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right)$ expresia (19) atunci

$$E\left(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}\right) = \prod_{i=1}^{s} \frac{(p_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i !}\, e^{-\lambda_i p_i V_0} \left\{ S_0 + \right.$$

(20′)

$$\left. + \sum_{h=1}^{s} r_h V_h^{-1} V_0 S_h + 8\pi^2 (q_h \lambda_h V_0) [8\pi^2 V_0 + 2\pi (S_0 H_h + S_h H_0)]^{-1} V_0 S_h \right\}$$

Aplicații. Dacă $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt cilindrii egali de lungime infinită, atunci păstrînd notațiile anterioare avem [2]

$$E\left(V_r^m\right) = \binom{m}{r} P^r Q^{m-r} V_0 \tag{21}$$

unde

$$P = \frac{2\sigma}{2\sigma + \dfrac{S_0}{2} + R\bar{H}_0}\,; \qquad Q = 1 - P$$

σ reprezentînd aria secțiunii normale a unuia din cilindri, iar R raza cercului secțiunii. De asemenea

$$E\left(S_m^r\right) = \binom{m}{r} P^r Q^{m-r} \{ S_0 + 2\pi V_0 [rR\,(\sigma)^{-1} + \tag{22}$$

$$+ 4\,(m - r)\, R\,(S_0 + 2R\bar{H}_0)^{-1}] \}.$$

Presupunînd că numărul acestora reprezintă valorile variabilei aleatoare $\zeta^i(K_0)$, date de (4), (6) atunci avem respectiv

$$E(V^{(r)}) = \frac{(P\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda P V_0} V_0 \tag{23}$$

$$E(S^{(r)}) = \frac{(P\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda P V_0}\{S_0 + 2\pi V_0[rR(\sigma)^{-1} + 4(Q\lambda V_0)(S_0 + 2R\bar{H}_0)^{-1}]\} \tag{24}$$

unde $E(V^r)$, $E(S^r)$ reprezintă valori medii pentru volum respectiv aria frontierei configurației $K_0 \cap K^{(r)}$ corespunzătoare *cilindrilor*.

Dacă cilindrii nu-s toți egali între ei, atunci cu notațiile anterioare, avem [2]

$$E(V^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}) = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{m_i - r_i} V_0 \tag{25}$$

$$E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}) = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{m_i - r_i} \left\{ S_0 + \right.$$

$$\left. + 2\pi V_0 \sum_{t=1}^{s} [r_t \sigma_t^{-1} R_t + 4(m_t - r_t) R_t (S_0 + 2R_t \bar{H}_0)^{-1}] \right\}. \tag{26}$$

Presupunînd că m_i sînt valorile variabilelor aleatoare date de (13), (16), avem

$$E(V^{r_1 r_2 \dots r_s}) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{(P_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda P_i V_0} \tag{27}$$

$$E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \prod_{i=1}^{s} \frac{(P_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda P_i V_0} \left\{ S_0 + \right.$$

$$\left. + 2\pi V_0 \sum_{t=1}^{s} [r_t S_t \sigma_t^{-t} + 4(Q_t \lambda_t V_0) R_t (S_0 + 2R_t H_0)^{-1}] \right\} \tag{28}$$

unde

$$P_i = \frac{2\sigma_i}{2\sigma_i + \frac{S_0}{2} + R_i H_0}; \quad Q_i = 1 - P_i.$$

III. În spațiul euclidian cu n dimensiuni E_n, de coordonate ortogonale $x_1, x_2, \dots, x_n$ măsura cinematică elementară are expresia

$$dK = [dP\, dO_{n-1} \dots dO_2\, dO_1] \tag{29}$$

unde $dP = [dx^1\, dx^2 \ldots dx^n]$, iar dO_s este elementul de arie pe sfera s dimensională unitate din spaţiul E_n.

Presupunem că avem în $E_n m$ corpuri convexe $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *egale*, aleatoare ca poziţie în raport cu măsura (29), independente [3], de volum V şi aria frontierei S, iar K_0 un corp de poziţie fixă cu volum V_0 şi aria frontierei S_0.

Notăm ca şi în E_3 cu K_m^r mulţimea aleatoare formată cu punctele comune a r din cele m corpuri convexe date, iar cu V_m^r volumul (măsura Lebesgue) a configuraţiei geometrice $K_0 - K_m^r$; din (6), avem formula

$$E(V_m^r) = \binom{m}{r} P^r Q^{m-r} V_0 \tag{30}$$

unde s-a notat cu

$$P = \frac{V}{V + V_0 + \dfrac{1}{nO_{n-1}} \displaystyle\sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)}\, M_{n-h-2}} \tag{31}$$

$$Q = 1 - P$$

iar

$$M_h^0 = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} \int_{\partial K_0} \{R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}\}_h \, d\sigma_0 \tag{31'}$$

$$M_h = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} \int_{\partial K} \{R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}\}_h \, d\sigma$$

$d\sigma_0$ şi $d\sigma$ fiind elementele de arii pe hipersuprafeţele ∂K_0 respectiv ∂K, frontierele corpurilor K_0 şi K, iar $\{R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}\}_h$ este funcţia simetrică elementară a celor $n-1$ curburi principale ale hipersuprafeţelor ∂K_0 şi ∂K.

Dacă numărul corpurilor convexe m, reprezintă valorile variabilei aleatoare $\xi(K_0)_5$ determinate de (4), atunci păstrînd notaţiile din E_3, avem

$$E[V^{(r)}] = \sum_{m=0}^{\infty} E(V_m^r) p_m \tag{32}$$

Cînd p_m are expresia (6), cu $\mu(K)\, L = \mu(K_0) = V_0$ iar $E(V_m^r)$ este dat de (30), atunci (32) devine

$$E(V^{(r)}) = \frac{(P\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda P V_0} V_0 \tag{33}$$

unde P este dat de (31).

Dacă corpurile convexe nu-s egale și au poziții aleatoare în raport cu măsura (29), cu aceleași notații din E_3 avem valorile medii [2]

$$E(V_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{m_i - r_i} V_0 \tag{34}$$

$$E(S_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{m_i - r_i} \left\{ S_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{s} r_h V_h^{-1} V_0 S_h + (m_h - r_h) V_0 S_h \left[V_0 + \frac{1}{n O_{n-1}} \sum_{u=0}^{n=2} \binom{n}{u+1} M_u^{(0)} M_{n-u-2}^{(h)} \right]^{-1} \right\} \tag{35}$$

unde P_i, Q_i au expersii similare cu (31) unde V și M_l se înlocuiesc respectiv cu V_i, $M_l^{(i)}$, elementele corespunzătoare corpului convex $K_i (i = 1, 2, \dots, s)$.

Dacă m_i reprezintă valorile variabilelor aleatoare independente $\zeta^i(K_0) (i = 1, 2, 3, \dots, s)$ date (13), atunci

$$E(V^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s} E(V_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s}) \, p_{m_1} \dots p_{m_s} \tag{36}$$

$$E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s} E(S_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s}) \, p_{m_1} \dots p_{m_s} \tag{37}$$

Presupunînd că p_{m_i} au expresiile (16), $(i = 1, 2, \dots, s)$, iar $E(V_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s})$, $E(S_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s})$ cele date de (34), (35), urmează

$$E(V^{r_1 r_2 \dots r_s}) = V_0 \sum_{i=1}^{s} \frac{(P_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda_i P_i V_0} \tag{38}$$

$$E(S^{r_1 r_2 \dots r_s}) = \prod_{i=1}^{s} \frac{(P_i \lambda_i V_0)^{r_i}}{r_i!} e^{-\lambda_i P_i V_0} \left\{ S_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{s} r_h V_h^{-1} V_0 S_h + (Q_h \lambda_h V_0) V_0 S_h \left[V_0 + \frac{1}{n O_{n-1}} \sum_{u=0}^{n=2} \binom{n}{u+1} M_u^{(0)} M_{n-u-2}^{(h)} \right]^{-1} \right\} \tag{39}$$

Catedra matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Cramer, H.*, Mathematical Methods of Statistics — Princeton University Press 1954.
2. *Filipescu, D.*, Asupra unor formule integrale. Lucrare publicată în revista Studii și cercetări matematice nr. 7/1970.
3. *Kendall, M. G., Moran P. A. P.*, Geometrical Probability. C. Griffin, London 1963.

4. *Robbins, H. E.*, On the Measure of a Random Set. Ann. Math. Stat. 15—70—74 (1944) ; 16, 342—347 (1945).
5. *Stoka, M. I.*, Geometrie Integrale, Mem. des Sci. Mat. fasc. 165 ed. Gauther Villars, Paris, 1968.
6. * * *, Alcune formule integrali Concernenti i corpi convessi, in uno spazio euclidio E_3, Rendiconti del Seminario Matematico di Univ. e Politehnico di Torino, vol. 29, 1969.
7. *Takacs, I.*, On the Probability Distribution of the Measure of the Union of Random Sets Placed in a Euclidian Space. Ann. Univ. Sci. Budapest, 1, 89—95 (1958).
8. *Vrănceanu, G.* Lecții de geometrie diferențială vol. I—IV, 1962—1968.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

C.Z.: 517

FORMULĂ MIXTĂ DE APROXIMARE PENTRU FUNCȚII DE DOUĂ VARIABILE

CONSTANTIN M. BUCUR

1. Formularea problemei

Se consideră funcția $f: D \to R$, $D \subset R^2$, f — funcție cu modul integrabil pe D și o rețea d_D pe domeniul D, determinată de punctele (x_{ij}, y_i), $(0 \leqslant i \leqslant s,\ 0 \leqslant j \leqslant n_i)$, în care se cunosc valorile exacte $f(x_{ij}, y_i)$.

Se cere determinarea pe domeniul D a unei aproximări $F(x, y)$, pentru funcția $f(x, y)$.

2. Determinarea aproximării $F(x, y)$.

Folosirea unui polinom de interpolare nu este acceptabilă în acest caz, deoarece construirea unui asemenea polinom pe R^2 implică restricții asupra numărului și poziției în plan a punctelor rețelei d_D.

Pentru evitarea acestei dificultăți se caută o aproximare mixtă, folosind, după cele două variabile, interpolarea și metoda celor mai mici pătrate.

Deoarece valorile $f(x_{ij}, y_i)$ sînt exacte, poate fi construit un polinom Lagrange de interpolare după variabila x, pentru i arbitrar dar fix:

$$L_{n_i}(x, y_i) = \sum_{j=0}^{n_i} \frac{\Pi_{n_i+1}(x) \cdot f(x_{ij}, y_i)}{(x - x_{ij}) \cdot \Pi'_{n_i+1}(x_{ij})};$$

cu $\Pi_{n_i+1}(x)$ s-a notat produsul $(x - x_{i0})(x - x_{i1}) \ldots (x - x_{in_i})$.

Procedînd analog pentru toate valorile lui i, $(i = 0, 1, \ldots, s)$, rezultă sistemul de polinoame $L_{n_i}(x, y_i)$.

Dacă se consideră x ca parametru, pentru valorile

$$f(x, y_i) \approx L_{n_i}(x, y_i), \qquad (i = 0, 1, \ldots, s)$$

* Manuscris predat redacției la data de 5 decembrie 1972.

se construiește aproximarea funcției f după metoda celor mai mici pătrate :

$$f(x, y) \approx F(x, y) = \sum_{k=0}^{r} C_k(x) \cdot \varphi_k(y), \quad (r \leqslant s),$$

unde $\{\varphi_k(x)\}$ este un sistem fundamental de funcții (sistem Cebîșev).

Deoarece F este element minimal pe subspațiul liniar H generat de sistemul $\{\varphi_k(y)\}$, $f - F$ satisface condiția de ortogonalitate față de orice element din H și în particular

$$(f - F, \varphi_m) = 0, \quad (m = 0, 1, \ldots, r),$$

sau

$$(f, \varphi_m) = \sum_{k=0}^{r} C_k \cdot (\varphi_k, \varphi_m),$$

unde sînt folosite notațiile

$$(f, \varphi_m) = \sum_{i=0}^{s} f(x, y_i) \cdot \varphi_m(y_i) \approx \sum_{i=0}^{s} L_{n_i}(x, y_i) \cdot \varphi_m(y_i) = b_m(x),$$

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{i=0}^{s} \varphi_k(y_i) \cdot \varphi_m(y_i) = a_{km}$$

S-a obținut un sistem algebric liniar (x este considerat ca parametru)

$$\sum_{k=0}^{r} a_{km} \cdot C_k = b_m(x), \quad m = 0, 1, \ldots, r,$$

din care se determină coeficienții C_k.

Determinantul sistemului este un determinant Gramm

$$D_G = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_0, \varphi_r) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_1, \varphi_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_r, \varphi_0) & (\varphi_r, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_r, \varphi_r) \end{vmatrix}.$$

Deoarece $\{\varphi_k(y)\}$ este un sistem fundamental de funcții, rezultă $D_G \neq 0$, iar sistemul algebric liniar avînd ca necunoscute C_k este un sistem determinat ; soluția sa poate fi obținută, prin metoda lui Cramer :

$$C_k = \frac{D_k(x)}{D_G}$$

În acest mod s-a obținut o formulă mixtă de aproximare a funcției $f(x, y)$ pe rețeaua de punct (x_{ij}, y_i):

$$f(x, y) \approx \sum_{k=0}^{r} C_k(x) \cdot \varphi_k(y).$$

Dacă aproximarea în medie se face printr-un polinom algebric, se consideră $\varphi_k(y) \equiv y^k$.

3. Minimizarea erorii

Pentru punctele (x_{ij}, y_i) de pe dreapta $y = y_i$, în care se cunosc valorile $f(x_{ij}, y_i)$, se construiește polinomul de interpolare $L_{n_i}(x, y_i)$. Eroarea absolută pentru orice punct (x, y_i) de pe dreapta $y = y_i$, $(x, y_i) \in D$, este caracterizată de relația

$$|f(x, y_i) - L_{n_i}(x, y_i)| \leqslant \frac{M_i}{(n_i+1)!} |\Pi_{n_i+1}(x)|,$$

unde

$$\left| \frac{\partial^{n_i+1} f(x, y_i)}{\partial x^{n_i+1}} \right| < M_i \qquad (x, y_i) \in D.$$

Deoarece dintre polinoamele de gradul n_i polinomul Cebîșev este polinomul cu abatere minimă de la zero, luînd ca abscise x_{ij} rădăcinile polinomului Cebîșev, eroarea absolută va fi minimă. Procedînd analog pentru toate valorile i, $(i = 0, 1, \ldots, s)$, se obține un sistem de polinoame $\{L_{n_i}(x, y_i)\}$, fiecare dînd eroare absolută minimă pe dreapta corespunzătoare $y = y_i$.

Cum polinomul $F(x, y)$ aproximează în medie după variabila y funcția f dată prin sistemul $\{L_{n_i}(x, y_i)\}$, x considerîndu-se parametru, rezultă că pe intervalul $[y_0, y_s]$ eroarea este caracterizată de abaterea pătratică medie

$$\delta^2 = \sum_{i=0}^{s} [L_{n_i}(x, y_i) - F(x, y_i)]^2.$$

Polinomul de gradul s, $F(x, y)$, fiind determinat prin metoda celor mai mici pătrate, abaterea medie pătratică δ este minimă pentru valorile date $\{L_{n_i}(x, y_i)\}$ și pentru un grad dat s.

Catedra de matematici II
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Salvadori, M. G.*, Metode numerice în tehnică, Ed. Tehnică — 1972
2. *Cuculescu I.*, Analiza numerică, Ed. Tehnică — 1967
3. *Berezin, I. S. Jidkov N. P.*, Metode de calcul, Moscova 1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 093.2:532.135.667.622

STUDIU ASUPRA INTERDEPENDENȚEI DINTRE UMECTABILITATEA PIGMENȚILOR ȘI PROPRIETĂȚILE REOLOGICE ALE UNOR SISTEME DISPERSE PE BAZA DE GALBEN DE CROM*

TH. BĂDESCU, T. D. IONESCU

I

Introducere

În fabricarea lacurilor, vopselelor, emailurilor, cernelurilor poligrafice sau altor peliculogene pigmentate, gradul de umectare a pigmenților de către lianți prezintă un interes deosebit, atît pentru etapa de obținere a produselor de mai sus prin ampastare și frecarea pigmentului cu liantul pe mașinile de frecat cu valțuri, cît și în timpul utilizării lor. Proprietățile reologicé ale sistemelor disperse respective trebuie să se manifeste corect, fără ca pigmenții să prezinte tendința de dezumectare, menținîndu-se stabilitatea sistemului dispers. Participarea eventuală a unor substanțe tensioactive favorizează fenomenele în cauză.

Factorii cei mai importanți de care depinde umectarea unui pigment sînt forțele de natură electrostatică și cele intermoleculare van der Waals care apar în sistemul bifazic pigment-liant, forțe care depind, în afară de natura liantului, structura și proprietățile particulelor de pigment, precum și de dimensiunile lor [1].

Pentru studiul reologic, în lucrarea de față s-au utilizat cerneluri de tipar offset (înalt-vîscoase), pretențioase prin calitățile cerute.

Proprietățile reologice ale cernelurilor trebuie să prezinte valori bine determinate atît în procesele de fabricație cît și la utilizare, în scopul deplasării fără inconveniente a cernelii în mașina de imprimare în raport cu părțile în mișcare ale acesteia, cît și în vederea obținerii unui transfer optim al cernelii de pe elementele imprimatoare pe hîrtie [2].

Între transfer, densitate optică și culoarea imprimatelor se pot obține corelații, ceea ce confirmă rolul pigmentului în fenomenele menționate.

În lucrarea de față s-a utilizat un număr de cinci sortimente din pigmentul galben de crom. Stabilirea de relații cantitative între umec-

* Manuscris predat redacției la data de 13 octombrie 1971

tarea pigmenților și proprietățile reologice ale sistemelor disperse permite obținerea unor concluzii generalizatoare asupra eficienței și necesității practice a efectuării unui asemenea studiu în industrie.

II

Rezultate experimentale

S-au utilizat sortimentele de galben de crom de mai jos (corespunzătoare notațiilor 1—5 pe grafice), cu compozițiile indicate :

1. Galben de crom-lămîie ($5PbCrO_4.4PbSO_4$)
2. Galben de crom-mijlociu ($7PbCrO_4.8PbSO_4$)
3. Galben de crom-mijlociu ($8PbCrO_4.7PbSO_4$)
4. Galben de crom-auriu ($9PbCrO_4.7PbSO_4$)
5. Galben de crom-auriu ($10\ PbCrO_4.PbSO_4$).

Primii doi pigmenți au o structură cristalină rombică, iar ceilalți o structură cristalină monoclinică. Compoziția amestecurilor izomorfe de cromat și sulfat de plumb are un rol nesemnificativ în interacțiunea pigment-liant [3, 4].

Asupra pigmenților menționați s-au efectuat mai întîi următoarele determinări, în scopul obținerii valorilor referitoare la umectare : volumul de sedimentare în propanol, în raport cu timpul (fig. 1) ; influența adaosurilor de agent tensioactiv (Inipol) la suspensiile obținute, la diverse intervale de timp (fig. 2 — centralizatoare — pentru un timp constant, de 5 min.) ; volumul de umectare (fig. 3), obținut în urma adaptării la condițiile experimentale a aparaturii descrise de Schutte și von Stackelburg [5] ; variația gradului de frecare (obținut cu ajutorul grindometrului)

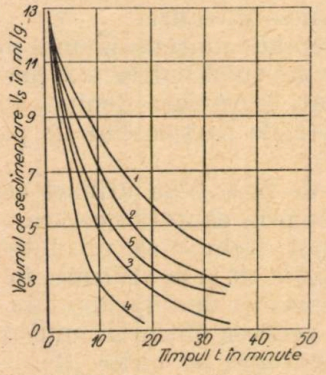


Fig. 1

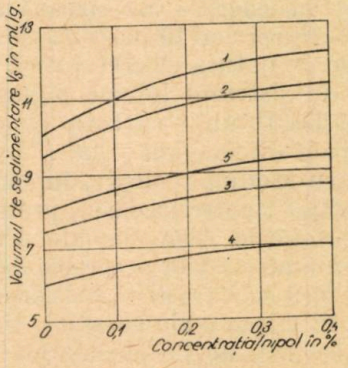


Fig. 2

al pigmentului, dispersat într-un liant pe bază de rășini alchidice și fenolice dizolvate într-un amestec de uleiuri, fără adaos (fig. 4) și cu adaos (fig. 5) de substanță tensioactivă (0,4% Inipol).

Din diagramele prezentate, se observă că stabilitatea dispersiilor crește cu finețea pigmentului și că structurile rombice sînt cele mai bine

umectate. Acțiunea agentului tensioactiv este de asemenea mai însemnată în cazul sortimentelor cu particule fine, ceea ce indică faptul că, în afară de micșorarea tensiunii superficiale a mediului de dispersie, se exercită și o acțiune directă asupra pigmentului: agentul tensioactiv conferă pigmentului o sarcină de același semn datorită stratului monomolecular

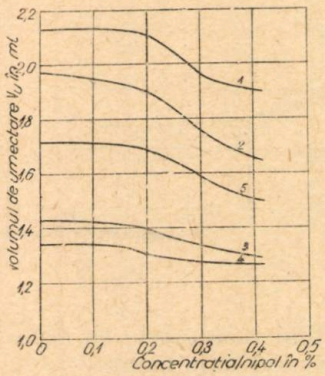


Fig. 3

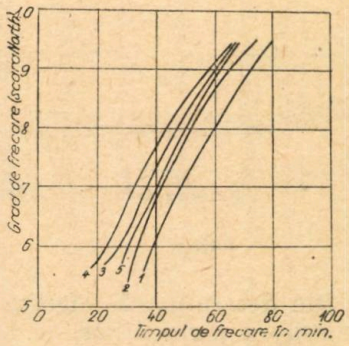


Fig. 4

pe care îl formează pe suprafața lui, suprafața exterioară a membranei formate fiind legată rezistent de moleculele mediului de dispersie în urma atracției intermoleculare. Microporozitatea suprafeței, mai accentuată la particulele fine, contribue de asemenea la fenomenele de umectare.

Creșterea finеței particulelor de pigment mărește timpul de frecare, în urma adsorbției unei cantități mai ridicate de liant, ceea ce conduce la micșorarea cantității de fază fluidă liberă a agentului de dispersiune odată cu creșterea viscozității cernelii, și implicit, a dificultăților de frecare. Adaosul de substanță tensioactivă îmbunătățește frecarea (timpul de frecare se micșorează), datorită creșterii fluidității cernelurilor, în urma micșorării coeziunii dintre moleculele mediului de dispersie, pe care o determină, împiedicînd aglomerarea particulelor de pigment.

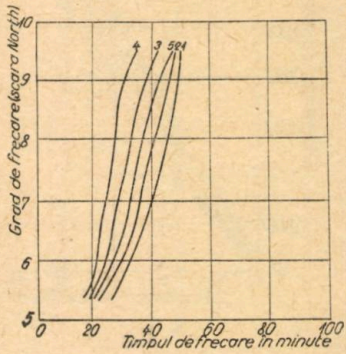


Fig. 5

Determinările reologice au urmărit stabilirea corelațiilor propuse, utilizîndu-se aceiași pigmenți, care au fost dispersați într-un liant adecvat procedeului de tipar offset, la două concentrații diferite (21,3% și 35%). La ultima concentrație, tipică pentru procedeul de mai sus, s-au folosit toate cele cinci sortimente de galben de crom.

Rezultatele determinărilor sînt date în diagramele comparative de mai jos, respectiv: curbele de viscozitate ale cernelurilor, la cele două concentrații, obținute cu ajutorul viscozimetrului rotativ Rotovisko

(fig. 6 și fig. 7); curbele de histerezis ale cernelurilor, obținute cu același aparat (fig. 8 și fig. 9); curbele de adezivitate (lipiciozitate) ale celor două seri de cerneluri, obținute cu tackmetrul PATRA, respectiv, funcțiile tack-viteză și tack-timp (fig. 10 și fig. 11).

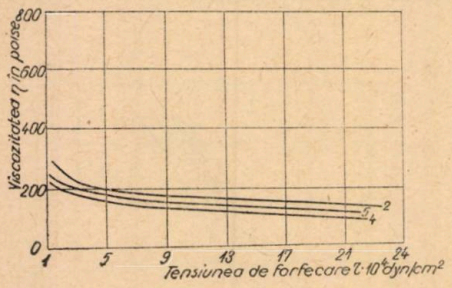


Fig. 6

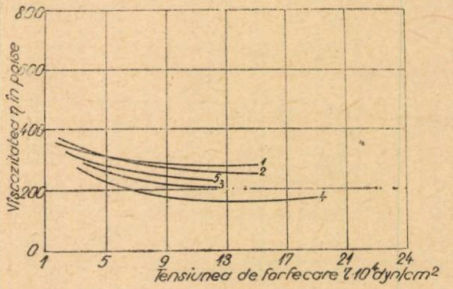


Fig. 7

Din determinările efectuate, și corelînd rezultatele cu studiile efectuate asupra pigmenților, se confirmă în mod suplimentar :

— rolul fineței și concentrației în pigment asupra posibilităților de caracterizare a sistemului plastico-viscos, aceasta obținînd asemănări

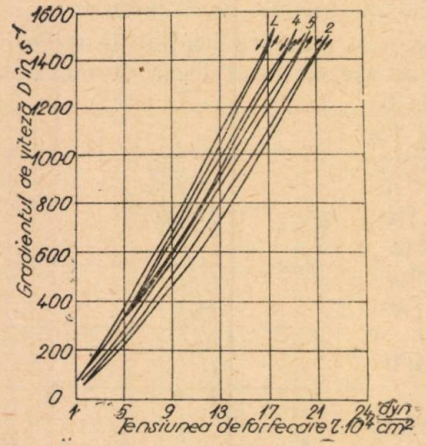


Fig. 8

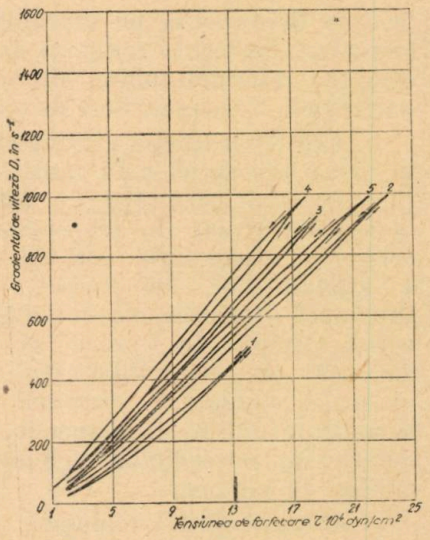


Fig. 9

mai accentuate cu un corp solid, odată cu creșterea fineței și concentrației în pigment;

— obținerea unor valori reduse pentru tixotropia cernelurilor fabricate cu galben de crom, chiar la concentrații în pigment ridicate, ceea ce reprezintă un aspect pozitiv, cu avantaje în utilizarea acestor cerneluri ;

— nu se poate observa o corelare riguroasă între rigiditatea structurală (exprimată prin tensiunea de forfecare) și viscozitate ;

— nu se observă, de asemenea, o corelare riguroasă între viscozitate și adezivitatea cernelurilor, aceasta din urmă depinzînd și de forțele de coeziune dintre componenții cernelii, ceea ce se reflectă și în pierderea regularității în ordinea pigmenților (menținută la determinările prece-

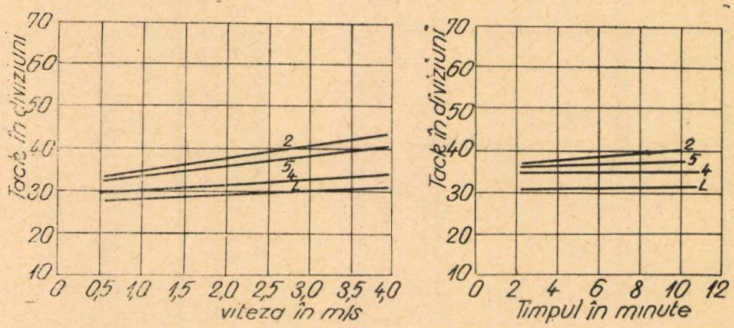


Fig. 10

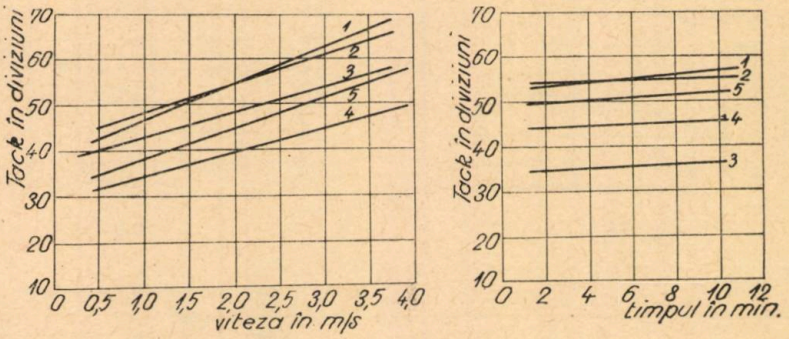


Fig. 11

dente) la încercările de adezivitate (panta tack-urilor) la cernelurile mai concentrate, cu proprietăți ce se apropie mai mult de cele ale unui corp solid ;

— substanțele tensioactive pot regla, în unele cazuri, viscozitatea și adezivitatea cernelii, fără a modifica în mod esențial rețeta de fabricație.

Confirmarea rezultatelor studiului reologic s-a urmărit, în continuare, prin comportarea cernelurilor la utilizare. În acest scop s-a folosit presa de laborator I.G.T. [6, 7], obținîndu-se imprimate cu cele două serii de cerneluri cu concentratii diferite în pigment.

S-au trasat curbele de repartitie $V = f(x)$ (fig. 12 și fig. 13), precum și cele de densitate optică $D_0 = f(y)$ (fig. 14 și fig. 15), obținute prin folosirea densitometrului Baldwin. În urmă, probele au fost spectrofotometrate cu ajutorul aparatului prin reflexie Beckman DU și s-au trasat curbele de remisie ale cernelurilor offset corespunzătoare concentrației de 35% pigment în cerneală (fig. 16) la densitatea optică cea mai ridicată (pe hîrtie cretată etalon). Reprezentarea punctelor culorilor respective în

diagrama colorimetrică CIE (fig. 17), s-a făcut în urma calculelor, aplicîndu-se metoda ordonatelor alese [8].

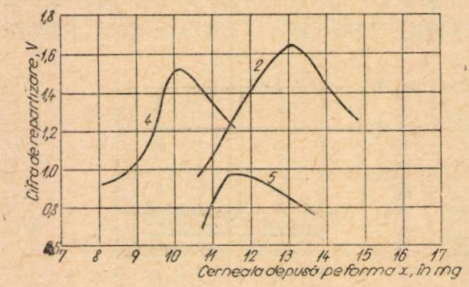


Fig. 12

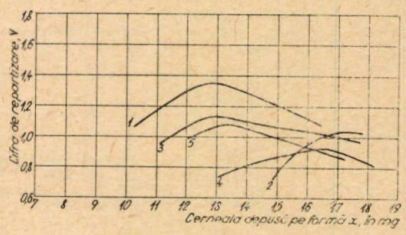


Fig. 13

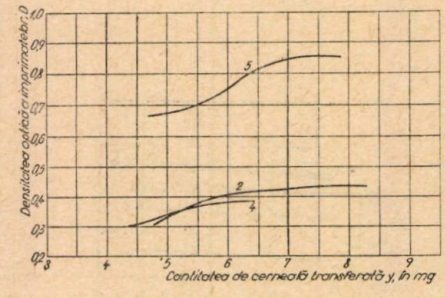


Fig. 14

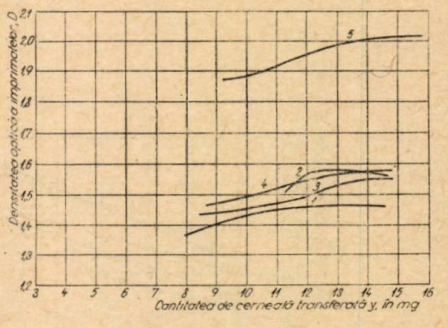


Fig. 15

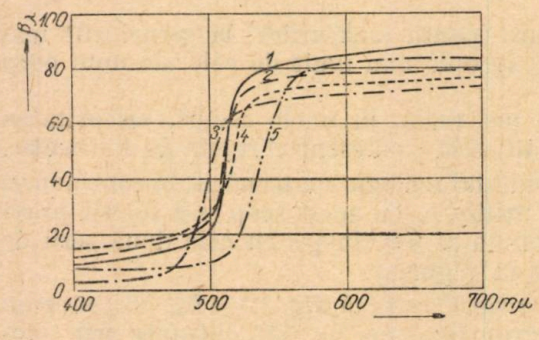


Fig. 16

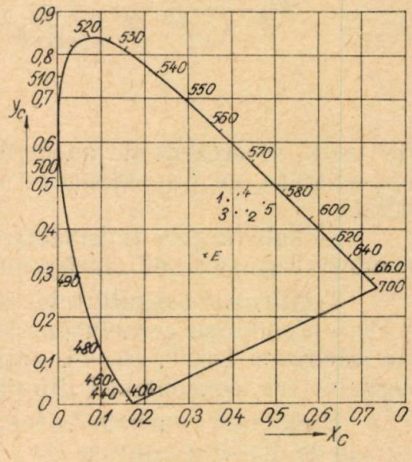


Fig. 17

Din diagramele de repartiţie (transfer), se observă că, odată cu creşterea cantităţii de pigment în cerneală, transferul scade (în urma creşterii sensibile a viscozităţii cernelurilor).

În raport cu granulaţia pigmenţilor transferul prezintă unele neregularităţi, datorită complexităţii fenomenelor fizico-chimice care pot avea loc. Respectiv, odată cu creşterea conţinutului în pigment, sistemul plastico-viscos obţine din ce în ce mai mult caracteristicile unui corp solid : proprietăţile plastice se accentuează în detrimentul celor viscoase iar proprietăţile reologice ale sistemului se abat din ce în ce mai net de la proprietăţile lichidelor. Astfel, la concentraţia de 21,3% pigment în cerneluri, transferul urmează destul de consecvent ordinea descrescătoare a viscozităţii ,el fiind mai redus la cernelurile cu pigmenţi mai fini, datorită creşterii viscozităţii sistemului. La concentraţia de 35% pigment în cerneală nu se mai observă această regularitate iar pentru probele 1 şi 2 apar valori relativ ridicate ale transferului. Acest fenomen îl atribuim sistemului de cristalizare (respectiv formei particulelor), ambii pigmenţi fiind fin granulaţi, cristalizaţi rombic. Ceilalţi trei pigmenţi au o structură monoclinică afînată ceea ce, la o concentraţie mai ridicată în pigment, conduce la ocuparea unui volum mai mare în cerneală. Totodată, forma aciculară a particulelor jenează deplasarea cantităţii libere de vehicul, neadsorbită de particule, care asigură transferul cernelii.

Dacă se iau în consideraţie toţi factorii care contribuie la transferul cernelii de tipar pe hîrtie, concluziile asupra acestui fenomen complex trebuie să fie trase atît din comportarea reologică a cernelii, cît şi din interpretările care rezultă în urma aprecierii rolului hîrtiei şi maşinii de imprimare. Respectiv, este necesar să se aprecieze rolul raportului dintre dimensiunile, forma şi numărul porilor din hîrtie şi comportarea cernelii (determinată, după cum s-a văzut, de fineţea, forma sau concentraţia particulelor de pigment). De asemenea, de antrenarea în mod dinamic a unor variaţii în proprietăţile hîrtiei şi cernelii, în cadrul unor parametri tehnologici ai proceselor de imprimare.

În ceea ce priveşte densitatea optică a imprimatelor obţinute, se observă că această caracteristică depinde atît de modul în care s-a realizat transferul, cît şi de concentraţia şi dimensiunile particulelor de pigment, precum şi de caracteristicile lor de culoare. În practica imprimării poligrafice, pentru fiecare culoare se preconizează o anumită densitate optică, valoare la care se poate ajunge prin îmbunătăţirea transferului sau prin mărirea concentraţiei în pigment.

În sfîrşit, măsurătorile de culoare permit o eventuală comparare a nuanţelor obţinute pe sortimentul de hîrtie respectiv şi în condiţiile arătate, cu nuanţa pigmenţilor nedispersaţi în liant. Cu această ocazie se poate aprecia oportunitatea concentraţiilor în pigment utilizate sau alegerea liantului.

III

Concluzii

Datorită faptului că sistemele disperse pe bază de pigmenţi au o interfaţă apreciabilă, care implică lipsa independenţei componenţilor, o serie de proprietăţi ale pigmenţilor determină comportarea reologică a sistemelor plastico-viscoase în care participă. În această comportare

structurile fizice ale pigmenţilor joacă un rol deosebit, datorită joncţiunilor cu mediul de dispersie. Participarea agenţilor tensioactivi contribuie la atracţia intermoleculară dintre pigment şi mediul de dispersie, modificînd sensibil comportamentul reologic al sistemului dispers.

Studiile corelative : umectabilitate-reologie, şi mai departe, transfer-densitate optică-culoare, efectuate asupra cernelurilor de tipar, permit aprecierea exactă a rolului pigmentului, aflarea concentraţiilor şi dimensiunilor optime ale particulelor, care corespund, din punct de vedere economic şi calitativ, tehnologiilor specifice de fabricare şi utilizare a peliculogenelor pigmentate respective. În consecinţă, posibilitatea stabilirii unor reţete economice pentru acestea şi totuşi la o eficacitate maximă, impusă de exigenţa realizării nuanţei dorite şi a unei densităţi optice suficiente pe imprimate.

Catedra de tehnologia substanţelor anorganice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Moyec G.* de, Peintures, pigments, vernis, 2, 70 şi 3, 140 (1961).
2. *Bădescu Th.*, Materiale poligrafice. Ed. did. şi ped., Buc., 1967, pag. 458—468.
3. *Belenkii, R. F., Rischin, I. V.*, Himia i thenologhiia pigmentov, Moskva, 1960, pag. 307—345
4. *Payne, H. E.*, Organic Coating Technology, vol. II—Pigments and Pigment ed Coatings. John Wiley—Sons Inc., New—York—London, 1963.
5. *Schutte, H.*, Paste und Kautschuk, 7, 374 (1960).
6. *Lorilleux, Ch.*, L'étude des relations encre-papier en typo et en offset. E. Desfossés-Néogravure. Paris.
7. *Holszky, B.*, Relaţiile dintre cerneală şi hîrtie în procesul de imprimare. Lab. central de cercetări pentru lacuri şi cerneluri, Buc., 1967, pag. 16—18.
8. *STAS 6880—63*, Metoda spectrală pentru determinarea coordonatelor tricromatice ale culorilor cu ajutorul ordonatelor alese.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

C.Z.:547.942

METODE DE DETERMINARE PENTRU CHININĂ ȘI CHINIDINĂ*

Spectrele în vizibil și infraroșu ale compusului obținut dintre chinină și reineckatul de amoniu.

GRIGORE TEODORESCU

Chinina (alcaloidul principal cunoscut din coaja arborelui de chinină) este după cum se știe, medicamentul care, pe lîngă utilizarea sa ca antimalaric, are și un efect antiseptic general determinat de acțiunea ei directă asupra centrului nervos regulator al temperaturii corpului. Ea conține în moleculă, între altele, un rest chinolinic cu o grupă metoxil în poziția 6 și un rest biciclic nearomatic, de un tip înrudit cu piperidina.

Chinina este însoțită în coaja arborelui și de alți alcaloizi, printre care se află și stereoizomerul său chinidina (stereoizomeria fiind dată de poziția grupei R—CH(OH)⁻ în forma *cis* sau *trans*).

La ambii alcaloizi, chinină sau chinidină, se cunosc mai multe tipuri de produse comercializate, sub formă de sare (sulfat, bisulfat, clorhidrat, diclorhidrat), care diferă între ele prin faptul că au sub formă cationizată (tetracovalentă) numai atomul de azot al restului biciclic nearomatic sau și azotul chinolinic.

Se disting următoarele tipuri:

bisulfat de chinică $[C_{20}H_{26}O_2N_2]^{2+}SO_4^{2-}\cdot 7H_2O$;

sulfat de chinină $[C_{20}H_{25}O_2N_2]_2^{+}SO_4^{2-}\cdot 2H_2O$;

clorhidrat de chinină $[C_{20}H_{25}O_2N_2]^{+}Cl^{-}\cdot 2H_2O$;

bromhidrat de chinină $[C_{20}H_{25}O_2N_2]^{+}Br^{-}H_2O$;

dichlorihidrat de chinină $[C_{20}H_{24}O_2N_2]^{2+}2Cl^{-}$;

sulfat de chinidină $[C_{20}H_{25}O_2N_2]_2^{+}SO_4^{2-}\cdot 2H_2O$.

Pentru determinarea alcaloizilor în literatura de specialitate sînt indicate metode volumetrice, gravimetrice și cromatografice [1...6].

Metoda uzuală de determinare folosită pentru substanțele farmaceutice constă în titrarea alcalimetrică (în amestec de alcool și cloroform) a substanței pure aflată sub formă de sare (clorhidrat, sulfat etc.). Această

Manuscris predat redacție la data de 10 mai 1971

metodă nu poate fi folosită la determinarea unei substanţe impurificată cu acid mineral sau săruri anorganice, ca de exemplu cea rezultată din circuitul fabricaţiei.

Pentru motivul arătat am considerat utilă punerea la punct a metodei de determinare a chininei (prescurtat CHI) sau a chinidinei (prescurtat CHID) sub formă de sare (clorhidrat, sulfat etc.), prin complexarea ionului de *oniu* al azotului de la restul biciclic nearomatic sau al acestuia şi al celui chinolinic cu reineckat de amoniu (prescurtat $Rc^-NH_4^+$) reactiv folosit de noi şi la determinarea altor substanţe [7...16].

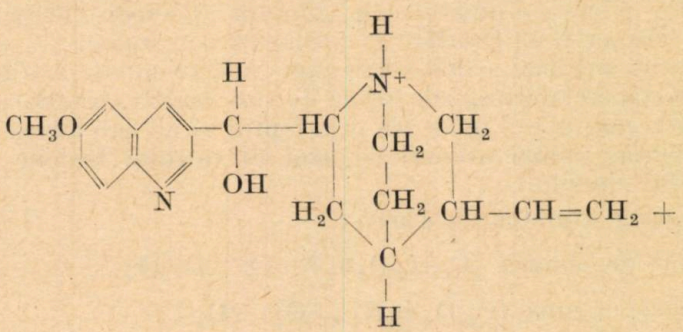
În cazul în care substanţa există sub formă monocationizată (CHI ca sulfat, bromhidrat sau clorhidrat şi CHID ca sulfat) complexarea are loc, în soluţie apoasă neacidulată, în raportul molar CHI (sau CHID) : $Rc^-NH_4^+$ egal cu 1 : 1.

În cazul în care substanţa se află sub formă dicationizată (CHI ca bisulfat sau diclorhidrat) determinarea se face în soluţie apoasă sau apoasă-acidulată, complexarea avînd loc în raportul molar CHI (sau CHID) : $Rc^-NH_4^+$ egal cu 1 : 2.

Insolubilitatea în apă şi solubilitatea accentuată în acetonă a complexului format din CHI (sau CHID) şi $Rc^-NH_4^+$, permit aplicarea acestei metode de determinare.

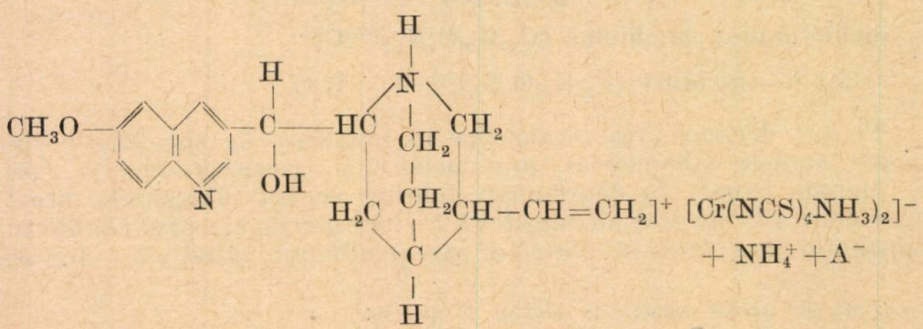
1. Principiul metodei

Reacţia de combinare în soluţie apoasă neacidulată, pentru sărurile monocationizate are loc după schema (A^- = anion acid) :



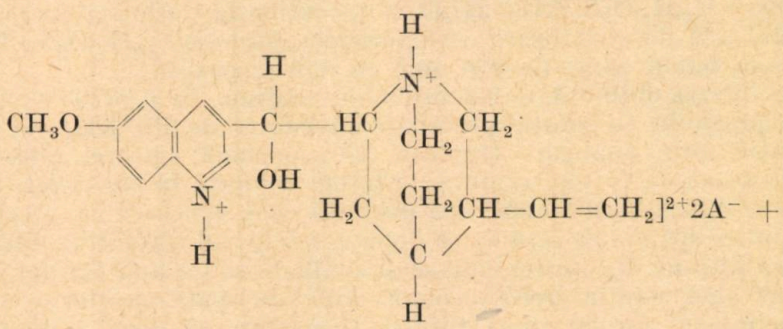
$$+ NH_4^+[Cr(NCS)_4(NH_3)_2]^- \longrightarrow$$

CHI (sulfat, clorhidrant, brnmh'drant sau CHID (sulfat)

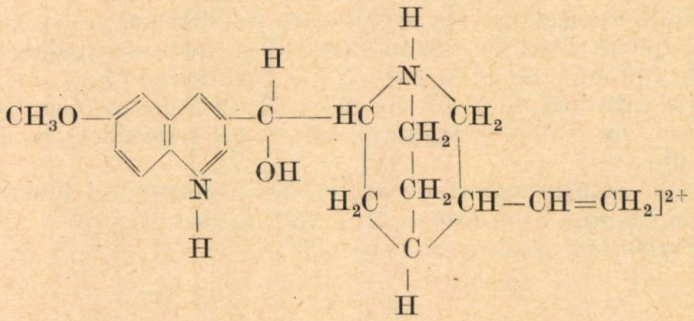


$$+ NH_4^+ + A^-$$

Sărurile rezultate din sinteză sub forma dicationizată, sau cele monocationizate în soluția apoasă acidulată, se complexează după schema :



$$+\ 2\,NH_4^+[Cr(NCS)_4(NH_3)_2] \longrightarrow$$



$$[Cr(NCS)_4(NH_3)_2]_2^- + {}_2NH_4^+ + 2A^-$$

Reacția de combinare cu $Rc^-NH_4^+$ a fost folosită la determinarea CHI și CHID prin metodele : volumetrică, colorimetrică și spectrală.

2. Metoda volumetrică

Se dizolvă sarea chininei sau a chinidinei în apă distilată. Se precipită cu $Rc^-NH_4^-$ de 2,5 % concentrație. Precipitatul cristalin format de culoare roz pal, se filtrează, se spală și se dizolvă în acetonă.

Soluția rezultată prin dizolvarea compusului în acetonă, se tratează cu exces de soluție de azotat de argint, cînd precipită reineckatul de argint conform ecuației :

$$[Cr(NCS)_4(NH_3)_2]^- + Ag^+ \rightarrow Ag[Cr(NCS)_4(NH_3)_2]$$

După filtrarea și spălarea acestuia se titrează excesul de azotat de argint cu tiocianat de amoniu în prezența alaunului de Fe(III) și amoniu, indicator.

2.1. *Determinarea clorhidratului de chinină*

Se cîntăresc 2,1995 g clorhidrat de chinină (produs farmaceutic) cu formula : $C_{20}H_{24}O_2N_2 \cdot HCl \cdot 2H_2O$, care conţine 2g clorhidrat de chinină 100 % (fără apă de cristalizare corespunzător, formulei $C_{20}H_{24}O_2N_2 \cdot HCL$). Se aduce la balon cotat de 250 cm³ cu apă distilată.

Din soluţia obţinută se iau probe cu conţinut de 0,0320—0,0960 g CHI şi se precipită cu soluţie proaspătă preparată de $Rc^-NH_4^+$ de 2,5 % concentraţie, prin adăugare treptată sub continuă agitare, pînă cînd soluţia de deasupra precipitatului este intens colorată în roş-violet. După 5 minute se diluează cu 25 cm³ apă distilată cînd se separă un precipitat afînat uşor de spălat. Se lasă să se depună compusul format, se filtrează pe creuzet filtrant G_3, antrenîndu-se şi spălîndu-se cu apă distilată rece (4° C) pînă cînd soluţia trece incoloră. Final se spală cu eter.

Precipitatul format după filtrare şi spălare, se dizolvă direct pe creuzetul filtrant cu 10—20 cm³ acetonă şi se spală cu 10—15 cm³ apă, prinzînd totul în pahar de 250 cm³. Se diluează cu circa 100 cm³ apă distilată se adaugă 1 cm³ acid azotic concentrat şi 10 cm³ azotat de argint 0,1 n. Precipită reineckatul de argint care se filtrează, se spală prin decantare, cu apă distilată, prinzînd filtratul şi apele de spălare în flacon de titrare de 750 cm³. Se adaugă 4—5 picături de acid azotic concentrat, 2 cm³ soluţie saturată de alaun de fier (III) şi amoniu (cca. 40 %) şi se titrează excesul de azotat de argint cu soluţie 0,1 n de tiocianat de amoniu cu factor cunoscut.

La 1 cm³ soluţie azotat de argint 0,1 n corespund 0,03609 grame clorhidrat de chinină (considerat fără apă de cristalizare).

Rezultatele sînt redate în tabela I.

Tabela I

CHI în probă	$AgNO_3$ la precipitare F 0,1n = 1,0000	NH_4SCN F 0,1n = = 0,9900	$AgNO_3$ reacţionat	CHI 100 % determinat cu $Rc^-NH_4^+$	CHI 100 % determinat cu $Rc^-NH_4^+$	CHI 100 % prin alcalimetrie.
g	cm³	cm³	cm³	g	%	%
1	2	3	4	5	6	7
0,0320	10	9,12	0,88	0,0318	99,37	99...100
0,0400	„	8,90	1,10	0,0397	99,25	„
0,0480	„	8,68	1,32	0,0476	99,17	„
0,0560	„	8,45	1,55	0,0559	99,82	„
0,0640	„	8,23	1,77	0,0639	99,84	„
0,0720	„	8,01	1,99	0,0718	99,72	„
0,0800	„	7,79	2,21	0,0798	99,75	„
0,0880	„	7,57	2,43	0,0877	99,65	„
0,0960	„	7,35	2,65	0,0956	99,58	„

Pentru cazul complexării aceluiaş produs în soluţie apoasă diluată acidulată cu cca 2 % acid mineral, s-a constatat că este necesar raportul molar CHI : $Rc^-NH_4^+$ de 1 : 2. În tabela II se prezintă încercările făcute în aceste condiţii.

La 1 cm³ azotat de argint 0,1 n corespund 0,03609/2 clorhidrat de chinină (considerat fără apă de cristalizare).

Tabela II

CHI în probă	$AgNO_3$ la precipitare Fo, 1 n = 1,0000	NH_4SCN Fo, 1n = 0,9900	$AgNO_3$ reacţionat	CHI 100% determinat cu $Rc^-NH_4^+$	CHI 100% determinat cu $Rc^-NH_4^+$
g	cm³	cm³	cm³	g	%
1	2	3	4	5	6
0,0230	10	8,24	1,76	0,0317	99,06
0,0400	10	7,80	2,20	0,0396	99,00
0,0480	10	7,35	2,65	0,0477	99,37
0,0560	10	6,90	3,10	0,0558	99,64
0,0640	10	6,45	3,55	0,0639	98,84
0,0720	10	6,00	4,00	0,0720	100
0,0800	10	5,58	4,42	0,0796	99,50
0,0880	10	5,14	4,86	0,0875	99,43

2.2. *Determinarea sulfatului de chinidină.*

Această determinare s-a efectuat în soluţie apoasă de acid sulfuric în care complexarea are loc în raportul molar CHID : $Rc^-NH_4^-$ de 1 : 2.

Modul de lucru a decurs în principiu ca la determinarea clorhidratului de chinină.

Se cîntăresc 1,1055 g sulfat de chinidină de 99,5% puritate, produs farmaceutic cu formula $(C_{20}H_{24}O_2N_2)_2 \cdot H_2SO_4 \cdot 2H_2O$, care conţine 1,1 g sulfat de chinidină 100%. Se aduce la balon cotat de 250 cm³ cu soluţie apoasă de acid sulfuric de 1% concentraţie. Soluţia obţinută conţine 0,0044 g sulfat de chinidină 100% per 1 cm³.

Se iau probe de 0,0264—0,0968 g CHID, se adaugă la fiecare cîte 10 cm³ acid sulfuric 35% şi se precipită cu $Rc^-NH_4^+$ 2,5% concentraţie prin adăugare, treptată, sub continuă agitare, pînă cînd soluţia de deasupra precipitatului este intens colorată în roş-violet. După cîteva minute se diluiază cu apă distilată la volum dublu. Se lasă să se depună complexul format, se filtrează pe creuzet G_3, antrenîndu-se şi spălîndu-se cu apă distilată rece (4° C) pînă ce soluţia trece incoloră. Final se spală cu eter.

Precipitatul format de culoare roz pal, după filtrare şi spălare se dizolvă direct pe creuzetul filtrant cu 10—20 cm³ acetonă şi se spală cu 20—25 cm³ apă distilată prinzînd totul în pahar de 250 cm³. Se diluează cu circa 100 cm³ apă distilată, se adaugă 1 cm³ acid azotic concentrat şi 10 cm³ azotat de argint 0,1 n. Precipită reineckatul de argint, care se filtrează, se spală prin decantare, cu apă distilată, prinzînd filtratul şi apele de spălare în flacon de titrare de 750 cm³. Se adaugă 5—10 picături acid azotic concentrat şi 3 cm³ soluţie saturată de alaun de fier (III) şi amoniu (cca 40%).

Se titrează excesul de azotat de argint cu soluţie 0,1 n de tiocianat de amoniu.

La 1 cm³ soluţie de azotat de argint 0,1 n corespund 0,07829/4 grame sulfat de chinidină.

Rezultatele sînt redate în tabela III.

Tabela III

CHID sulfat în probă	$AgNO_3$ la precipitare F 0,1n = 1,0000	NH_4SCN F 0,1n = 1,0526	$AgNO_3$ reacţionat	CHID sulfat 100% determinat cu $Rc^-NH_4^+$	CHID sulfat 100% determinat cu $Rc^-NH_4^+$	CHID sulfat 100% prin alcalometrie
g	cm³	cm³	cm³	g	%	%
0,0264	10	8,66	1,34	0,0262	99,24	99—100
0,0352	10	8,21	1,79	0,0350	99,43	,,
0,0440	10	7,76	2,24	0,0438	99,54	,,
0,0528	10	7,31	2,69	0,0526	99,62	,,
0,0616	10	6,87	3,13	0,0613	99,51	,,
0,0704	10	6,43	3,57	0,0699	99,38	,,
0,0792	10	5,97	4,03	0,0789	99,62	,,
0,0880	10	5,50	4,50	0,0880	100	,,
0,0968	10	5,06	4,94	0,0967	99,89	,,

3. *Metoda colorimetrică.* Se precipită chinina cu $Rc^-NH_4^+$ după acelaş procedeu ca la metoda volumetrică în raportul molar 1 : 1. Întrucît compusul format este solubil în acetonă, formînd soluţie colorată în roşu, chinina se poate determina şi colorimetric.

3.1. *Modul de lucru.* Se lucrează prin metoda curbelor etalon folosind soluţie de $Rc^-NH_4^+$ cu T = 0,0560 g per cm³ din care s-a luat volume anumite, în baloane cotate de 100 cm³, sau diluat cu 50 cm³ acetonă şi s-au adus la semn cu apă distilată în aşa fel pentru a se obţine soluţii care conţin T = 0,000280 ; 0,000560 ; 0,000840 ; 0,00112 ; 0,00168 g.

După omogenizarea soluţiilor se fac citirile la fotocolorimetrul tip B. Lange folosind filtre verzi (λ = 533 nm) ; şi se trasează curba etalon.

Din soluţia de chinină cu T = 0,00800 g/cm³ se iau probe cu conţinut între 0,0280—0,0720 g şi se precipită cu $Rc^-NH_4^+$ conform metodei volumetrice. După filtrare şi spălare probele se dizolvă în acetonă, prinzînd soluţia în baloane cotate de 100 cm³ care se aduc la semn cu apă distilată. După omogenizare s-au colorimetrat şi s-au obţinut rezultate indicate în tabela IV.

Tabela IV

chinina în probă g/cm³	chinina determinată colorimetric g/cm³	Eroare %
0,000280	0,000283	+ 1,07
0,000320	0,000318	— 0,62
0,000400	0,000396	— 1,00
0,000480	0,000484	+ 0,83
0,000560	0,000554	— 1,07
0,000720	0,000724	+ 0,55

4. Studiul spectral

4.1. *Caracterizare a spectrului în vizibil a direineckatului de chinină.* Structura compusului obţinut în modul arătat anterior dintre CHI şi Rc⁻ NH_4^+, se poate preciza prin determinarea masei moleculare a acestuia cu ajutorul absorbanţei (A) şi a absorbitivităţii (K) ale spectrelor în vizibil.

O caracteristică comună a spectrelor în vizibil, pentru Rc⁻ NH_4^+ şi pentru direineckatul chininei rezidă din faptul că maximum de absorpţie (λ_{max}) este aproximativ acelaşi şi anume $\lambda_{max} = 520-530$ nm (diagrama 1) pentru Rc⁻ NH_4^+ (în etanol 95 %) şi $\lambda_{max} = 530$ nm (diagrama 2) pentru direineckatul de chinină (de asemeni în etanol 95 %).

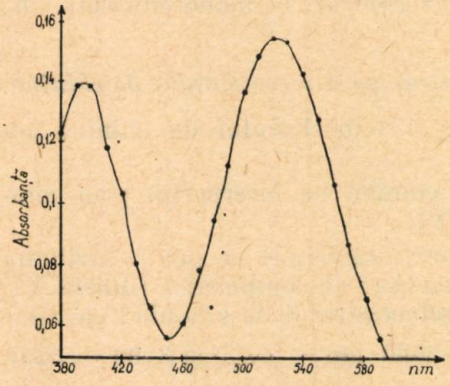


Fig. 1

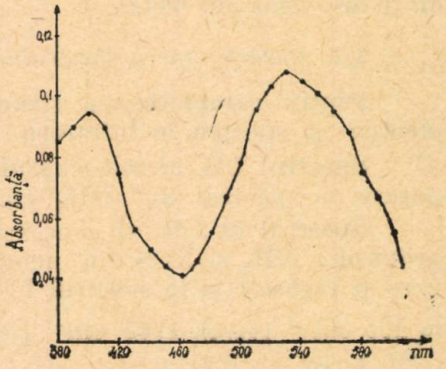


Fig. 2

Determinarea absorbitivităţii (K) s-a făcut conform relaţiei de mai jos, pe Rc⁻ NH_4^+ în etanol 95 %, la concentraţia $c = 0{,}00297$ mol gram Rc⁻ NH_4^+, la lungimea cuvei $l = 0{,}5$ cm şi pentru absorbanta $A = 0{,}154$ citită pe diagrama (1) şi corespunzătoare valorii $\lambda_{max} = 520-525$ nm. Dat fiind că s-a lucrat cu $l = 0{,}5$ cm, pentru $l = 1$ cm valoarea A se dublează.

$$K = \frac{2 \times 0{,}154}{0{,}00297} = 103{,}7.$$

Valoarea K determinată pentru Rc⁻ NH_4^+ se poate considera în limitele erorile acceptabile, ca fiind valabilă şi pentru direineckatul de chinină, dat fiind că λ_{max} pentru direineckatul de chiniă este egal (sau aproape egal) cu λ_{max} pentru R⁻ NH_4^+ (diagranele 1 şi 2).

Pentru determinarea masei moleculare M_d se foloseşte relaţia :

$$M_d = \frac{g_1}{100} \cdot \frac{K}{A} l \cdot 1000. \qquad (1)$$

Dat fiind că s-a lucrat cu $g_1 = 0{,}1$ g direineckat de CHI per 100 cm³ şi cu $l = 1$ cm, relaţia (1) devine :

$$M_d = \frac{K}{A} \cdot \qquad (2)$$

Practic, se face determinarea în etanol 95 % a absorbției în vizibil a direineckatului de CHI deci a valorii lui A la $\lambda_{max} = 530$ nm care este de 0,108.

Se înlocuiește K în relația (2) cu valoarea determinată pentru $Rc^- NH_4^+$ și se determină astfel masa mloeculară M_d.

$$M_d = \frac{103,7}{0,108} = 960.$$

Masa moleculară rezultată din calculul pentru acest compus (M_c) este de 962. Apropierea dintre cele două valori arată că sînt complexați ambii atomi de azot cel piridinic și cel cicloalifatic și deci structura compusului este de tipul direineckat. În caz contrar, la monoreineckat, M_c ar fi fost egal cu 644,2.

4.2. *Caracterizarea spectrului în infraroșu a reineckatului de chinină.*

Pentru caracterizarea structurală a reineckatului de chinină s-a efectuat și spectru în infraroșu.

Spectrul I.R. al reineckatului de chinină s-a interpertat prin comparare cu spectrul $Rc^- NH_4^+$ (tabela V).

Spectrul în I.R. al compusului prezintă bande ce pot fi atribuite grupărilor NH_3 și NCS din anionul reineckat al compusului (tabela VI) care se regăsesc și în spectrul I.R. al reineckatului de amoniu; ele apar la 495 cm^{-1} (δ_{NCS}), 1265 cm^{-1} ($\delta^{sim}_{NH_3}$), 2090 cm^{-1} (ν_{CN}) și 3160 — 3290 ($\nu^{sim}_{NH_3}$). El prezintă de asemeni și bandele corespunzătoare bazei organice (tabela VI). Aceste bande existente la 625 cm^{-1}, 1050 cm^{-1}, 1525 cm^{-1}, 1630 cm^{-1}, 2850 cm^{-1} apar și în spectrul compusului și sînt foarte puțin modificate ca poziție și intensitate.

Tabela V

Spectrul IR al reineckatului de amoniu

$\bar{\nu}(cm^{-1})$		$T\%$
472 (*s*)	δ_{NCS}	62
509 (*s*)		57
718 (*i*)	NH_3	39
833 (*s*)	ν_{C-S}	76
965		76
1265 (*i*)	$\delta^{sim}_{NH_3}$	34
1405 (*i*)	δNH_4^+	32
1605	(H_2O)	50
2059	ν_{C-N}	14
2125 (*i*)		1
3015 (*f.s*)		38
3160 (*s*)		30
3195 (*f.s*)	ν_{NH_3}	32
3238 (*s*)		28
3315 (*s*)		27

Tabela VI

Bandele spectrale I.R. ale sulfatului de chinină şi ale complexului respectiv

Baza liberă		Complexul	
$\bar{\nu}$ (cm^{-1})	T%	$\bar{\nu}$ (cm^{-1})	T%
442 (*s*)	79		
465 (*s*)	75	495 (*m*)	58
525 (*s*)	68		
562 (*s*)	64	535 (*s*)	70
587 (*s*)	60		
610 (*s*)	60	625 (*s*)	73
630 (*s*)	54		
643 (*s*)	60	650 (*s*)	64
680 (*s*)	70	695 (*s*)	54
720 (*m*)	62	720 (*s*)	56
770 (*s*)	76		
805 (*s*)	70	810 (*s*)	78
835 (*s*)	60	835 (*s*)	63
870 (*i*)	54	865 (*s*)	65
940 (*i*)	55	930 (*m*)	67
1054 (*i*)	28	1000 (*f.s*)	73
1105 (*i*)	28	1050 (*m*)	67
1235 (*i*)	33	1180 (*m*)	66
1250 (*i*)	35	1265 (*i*)	36
1320 (*s*)	64	1320 (*s*)	68
1365 (*m*)	60	1350 (*s*)	70
1437 (*i*)	50	1365 (*s*)	71
1480 (*i*)	48	1470 (*m*)	60
1520 (*i*)	47	1525 (*i*)	50
1600 (*m*)	67		
1630 (*i*)	45	1630 (*i*)	53
		2090 (*f.i*)	1
2880 (*s*)	56		
2960 (*s*)	50	2970 (*s*)	54
		3030 (*f.s*)	56
3050 (*f.s.*)	54		
3065 (*f.s.*)	51	3160 (*m*)	46
		3240 (*m*)	46
		3290 (*m*)	45
3350 (*f.s*)	46		

Laboratorul de chimie anorganică şi analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Spacu P., Iancu C.* Analele Univ. C. I. Parhon, 20, 63 (1958) ; chem. Zbl. 35, 11769, (1966).
2. *Poethke W., Trabert H.*, Pharm. Zentralhalle, 94, 219, 432 (1955).
3. *Kosiacova*, S. A. J. anal. Himi, 2, 22 (1947).
4. *Vanickova E.*, Ceskoslov. farm, 5, 277 (1956).
5. *Schulek, E. Kovacs, J*, Z. anal. chem. 121, 21 (1941).
6. *Köszegi D., Salgö E.*, Pharn. Zentralhalle, 92, 157 (1953).

7. *Spacu P.*, Teodorescu Gr. Rev. de chimie vol. 8, nr. 1, 41 (1957).
8. *Teodorescu Gr., Dinescu Aurelia* Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVI, nr. 1, 49 (1964).
9. *Teodorescu Gr., Niculescu Ileana* Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti, Tom. XXIX, nr. 1, 43 (1967).
10. *Teodorescu Gr., Niculescu Ileana* Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti, Tom. XXIX, nr. 4, 43 (1967).
11. *Teodorescu Gr.*, Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, nr. 5, 83 (1967).
12. *Teodorescu Gr.*, Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, nr. 6, 55 (1967).
13. *Teodorescu G., Niculescu Ileana* Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXX, nr. 1, (1968).
14. *Teodorescu G,. Lupu Ana Maria* Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Tom. XXX, nr. 5, 59 (1968).
15. *Teodorescu Gr.*, Bul. Inst. politehnic, „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti Tom. XXXI nr. 3, 51 (1969).
16. *Teodorescu Gr.*, Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti Tom. XXIIX nr. 2, 39 (1970).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

MECANICĂ

C.Z.:621.835

CONTRIBUȚII PRIVIND STABILIREA CONDIȚIILOR DE ASIGURARE A CONTACTULUI PERMANENT LA MECANISMELE CU CAME POLIDINE

N. I. MANOLESCU, CONST. NIȚĂ

1. Introducere

1.1 Într-o lucrare anterioară [1] al doilea autor a stabilit ecuațiile de mișcare ale tachetului unui mecanism cu camă polidină de tipul 4—5—6—7 folosind două modele matematice ale sistemului dinamic al mecanismului:

a) cu un grad de libertate (caz cînd nu s-a luat în considerație elasticitatea sistemului camă-ax cu came);

b) cu două grade de libertate (cînd s-a luat în considerație și această elasticitate).

1.2. Pentru realizarea unei continuități cu cele ce se vor prezenta mai departe, se redau rezultatele obținute pentru cele două cazuri:

1.2.1. Astfel pentru modelul cu un grad de libertate (fig. 1) ecuația diferențială a mișcării vîrfului tachetului $\left(y_c = \frac{s_c}{h}\right)$ în contact cu profilul camei, exprimată sub formă adimensională este:

$$y_c = A_1 \frac{d^2y}{d\varphi^2} + (A_3 + 1)\, y + A_0 \tag{1}$$

în care, după cum s-a arătat în lucrare:

$$A_1 = \frac{m\omega^2}{K_2};\quad A_3 = \frac{K_1}{K_2};\quad A_0 = \frac{Q + F_{si}}{hK_2}. \tag{2}$$

În relațiile (2) n, K_1 și K_2 sînt explicați în figura 1, iar numărătorul coeficientului A_0:

$$Q + F_{si} = F - K_1 s \tag{3}$$

* Manuscris predat redacției la data de 20 decembrie 1972.

unde F este forța exterioară (fig. 1), iar $s = hy$ este deplasarea capătului superior al tachetului.

1.2.2. Pentru modelul cu două grade de libertate (fig. 2) ecuațiile diferențiale ale mișcării vîrfului tachetului $\left(y_c = \frac{s_c}{h}\right)$ și a masei reduse

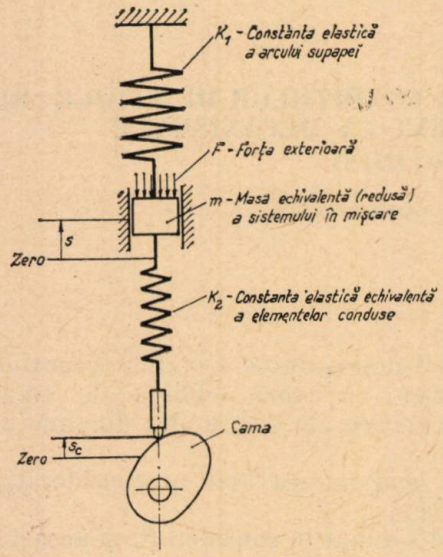


Fig. 1

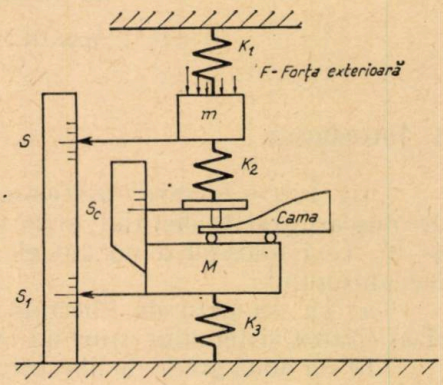


Fig. 2

M a camei și axului său $\left(y_1 = \frac{s_1}{h}\right)$ exprimate de asemenea sub formă adimensională sînt:

$$A_1 \frac{d^2y}{d\varphi^2} + (A_3 + 1)\, y - y_c - y_1 + A_0 = 0 \tag{4}$$

$$A_2 \frac{d^2y_1}{d\varphi^2} + (A_4 + 1)\, y_1 + (y_c - y) = 0 \tag{5}$$

în care:

$$A_2 = \frac{M\omega^2}{K_2}; \quad A_4 = \frac{K_3}{K_2} \tag{6}$$

unde în (4), (5) și (6) mărimile A_0; A_1; A_3; K_1, K_2; K_3; $y = \frac{s}{h}$; $y_1 = \frac{s_1}{h}$; $y_c = \frac{s_c}{h}$, m, M și ω sînt clarificate de figurile 1 și 2 și relațiile (2) și (3).

2. Condiţia asigurării contactului la modelul cu un grad de libertate

Asigurarea contactului dintre camă şi tachet în tot timpul ciclului cinematic al tachetului este condiţionată evident de realizarea în tot acest timp a inegalităţii :

$$F_c = K_2 h\,(y_c - y) > 0 \tag{7}$$

unde F_c este forţa de apăsare a tachetului pe profilul camei.

Cum valoarea $K_2 h$ este întotdeauna pozitivă, inegalitatea (7) se poate deci scrie :

$$y_c - y > 0. \tag{7'}$$

Din ecuaţia (1) de mişcare rezultă :

$$y_c - y = A_1 \frac{d^2y}{d\varphi^2} + A_3 y + A_0 > 0 \tag{8}$$

sau

$$-\frac{\mathrm{d}^2y}{d\varphi^2} < \frac{A_3 y + A_0}{A_1}. \tag{9}$$

Inegalitatea (9) exprimă condiţia menţinerii permanente a contactului dintre camă şi vîrful tachetului.

Se vede că membrul al doilea — *care este întotdeauna pozitiv* — variază în timpul ciclului cinematic, astfel :

— la începutul cursei de ridicare $y = 0 \Rightarrow \dfrac{A_0}{A_1}$

— la sfîrşitul cursei de ridicare $y = 1 \Rightarrow \dfrac{A_3 + A_0}{A_1}$

Pericolul desprinderii tachetului de camă apare în consecinţă în special la sfîrşitul curselor de ridicare şi coborîre, mai ales în această ultimă fază şi la viteze unghiulare ω mari ale camei (deoarece A_1 este funcţie de ω^2).

3. Condiţia asigurării contactului la modelul cu două grade de libertate

În acest al doilea caz asigurarea contactului în tot timpul ciclului cinematic al tachetului este condiţionată de realizarea în tot acest timp a inegalităţii :

$$F_c = K_2 h\,[(y_1 + y_c) - y] > 0 \tag{10}$$

sau

$$y_1 + y_c - y > 0. \tag{10'}$$

Introducînd în (10') expresia lui y_1 rezultată din (4) și făcînd reducerile se obține :

$$A_1 \frac{d^2y}{d\varphi^2} + A_3 y + A_0 > 0 \tag{10''}$$

sau

$$-\frac{d^2y}{d\varphi^2} < \frac{A_3 y + A_0}{A_1} \tag{9}$$

deci aceeași condiție ca și în primul caz.

Formula (9) permite atît analizarea funcționării mecanismelor cu came cu viteze mari în ceea ce privește asigurarea realizării contactului, cît — mai ales — la proiecatrea acestor tipuri de came, astfel încît să fie realizată această condiție fundamentală.

Dacă în relația (9) se introduc expresiile coeficienților A_0 ; A_1 și A_3 din (2) și se fac reducerile, ținîndu-se seama și de (3) se obține :

$$-\frac{d^2y}{d\varphi^2} < \frac{K_1 s + (F - K_1 s)}{hm\omega^2}, \tag{11}$$

Cum $$yh = s \quad \text{și} \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{a}{\omega^2},$$

inegalitatea de mai sus devine în final

$$-ma < F \tag{12}$$

adică forța de inerție dezvoltată de masa redusă a ansamblului elementelor conduse trebuie tot timpul să fie mai mică decît forța exterioară F, care presează tachetul pe profilul camei.

Folosirea însă a coeficienților adimensionali A_0, A_1 și A_3, pentru studiul și proiectarea acestor came, are avantajul că dă posibilitatea de variație a tuturor parametrilor care intră în expresiile acestora (Q ; F_{si} ; F, m, ω, h, K_1 și K_2) folosind calculatorul eelctronic.

4. Aplicații

În cele ce urmează se vor prezenta cîteva aplicații ale formulei (9) la camele polinomiale cele mai utilizate în practică.

4.1. *Cama polinomială 3—4—5.*

Ecuaţiile acestei came sînt [2] (pag. 323):

$$\begin{aligned} y &= 10\,x^3 - 15\,x^4 + 6x^5 \\ y' &= 30\,x^2 - 60\,x^3 + 30\,x^4 \\ y'' &= 60\,x - 180\,x^2 + 120\,x^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Introducîndu-le în (9) se obţine:

$$-60\,x\,(1 - 3x + 2x^2) < \frac{A_3\,(10\,x^3 - 15\,x^4 + 6x^5) + A_0}{A_1} \tag{12}$$

Valorile extreme ale membrului întîi al inegalităţii (12) au loc pentru

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0{,}78833 \\ x_2 = 0{,}21166. \end{matrix} \tag{13}$$

Valoarea lui x s-a determinat însă cu ajutorul calculatorului, împărţind intervalul $x \in [0,1]$ în 36 părţi şi obţinîndu-se poziţia $x = \frac{28}{36} =$ $= 0{,}77777$, deci cu o eroare de 1,33 % faţă de cea exactă.

Valoarea exactă a lui

$$y''_{\min} = -5{,}77354 \tag{14}$$

diferă de cea rezultată la calculator ($-5{,}76131$) cu 0,21 %.

În continuare se va merge cu valorile obţinute la calculator. Astfel valoarea lui y corespunzătoare lui $x = \frac{28}{36}$ este $y = 0{,}92358$.

Cu aceste valori, inegalitatea (12) devine:

$$5{,}76131 < \frac{0{,}92358\,A_3 + A_0}{A_1}. \tag{15}$$

Notînd

$$K_c = \frac{0{,}92358\,A_3 + A_0}{A_1} \tag{16}$$

se poate scrie în final

$$K_c > 5{,}76131 \tag{17}$$

În tabelul 1 sînt prezentate valorile coeficienţilor A_0, A_1 şi A_3 pentru 4 came cu legea de mişcare 3—4—5.

Tabelul 1

Valorile coeficienților A_0, A_1, și A_3 pentru patru tipuri de came polinominale 3 – 4 – 5

Cama	A_0	A_1	A_3
1	0,001	0,0005	0,0005
2	0,004	0,0005	0,0005
3	0,007	0,0005	0,0005
4	0,010	0,0005	0,0005

Pentru fiecare din cele patru tipuri de camă s-au determinat valorile expresiei

$$y_c - y = A_1 \frac{d^2y}{d\varphi^2} + A_3 y + A_0,$$

corespunzătoare a 36 poziții ale tachetului în timpul cursei $y \in [0, 1]$ deci $s \in [0, h]$.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul 2.

Din analizarea celor patru came se observă că pentru cama nr. 1 între pozițiile 22...33 contactul nu este asigurat, deoarece valoarea $y_c - y < 0$, cea mai mare diferență avînd loc — evident — în poziția 28 (unde s-a găsit $\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -5{,}76131$).

Pentru eliminarea acestui fenomen se poate acționa asupra oricăruia din cei trei coeficienți.

Astfel pentru $A_1 = A_3 = 0{,}0005$ va trebui ca valoarea lui A_0 dată de (15).

$$A_0 > 5{,}76131\, A_1 - 0{,}92358\, A_3$$

să satisfacă inegalitatea

$$\frac{Q + F_{si}}{hK_2} = A_0 > 0{,}0024188.$$

Dacă se mențin $A_0 = 0{,}001$ și $A_3 = 0{,}0005$, atunci tot din (15) rezultă :

$$\frac{m\omega^2}{K_2} = A_1 < 0{,}00025.$$

În sfîrșit pentru $A_0 = 0{,}001$ și $A_1 = 0{,}0005$ asigurarea contactului și în porțiunea 22...33 se va realiza dacă

$$\frac{K_1}{K_2} = A_3 > 0{,}002.$$

Tabelul 2

Diferențele $y_c - y$ dintre camele reale și cama teoretică

Poziția	cama nr. 1	cama nr. 2	cama nr. 3	cama nr. 4
1	0,00177	0,00477	0,00777	0,01077
2	0,00240	0,00540	0,00840	0,01140
3	0,00291	0,00591	0,00891	0,01191
4	0,00331	0,00631	0,00931	0,01231
5	0,00360	0,00660	0,00960	0,01260
6	0,00380	0,00680	0,00980	0,01280
7	0,00390	0,00690	0,00990	0,01290
8	0,00392	0,00692	0,00992	0,01292
9	0,00386	0,00686	0,00986	0,01286
10	0,00374	o,oo674	0,00974	0,01274
11	0,00356	0,00656	0,00956	0,01256
12	0,00333	0,00633	0,00933	0,01233
13	0,00305	0,00605	0,00905	0,01205
14	0,00273	0,00573	0,00973	0,01173
15	0,00239	0,00539	0,00839	0,01139
16	0,00202	0,00502	0,00802	0,01102
17	0,00164	0,00464	0,00764	0,01064
18	0,00125	0,00425	0,00725	0,01025
19	0,00086	0,00386	0,00686	0,00986
20	0,00048	0,00348	0,00648	0,00948
21	0,00011	0,00311	0,00611	0,00911
22	−0,00023	0,00277	0,00577	0 00877
23	−0,00055	0,00245	0,00545	0,00845
24	−0,00083	0,00217	0,00517	0,00817
25	−0,00106	0,00194	0,00494	0,00794
26	−0,00124	0,00176	0,00476	0,00776
27	−0,00136	0,00164	0,00464	0,00764
28	−0,00142	0,00158	0,00458	0,00758
29	−0,00140	0,00160	0.00460	0,00760
30	−0,00130	0,00170	0,00470	0,00770
31	−0,00110	0,00190	0,00490	0,00790
32	−0,00081	0,00219	0,00519	0,00819
33	−0,00041	0,00259	0,00559	0,00859
34	0,00010	0,00310	0,00610	0,00910
35	0,00073	0,00373	0,00673	0,00973
36	0,00150	0,00450	0,00750	0,01050

4.2. *Cama polinomială 4—5—6—7*

Ecuațiile acesteia sînt [2] (pag. 233).

$$\begin{aligned} y &= 35\,x^4 - 84\,x^5 + 70\,x^6 - 20\,x^7; \\ y' &= 140\,x^3 - 420\,x^4 + 420\,x^5 - 140\,x^6; \\ y'' &= 420\,x^2 - 1680\,x^3 + 2100\,x^4 - 840\,x^5; \\ y''' &= 840\,x - 5040\,x^2 + 8400\,x^3 - 4200\,x^4. \end{aligned} \tag{18}$$

Condiția (9) devine în acest caz :

$$-420x^2(1-4x+5x^2-2x^3) < \frac{A_3x^4(35-84x+70x^2-20x^3)+A_0}{A_1} \quad (19)$$

cu

$$y''_{\min} = -7{,}51282$$

și deci

$$7{,}51282 < \frac{0{,}90093\,A_3+A_0}{A_1} = K_c \quad (20)$$

4.3. *Cama polinomială 5—6—7—8—9*

Ecuațiile [3] (pag. 520) sînt :

$$\begin{aligned} y &= 126x^5 - 420x^6 + 540x^7 - 315x^8 + 70x^9; \\ y' &= 630x^4 - 2520x^5 + 3780x^6 - 2520x^7 + 630x^8; \\ y'' &= 2520x^3 - 12600x^4 + 22680x^5 - 17640x^6 + 5040x^7. \end{aligned} \quad (21)$$

Se calculează

$$y''_{\min} = -9{,}36287,$$

din care rezultă apoi :

$$9{,}36287 < \frac{0{,}89424\,A_3+A_0}{A_1} = K_c \quad (22)$$

În lucrarea [4] la această camă se pun condiții suplimentare de unde a rezultat în final o polinomială 5—6—7—8—9—10—11 cu un $y'' = -7{,}91$ ceea ce conduce la o mai bună asigurare a contactului.

5. Concluzii

Din cele prezentate mai sus se pot desprinde următoarele concluzii privind funcționarea camelor cu viteze mari :

5.1. Pentru menținerea contactului permanent dintre vîrful tachetului și profilul camei o primă condiție este realizarea unei accelerații negative cît mai mică, lucru ce depinde evident de alegerea legii de deplasare polinomială. În același timp, realizarea unei forțe exterioare F astfel încît în orice moment al ciclului cinematic forța de inerție ($-ma$) a masei m a ansamblului elementelor conduse să fie mai mică decît F. Acest lucru a reieșit în mod clar din relația (12) rezultată din (9) și (11).

O masă redusă m mare, o viteză unghiulară și o cursă a tachetului h mari crează pericolul de desprindere a contactului dintre tachet și camă, lucru ce se observă clar din relația (11).

5.2. Nu influențează fenomenul de desprindere a tachetului de profilul camei :

— Constantele elastice K_2 și K_3 ale elementelor conduse, respectiv ale axului cu came și deci nici mărimea M a masei reduse a axului cu came.

5..3 Pentru diferite legi polinomiale și pentru fiecare lege și diferite caracteristici constructive se poate determina — în ipoteza că forța exterioară poate fi considerată constantă — condiția de menținere permanentă a contactului dintre tachet și camă.

Coeficientul „K_c" al contactului" poate constitui în acest caz un criteriu în alegerea parametrilor constructivi ai mecanismului cu came, exemple sînt relațiile (15), (20) și (22).

Catedra de mecanică și teoria mecanismelor

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGEAFIE

1. *Niță, Ctin.* Studiul mecanismelor cu came polidine de tipul 4—5—6—7 aproximate prin două grade de libertate pe bază de coeficienți de similitudine. În Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, Tom. XXXIV, nr. 5, 1972.
2. *Manolescu, N. I. și colectiv,* Probleme de Teoria mecanismelor și mașinilor Vol. II. Editura didactică și pedagogică București 1968.
3. *Manolescu, N. I. și colectiv,* Teoria mecanismelor și a mașinilor Editura didactică și pedagogică București, 1972.
4. *Tempea, Iosif și alții,* High Speed Cams în Buletinul Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, Tom XXX nr. 1, 1968, pag. 67...80.
5. *Niță, Ctin.* Studiul mecanismelor cu came polidine pe bază de coeficienți de similitudine. Teză de doctorat Inst. polit. „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 1972.
6. *** Bibliografia din lucrarea [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

AVIAȚIE

C.Z.: 532.517.4

DISTRIBUȚIA DE PRESIUNI PENTRU MIȘCAREA TURBULENTĂ A UNUI FILM DE AER, LUÎND ÎN CONSIDERAȚIE INFLUENȚA FORȚELOR DE INERȚIE*

STELIAN GĂLETUȘE

În unele aplicații moderne de lagăre cu turații mari funcționînd în regim turbulent și atunci cînd jocurile sînt mari, forțele de inerție devin importante putînd modifica substanțial distribuția de presiuni.

În lucrare se studiază mișcarea în regim turbulent a unui film de aer antrenat de o suprafață circulară care se rotește și este limitat superior de o suprafață plană fixă, care este plasată în așa fel încît grosimea minimă a filmului se află la jumătatea plăcii. În figura 1 este arătată schema tipului de scurgere studiat și notațiile utilizate. Suprafața circulară are diametru mare ($D = 1004$ mm) iar placa are o lungime relativ scurtă așa încît legea de variație a grosimii filmului de aer se poate aproxima cu o lege parabolică,

$$h = h_2\left[1 + \frac{l^2}{Dh_2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{1}$$

în care h_2 — este grosimea minimă, $2l$ — lungimea plăcii iar D — diametrul suprafeței circulare. Dacă se utilizează notațiile adimensionale,

$$\bar{h} = \frac{h}{h_2}, \bar{x} = \frac{x}{l}, A = \frac{l}{\sqrt{Dh_2}} \tag{2}$$

relația (1) se scrie:

$$h = 1 + A^2\bar{x}^2. \tag{3}$$

Distribuția de presiuni a fost determinată pentru următoarele date:

$V = 40$ m/s
$1 = 65$ mm (jumătate din lungimea plăcii)
$b = 125$ mm (jumătate din lățimea plăcii)
$\lambda = b/l$ (alungirea)

* Manuscris predat redacției la data de 10 mai 1971

Dr. V. N. Constantinescu a obţinut expresia gradientului de presiune luînd în considerare şi influenţa forţelor de inerţie, [1], [2]. Această expresie este,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu k_x}{h^2}\left(\frac{V}{2} - U_m\right) - \frac{\alpha\rho}{h}\frac{\partial}{\partial x}(hU_m^2)\Bigg\} \qquad (4)$$

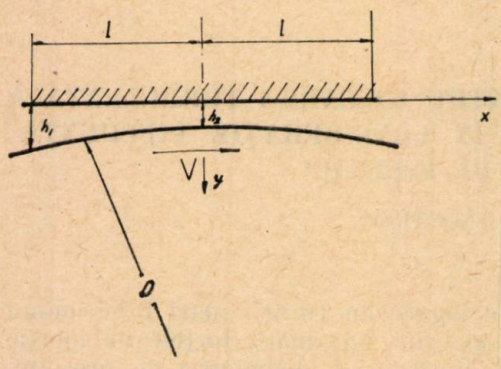


Fig. 1. Modelul scurgerii, notaţii.

$$U_m . h = Q$$

în care coeficientul k_x este funcţie de numărul Reynolds pentru regimul turbulent şi este obţinut din calculul tensiunilor de frecare la perete [3], [4]

$$\tau_h - \tau_0 = -\frac{k_x\,\mu}{h}\left(U_m - \frac{V}{2}\right) \qquad (5)$$

unde U_m este viteza medie în secţiunea respectivă, V este viteza suprafeţei mobile. Expresia coeficientului k_x este [2],

$$k_x = 12 + 0{,}0136\, R_e^{0.9}. \qquad (6)$$

Expresii foarte apropiate de aceasta (6) au fost obţinute şi în lucrările [5], [6].

Coeficientul α din relaţia (4) depinde de tipul profilului de viteze şi are valorile $\alpha = 1{,}33$ pentru mişcarea de tip Couette, $\alpha = 1{,}2$ pentru mişcarea de tip Poiseuille, $\alpha = 1$ pentru profil de viteze constant pe secţiune.

Pentru cazul mişcării bidimensionale, debitul Q este constant în direcţia x, aşa încît relaţia (4) devine,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{k_x\,\mu V}{2h^2}\left(1 - \frac{2Q}{Vh}\right) + \frac{\alpha\rho Q^2}{h^3}\frac{dh}{dx} \qquad (7)$$

unde ultimul termen reprezintă influenţa forţelor de inerţie. Utilizînd notaţiile adimensionale,

$$\overline{p} = \frac{p}{p_a}, \overline{Q} = \frac{Q}{\frac{V}{2}h_2}, \Lambda = \frac{6\mu\, Vl}{p_a\, h_2^2}, \psi = \frac{h_2}{l} \qquad (8)$$

unde p_a este presiunea atmosferică, expresia (7) se scrie,

$$\frac{d\overline{p}}{d\overline{x}} = \frac{\Lambda}{h^2}\left[\frac{k_x}{12}\left(1 - \frac{\overline{Q}}{\overline{h}}\right) + \frac{\alpha}{24} Re_2\, \psi \overline{Q}^2 \frac{1}{\overline{h}}\frac{d\overline{h}}{d\overline{x}}\right] \qquad (9)$$

în care

$$Re_2 = \frac{\rho V h_2}{\mu}. \tag{10}$$

Înlocuind expresia lui k_x (6) și legea de variație a lui $\bar{h}$ (3), după integrare se obține,

$$\bar{p} - 1 = C + \Lambda \left\{ \frac{\bar{x}}{2(1 + A^2\bar{x}^2)} + \frac{\operatorname{arc\,tg} A\bar{x}}{2A} - \right.$$

$$- \bar{Q}\left[\frac{2 + 3(1 + A^2\bar{x}^2)}{8(1 + A^2\tilde{x}^2)^2}\,\tilde{x} + \frac{3 \operatorname{arc\,tg} A\bar{x}}{8A} \right] +$$

$$+ 0{,}001133\, Re_2^{0,9}\left[\int_0^{\bar{x}} \frac{d\tilde{x}'}{(1 + A^2\tilde{x}'^2)^{1,1}} - \bar{Q}\int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}'}{(1 + A^2\tilde{x}'^2)^{2,1}} \right] - \tag{11}$$

$$\left. - \frac{\alpha}{48} Re_2\, \psi \bar{Q}^2 \left[\frac{1}{(1 + A^2\bar{x}^2)^2} - \frac{1}{(1 + A^2)^2} \right] \right\}$$

Punînd condițiile la limită,

$$\bar{p} - 1 = 0,\ \bar{x} = 1 \tag{12}$$

$$\bar{p} - 1 = \bar{p}_i,\ x = -1$$

se obține constanta C și expresia debitului $\bar{Q}$,

$$C = \frac{\bar{p}_i}{2}$$

$$\bar{Q} = \frac{\dfrac{\bar{p}_i}{2} + \Lambda\left[\dfrac{1}{2(1 + A^2)} + \dfrac{\operatorname{arc\,tg} A}{2A} + 0{,}001133 Re_2^{0,9} \displaystyle\int_0^1 \frac{d\bar{x}}{(1 + A^2\bar{x}^2)^{1,1}} \right]}{\Lambda\left[\dfrac{2 + 3(1 + A^2)}{8(1 + A^2)^2} + \dfrac{3 \operatorname{arc\,tg} A}{8A} + 0{,}001133 Re_2^{0,9} \displaystyle\int_0^1 \frac{d\bar{x}}{(1 + A^2\bar{x}^2)^{2,1}} \right]} \tag{13}$$

Dacă prima condiție la limită din (12) nu introduce o altă constantă, a doua condiție introduce necunoscuta $\bar{p}_i$ adică presiunea de intrare. În cazul lubrificației cu lichide această presiune de intrare este presiunea mediului și chiar dacă s-ar simți un efort de intrare, creșterea acestei

presiuni este foarte mică față de presiunile ce apar în restul lagărului, încît se poate considera,

$$\overline{p}_i - 1 = 0. \tag{14}$$

Pentru cazul cînd se utilizează aerul ca lubrifiant și pentru jocuri mari, presiunea de intrare devine de același ordin cu presiunile în restul scurgerii, încît trebuie să se ia în considerație și acest efect.

În figurile 2 a, b sînt prezentate distribuțiile de presiuni pentru cîteva valori ale debitului luate apriori, deci renunțîndu-se la cea de a doua condiție la limită. În acest fel presiunea de intrare $\overline{p}_i$ rezultă din calcul. Au fost deduse distribuțiile de presiune în acest mod pentru a scoate în evidență influența debitului asupra distribuției de presiuni.

Pentru rezolvarea problemei însă, trebuie dedusă presiunea de intrare $\overline{p}_i$, din alte condiții, căci această valoare va dicta mărimea debitului $\overline{Q}$. Pentru aceasta se consideră că o parte din presiunea dinamică se convertește în presiune statică, în zona de intrare. Aceasta se scrie ca un efect Bernoulli,

$$p_i + \frac{\rho}{2} U_{m1}^2 = p_a + \frac{\rho}{2} K^2 V^2 \tag{15}$$

sau după cîteva calcule simple punînd în evidență debitul Q se obține,

$$(\overline{p} - 1)_i = p_i = \frac{\rho V^2}{2p_a}\left(K^2 - \frac{\overline{Q}^2}{4\overline{h}_1^2}\right) \tag{16}$$

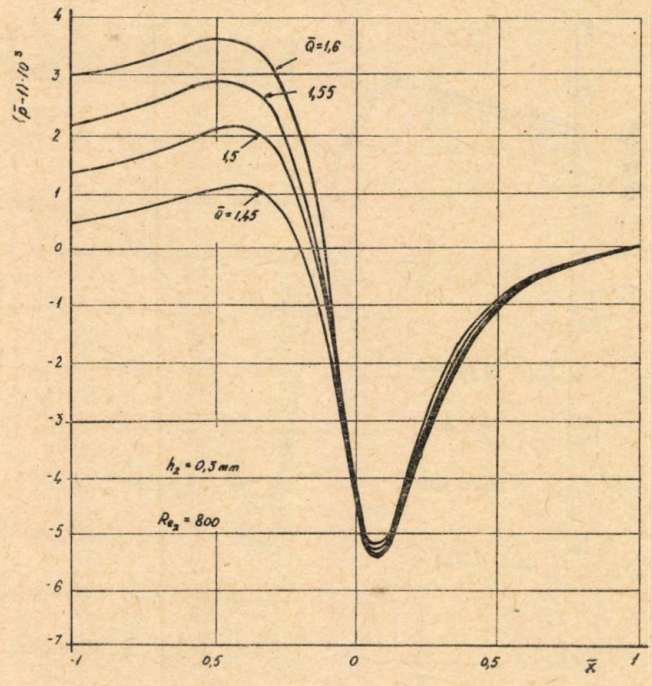
unde h_1 este grosimea filmului la intrare iar coeficientul $K^2 = 0{,}15 - 0{,}17$ valoare indicată de Burton și Carper [7], valoare care a fost dedusă din studii experimentale.

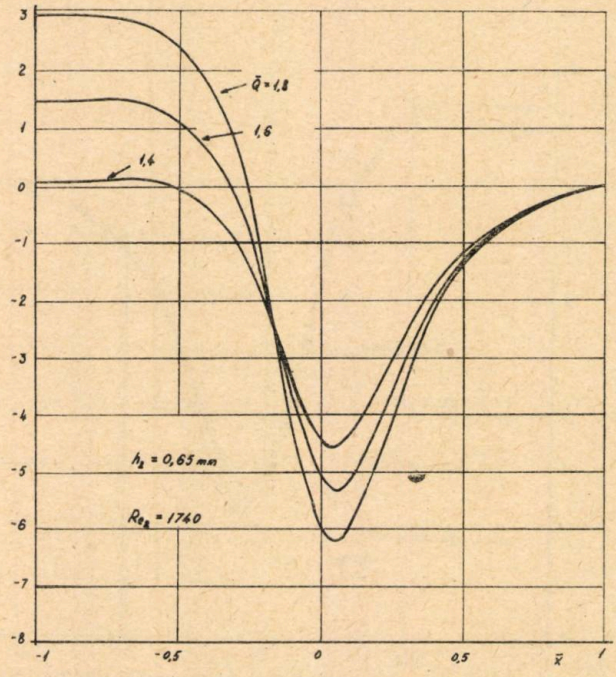
Cu această expresie (16) și relațiile (11), (13) s-au calculat distribuții de presiuni pentru cîteva numere Reynolds și diferite grosimi minime h_2. Calculele, au fost făcute la calculatorul electronic al Institutului Politehnic București, IBM 1130.

În continuare sînt prezentate : schema logică a programului și programul de calcul propriu zis.

Pentru identificare mai ușoară a programului cu formulele de calcul (11), (13), (16), se va ține seama de notațiile :

$$\left.\begin{aligned} Re_2 &= \text{RE (IC)} = \text{REC} \\ \psi &= \text{AK (IC)} = \text{AKC} \\ \Lambda &= \text{AL (IC)} = \text{ALC} \\ A &= \text{A (IC)} = \text{AC} \end{aligned}\right\} \text{IC} = 1 \div 5$$





Flg. 2. Influența debitului asupra distribuției de presiuni.
a) $Re_2 = 800$
b) $Re_3 = 1740$

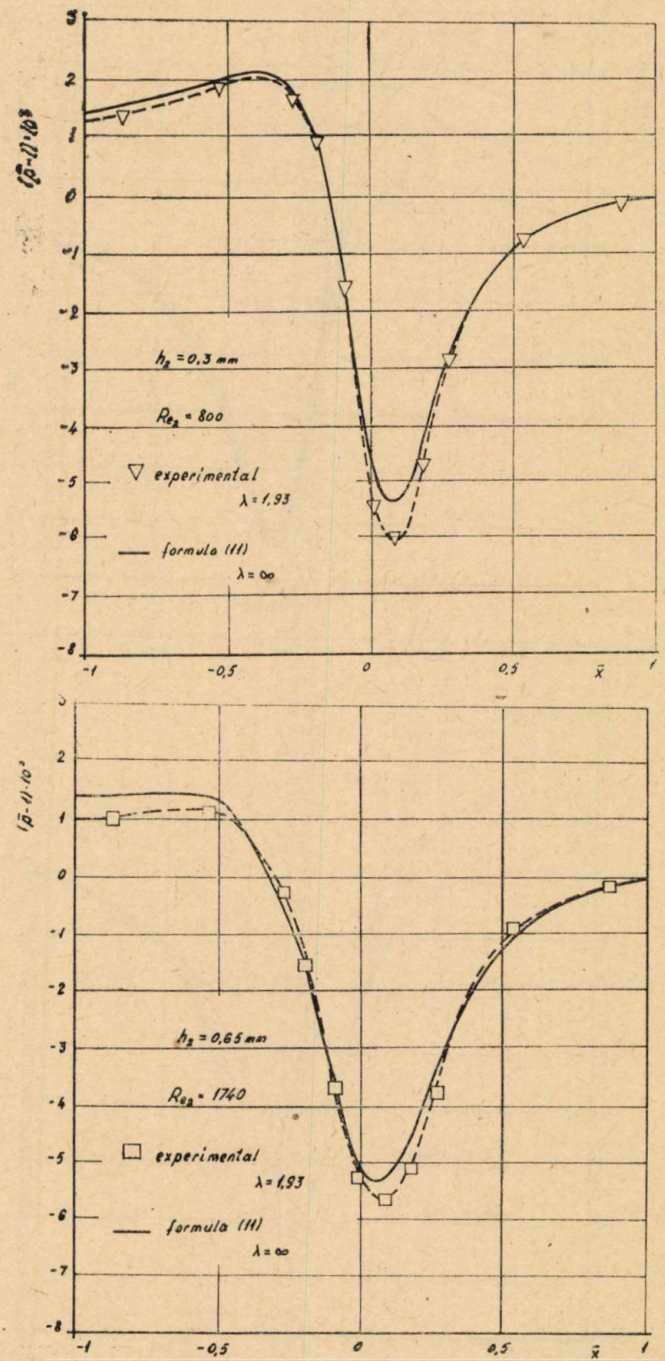
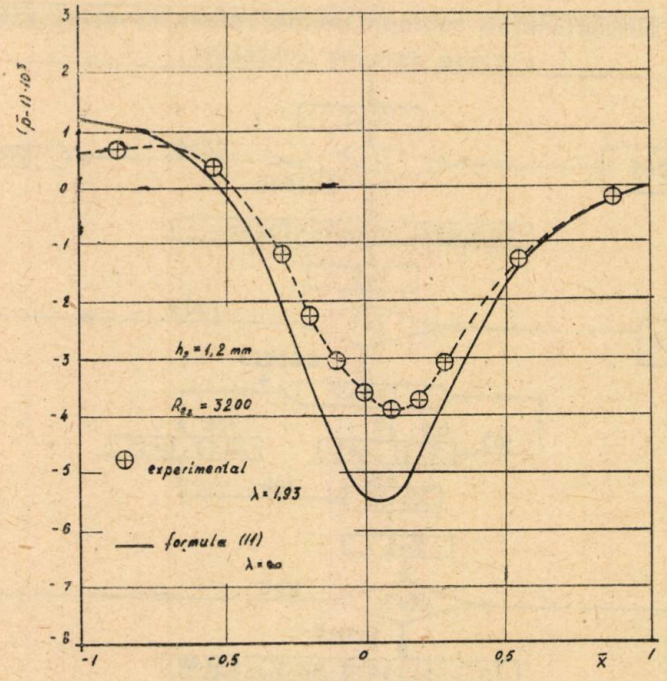


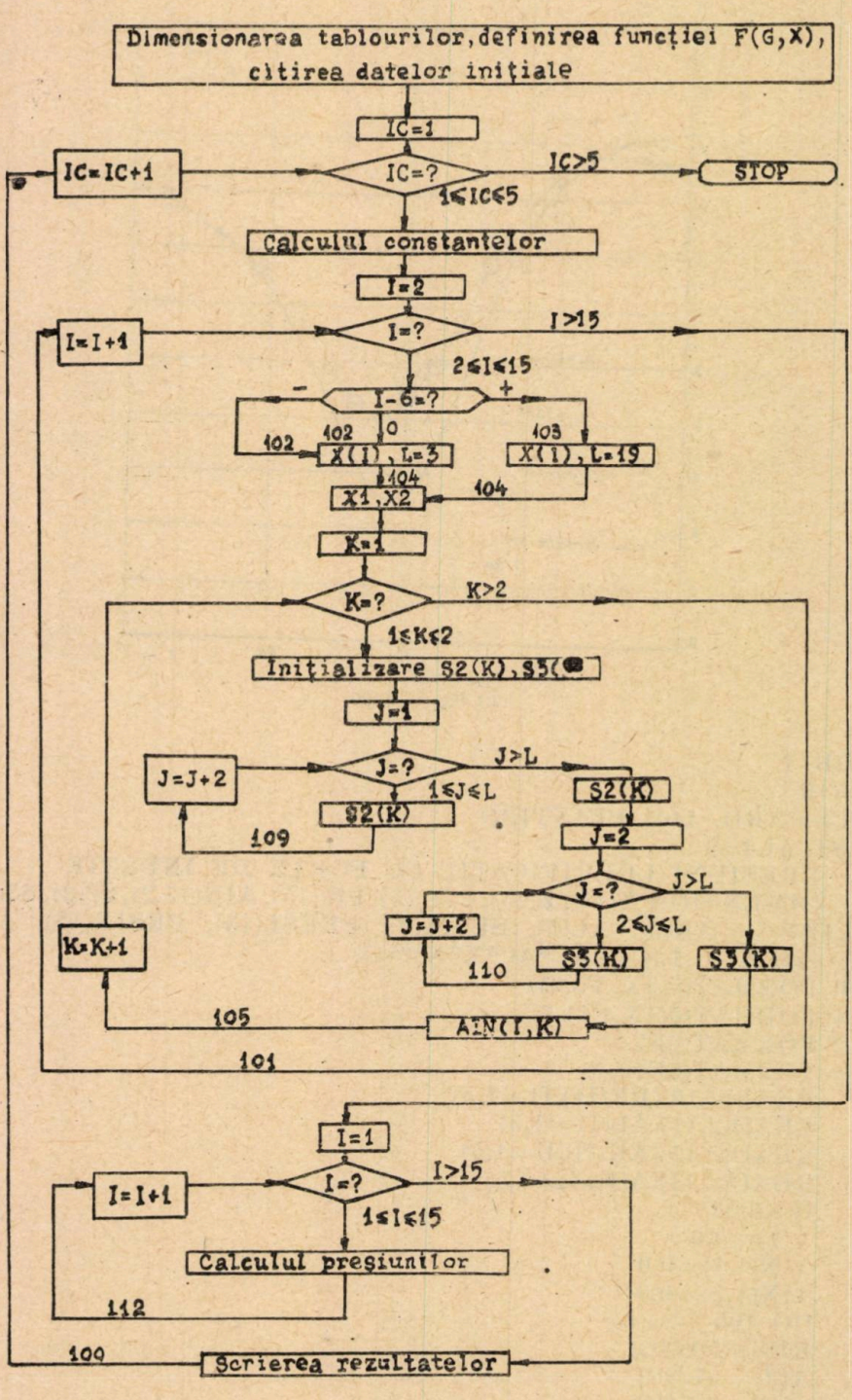
Fig. 3 Distribuţia de presiuni determinată teoretic şi experimental.

a) $Re_2 = 800$
b) $Re_2 = 1740$



c) $Re_2 = 3200$

```
//JOB T
// FOR
*IOCS(CARD, 1403 PRINTER)
*LIST ALL
C     PRESIUNI LUBRIFICATIE CU FORȚE DE INERȚIE
      DIMENSION X(15), Z(15), PI1(15), PI2(15), AIN(15,2), S2(2), S3(2),
     1RE(5), AK(5), AL(5), SUMA(2), PRESL(15), PRSIN(15), A(5)
      F(G,X) = 1./(1.+AC*AC*X*X)**G
   10 FORMAT(5(2X, F5.0))
   11 FORMAT(5(1X,E11.5))
   12 FORMAT(5F7.5)
   14 FORMAT(5E10.4)
      READ(2,10)(RE(I1),I1=1,5)
      READ(2,11)(AL(I1=1,5)
      READ(2,12)(AK(I1),I1=1,5)
      READ(2,14)(A(I1),I1=1,5)
      H=0.005
      X(1)=0.0
      AIN(1,1)=0.0
      AIN(1,2)=0.0
      DO 100 IC=1,5
      REC=RE(IC)
      ALC=AL(IC)
      AKC=AK(IC)
```


Dimensionarea tablourilor, definirea funcției F(G,X), citirea datelor inițiale
IC=1
IC=IC+1
IC=?
IC>5
STOP
1≤IC≤5
Calculul constantelor
I=2
I=I+1
I=?
I>15
2≤I≤15
I-6=?
-
+
102
0
103
X(I), L=3
X(I), L=19
104
X1, X2
K=1
K=?
K>2
1≤K≤2
Inițializare S2(K), S5(
J=1
J=J+2
J=?
J>L
1≤J≤L
S2(K)
109
J=2
2≤J≤L
S3(K)
110
K=K+1
105
AIN(I,K)
101
I=1
I=I+1
I=?
I>15
1≤I≤15
Calculul presiunilor
112
100
Scrierea rezultatelor

```
      AC=A(IC)
      REMOD=0.001133*REC**0.9
      C=1.+AC*AC
      B=ATAN(AC)/(2.*AC)
      C1=B+1./(2.*C)
      C2=(2.+3.*C)/(8.*C**2)+3.*B/4.
      C3=1./C**2.
      DO 101 I=2,15
      IF(I-6)102,102,103
  102 X(I)=0.02*FLOAT(I-1)
      L=3
      GO TO 104
  103 X(I)=0.1*FLOAT(I-5)
      L=19
  104 CONTINUE
      X1=X(I-1)
      X2=X(I)
      DO 105 K=1,2
      GC=FLOAT(K)+0.1
      S2(K)=0.0
      S3(K)=0.0
      SUMA(K)=0.0
      DO 109 J=1,L,2
      Y=XI+FLOAT(J)*H
      S2(K)=S2(K)+F(GC,Y)
  109 CONTINUE
      S2(K)=4.0*S2(K)
      DO 110 J=2,L,2
      Y=X1+FLOAT(J)*H
      S3(K)=S3(K)+F(GC,Y)
  110 CONTINUE
      S3(K)=2.0*S3(K)
      FUNCI=F(GC,X1)
      FUNCF=F(GC,X2)
      SUMA(K)=H/3.0*(S2(K)+S3(K)+FUNCI+FUNCF)
      AIN(I,K)=AIN(I-1,K)+SUMA(K)
  105 CONTINUE
  101 CONTINUE
      AINF1=AIN(15,1)
      AINF2=AIN(15,2)
      C4=C1+REMOD*AINF1
      C5=C2+REMOD*AINF2
      C7=0.00117*C3/(ALC*C5)
      C8=0.775E-03/(ALC*C5)
      C9=4.*C7*(C4/C5+C8)+1.
      Q=(C9**0.5-1.)/(2.*C7)
      APC=0.775E-03-0.00117*C3*Q*Q
      DO 112 I=1,15
      Y=X(I)
      AINC1=AIN(I,1)
```

```
      AINC2=AIN(I,2)
      CX=1.+(AC*Y)**2
      CX2=CX*CX
      BX=ATAN(AC*Y)/(2.*AC)
      T1=REMOD*(AINC1-Q*AINC2)
      P2=(2.+3.*CX)/(8.*CX2)*Y+3.*BX/4.
      T=Y/(2.*CX)+BX-Q*P2+T1
      U=1./48.*REC*AKC*Q*Q*(1./CX2-C3)
      PRSIN(I)=APC-ALC*U
      PRESL(I)=ALC*T
      PI1(I)=PRSIN(I)-PRESL(I)
      PI2(I)=PRSIN(I)+PRESL(I)
      Z(I)=-Y
  112 CONTINUE
      WRITE(5,20)REC,ALC,APC,AKC,AC,Q
   20 FORMAT(1H1,2X,'RE=',F5.0,1X',L=',E11.5,1X,'P=
     =',E9.3,1X',K=',
     1F7.5,1X,'A=',E10.4,1X,'Q=/,E11.5)
      WRITE(5,22)
   22 FORMAT(3X,'X',5X,'PRES',8X,'X',5X,'PRES',8X,
     1 'PRESLUB',5X,'PRESINERT',2X,'IN101',1X,'IN201')
      WRITE(5,23)(Z(I),PI1(I),X(I),PI2(I),PRESL(I),PRSIN(I),
     1AIN(I,1),AIN(I,2),I=1,15)
   23 FORMAT(2X,F5.2,1X,E11.4,2X,F4.2,1X,E11.4,1X,
     1E11.4,4X,E11.4,1X,F5.3,1X,F5.3)
  100 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
// XEQ
```

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
} DATE

$$Q = Q$$

$$\bar{p}_i\ /2 = \text{APC}$$

$$\int_0^x \frac{d\bar{x}'}{(1 + A^2\bar{x}'^2)^{1,1}} = \text{AIN (I,1)}$$

$$\int_0^x \frac{d\bar{x}'}{(1 + A^2\bar{x}'^2)^{2,1}} = \text{AIN(I,2).}$$

Pentru rezultatele prezentate în figurile 2 a, b, programul a fost modificat corespunzător, renunțîndu-se la ecuația (16) și dîndu-se direct valo i pentru $\overline{Q}$.

Rezultatele numerice obținute pentru cazul general (folosind relația 16) sînt prezentate în figurile 3 a, b, c.

În aceste figuri sînt date și rezultatele experimentale obținute anterior [8] și se remarcă o bună concordanță cu cele calculate. Pentru grosimea minimă h_2 avînd valori mai mari, figura 3 c, se osbervă că distribuția obținută experimental prezintă depresiuni în zonă minimă ($x = -0{,}2 \div 0{,}2$) cu valori mai mici decît cele calculate numeric. Aceasta se datorește faptului că rezultatele experimentale s-au obținut pentru o lățime a plăcii finită ($\lambda = 1{,}93$; $\lambda = b/l$) deci scurgere tridimensională, pe cînd relațiile analitice deduse în prezenta lucrare sînt pentru lățime infinită (scurgere bidimensinnală).

Catedra aeronave și instalații de bord
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Constantinescu V. N.*, On the Influence of Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self Acting Films, A.S.M.E. Transaction, november (1969).
2. *Constantinescu V. N., Pan C. H. T., Smalley A. J., Vohr I. H.*, Lubrication Phenomena in a Film of Low Kinematic Viscosity, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl. 15, nr. 2, p. 479–502, (1970).
3. *Găletușe S.*, Contribuții la teoria mișcărilor turbulente în straturi subțiri, teză de doctorat pag. 149–155, (1969).
4. *Constantinescu V. N.*, Lubrication in Turbulent Regime, U.S. Atomic Energy Comm., Div. of Tech. Inf., Oct. 1968.
5. *Ng. C. W., Pan C. H. T.*, A Linearized Turbulent Lubrication Theory, A.S.M.E. Trans· Series D, Journal of Basic Eng., 87, p. 675–688, 1965.
6. *Elrod H. G., Ng C. W.*, A Theory of Turbulent Fluid Films and Its Application to Bearings, A.S.M.E. Trans., Series F, Journal of Lubrication Tech., 89, 3, p. 346–362, 1967.
7. *Burton R. A., Carper H. I.*, An Experimental Study of Annular Flows with Applications in Turbulent Film Lubrication, A.S.M.E. Trans., Series F, Journal of Lub. Tech. 89, 3, p. 381–391, 1967.
8. *Găletușe S.*, Etude expérimentale sur l'écoulement turbulent d'un film d'air entre des frontièrs en mouvement relatif, avec application a la lubrication, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., 16, nr. 3, p. 693–703, 1971

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

HIDRAULICĂ

C.Z. 532:681.142.4

SUR L'ETUDE DE LA STABILITE DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE A L'AIDE DES CALCULATEURS ANALOGIQUES *

JULIETA FLOREA, V. PANAITESCU

1. Introduction

Le problème de l'origine de la turbulence et de la transition du mouvement laminaire au mouvement turbulent et un problème fondemental de la mécanique des fluides. Pour l'explication de l'apparition de la turbulence on admet qu' une cause principale de la transition est due à une instabilité de l'écoulement déterminée par l'accroissement exponentiel des perturbations infinitésimales produites dans le mouvement laminaire d'un fluide. Ce problème a été l'objet de nombreuses études.

La théorie de la stabilité hydrodynamique présente un grand intérêt théorique et pratique. L'intérêt théorique consiste en ce que la stabilité hydrodynamique conduit à l'étude mathématique de la stabilité de la solution d'un système d'équations aux dérivées partiales de deuxième ordre et de deuxième dégré (les équations de Navier-Stokes) ou dans certaines conditions, à un problème de valeurs propres pour un opérateur différentiel du quartième ordre non-autoadjoint, avec coefficients variables, en conditions aux limites bilocales homogènes (l'équation d'Orr-Sommerfeld). L'intérêt technique de l'étude de la stabilité hydrodynamique se base sur des considérations de l'économie de l'énergie, étant connu le fait que la consommation d'énergie est moindre dans le régime laminaire que dans le régime turbulent. De même, il y a des domaines de la technique moderne où l'étude de la stabilité joue un rôle essentiel, par exemple l'aérodynamique des profils en régime supersonique ; la construction des éléments d'automatisation aux jets fluides ; des applications spéciales dans la technique des émulsions, etc.

2. L'énoncé mathématique du problème de la satbilité linéaire

On considère les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité, qui sont vérifiées par les composants de la vitesse u_i et par la pression p

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \tag{1}$$

* Ouvrage réçu à la rédaction le 18 janvier 1972

Sur les frontières solides qui se déplacent à la vitesse S_i il faut qu'il soit satisfaite la condition

$$u_i = S_i. \tag{2}$$

Si la vitesse S ne dépend pas du temps, on obtient la solution stationnaire

$$U_i(x_k),\ P(x)_k. \tag{3}$$

Pour résoudre le problème de la stabilité hydrodynamique, il faut qu'on examine le problème Cauchy avec les valeurs initiales des variables u_i et p

$$u_i = U_i(x_k) + u_i'(x_k, t);\ p = P(x_k) + p'(x_k, t) \tag{4}$$

vans lesquelles u_i' et p' sont de petites perturbations. Si la solution troudée tends vers la solution stationnaire (3) lorsque le temps $t \to \infty$, alors le mouvement sera stable. Au cas contraire le mouvement sera instable.

On étudie la stabilité d'un mouvement plan, stationnaire, caractérisé par

$$U = U(y)\ V = 0,\ P = P(x, y). \tag{5}$$

Sur ce mouvement on superpose les perturbations $u'(x, y, t)$ $v'(x, y, t)$ et $p'(x, y, t)$. La perturbation de la vitese est donnée par la fonction de courant ψ

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)};\quad u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y)e^{i(\alpha x - \beta t)};$$
$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha\varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}. \tag{6}$$

On a utilisé les notations : $\varphi(y)$ est l'amplitude complexe de la perturbation ; α est une valeur réelle, liée par la longueur d'onde λ de la perturbation par la relation $\alpha = 2\pi/\lambda$; β est une valeur complexe, $\beta = \beta_r + i\beta_i$ dont la partie réelle β_r représente la pulsation de la perturbation et dont la partie imaginaire β_i représente le coefficient d'amplification : si $\beta_i < 0$ la perturbation s'amortit ; si $\beta_i > 0$, la perturbation s'amplifie. On introduit $c = c_r + ic_i = \frac{\beta}{\alpha}$, dans laquelle c_r représente la vitesse de déplacement de l'onde et c_i est la vitesse d'amplification : $c_i < 0$, caractérise l'amortissement de la perturbation et $c_i > 0$ caracterise l'amplification de la perturbation. Le cas limite $c_i = 0$ corresponde aux perturbations neutrales (indifférentes).

On introduit les composants de la vitesse et de la pression

$$u = U + u',\quad v = v';\quad p = P + p' \tag{7}$$

dans les équations (1) on néglige les termes de deuxième dégré par rapport à u' et v' et l'on tient compte du fait que le mouvement de base (5) vérifie les équations de Navier-Stokes. On élimine la pression et l'on obtient l'équation différentielle de l'amplitude de la perturbation (l'équation d'Orr-Sommerfeld [11], [17])

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha Re}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi). \tag{8}$$

Cette équation différentielle ordinaire, linéaire, du quatrième ordre est écrite sour la forme sans dimension obtenue en rapportant les longueurs à une longueur caractéristique L et en rapportant la vitesse à la vitesse maxima U_m du mouvement de base. Le nombre de Reynolds est donné par la relation $Re = U_m L/\nu$.

Les quatre solutions aux limites dans leqsuelles on résout l'équation (8) s'obtiennent en considérant les valeurs u' et v' de la perturbation de la vitesse (6) sur les frontières du domaine du mouvement. Par exemple, au cas du mouvement plan de type de Poiseuille entre deux plans parallèles d'équations $y = -1$ et $y = 1$ les quatre conditions aux limites sont

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = \varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0. \tag{9}$$

Pour les fluides peu visqueux le nombre de Reynolds et très grand et l'équation (8) devient

$$(U - c)\ \varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = 0. \tag{10}$$

Cette équation différentielle ordinaire, de deuxième ordre, linéaire, avec coefficients variables, est nommée d'habitude l'équation de Rayleigh. Les conditions aux limites correspondant au cas considéré sont

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0. \tag{11}$$

Le problème de l'étude de la stabilité est réduit à la détermination des valeurs propres de l'équation (8), respectivement (10), avec les conditions aux limites correspondantes. Il résout une fonction propre φ et une valeur propre complexe $c = c_r + ic_i$, à chaque paire de vaeurs Re et α, au cas de l'équation (8), et à chaque valeur de α, au cas de l'équation (10).

Pour la recherche des valeurs propres de l'équation de Rayleigh et de l'équation d'Orr-Sommerfeld on propose des méthodes qui se basent sur l'utilisation des calculateurs analogiques.

3. La méthode proposée pour l'étude de l'équation de Rayleigh

Pour la résolution du problème de la stabilité linéaire du mouvement plan d'un fluide non visqueux incompresible, on propose une méthode d'étude de l'équation de Rayleigh qui consiste dans la recherche des valeurs propres, de cette équation, en utilisant un calculateur analogique.

Pour l'illustration de la méthode, on considère l'étude de la stabilité linéaire du mouvement, entre deux plans paralèlles, d'un fluide incompressible non visqueux, en admettant un profil parabolique des vitesses de type de Poisseuille, fig. 1, [2], [3]; le calculateur qu'on utilise est un calculateur analoqique : Applied Dynamics"

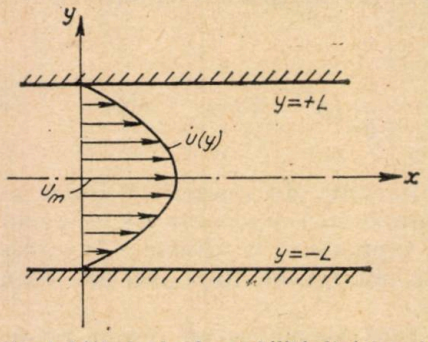


Fig. 1 L'étude de la stabilité linéaire du mouvement plan de Poiseuille

Pour l'étude de ce problème de stabilité il faut considérer l'équation (10), qui a été obtenue dans l'hypothèse que la fonction de courant du mouvement perturbateur est donnée par la relation (6). Avec les notations indiquées par la fig. 1 la fonction de courant a l'expression

$$\psi = \Phi(Y) e^{i(\alpha x - \beta U_m t)} \qquad (6')$$

dans laquelle Y est la variable sans dimension $Y = \alpha y$ et U_m est la vitesse maxima du mouvement considéré; on obtient l'équation

$$(U - c)\ (\Phi'' - \Phi) - U''\Phi = 0 \qquad (10')$$

qu'il faut intégrer aux conditions aux limites

$$\Phi(\pm \alpha L) = 0. \qquad (12)$$

Le calculateur résout les équations différentielles pour des conditions initiales données [13]. Dans le problème examiné les conditions initiales pour la partie réelle Φ_r de Φ et pour la partie imaginaire Φ_i de Φ sont connues mais ne sont pas connues les conditions initiales des dérives Φ_r' et Φ_i', les conditions données étant des conditions aux limites. La variable indépendante varie entre les limites -1 et $+1$; on prend comme nouveaux paramètres les conditions initiales $\Phi_r'(-1)$ et $\Phi_i'(-1)$. Pour une certaine valeur des conditions initiales $\Phi_r'(-1)$ et $\Phi_i'(-1)$ et pour les valeurs arbitraires de c_r et c_i, les fonctions Φ_r et Φ_i, en général, ne satisferent pas aux conditions aux limites $\Phi_r(1) = \Phi_i(1) = 0$. Il faut ajuster les potentiomètres, correspondant aux conditions initiales jusqu'à ce qu'on obtienne des solutions satisfaisant à peu près aux conditions aux limites; en outre, il faut ajuster ensuite les potentiomètres correspondant à c_i, pour que les conditions aux limites soient rigoureusement satisfaites.

Le problème examiné est assez délicat, étant donné le nombre de paramètres qui interviennent. A chaque changement de valeur d'un des paramètres, il faut attendre que le calculateur analoqique ait tracé les courbes Φ_r et Φ_i; si les valeurs de ces courbes ne sont pas nulles à limites, il faut introduire une correction sur l'un des paramètres et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on obtienne les solutions cherchées.

Les valeurs de c_r et c_i trouvées sont les valeurs propres du problème et les solutions correspondantes sont les fonctions propres.

Pour résoudre l'équation (10′) à l'aide d'un calculateur analogique, il faut la séparer en sa partie réelle et sa partie imaginaire. À l'aide des notation $\Phi = \Phi_r + i\,\Phi_i$ et $c = c_r + ic_i$ on obitent, pour le profil des vitesses

$$U = 1 - \left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2, \tag{13}$$

a partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (10′)

$$-\left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - c_r\right]\Phi_i'' + c_i\,\Phi_r'' + \left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2 L^2} - c_r\right]\Phi_i - c_i\,\Phi_r = 0 \tag{14}$$

$$\left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - c_r\right]\Phi_r'' + c_i\,\Phi_i'' - \left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2 L^2} - c_r\right]\Phi_r - c_i\,\Phi_i = 0 \tag{15}$$

On écrit ces équations sous une autre forme : dans le premier membre de la première équation on met en évidence la dérivée seconde de la fonction Φ_r et dans le premier membre de la deuxième équation on écrit la dérivée seconde de la fonction Φ_i. Ainsi dans le premier membre des deux équations est apparue la dérivée d'ordre le plus élevé. Le système se met sous la forme suivante :

$$\Phi_r'' = \frac{1}{c_i}\left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - c_r\right]\Phi_i'' - \frac{1}{c_i}\left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - \frac{2}{L^2\alpha^2} - c_r\right]\Phi_i + \Phi_r \tag{16}$$

$$\Phi_i'' = -\frac{1}{c_i}\left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - c_r\right]\Phi_r'' + \frac{1}{c_i}\left[1-\left(\frac{Y}{\alpha L}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2 L^2} - c_r\right]\Phi_r + \Phi_i \tag{17}$$

Sous cette forme, on peut afficher le système sur le calculateur. La variable indépendante, $z = Y/\alpha L$, varie entre les limites -1 et $+1$. On introduit le facteur d'échelle du temps β et les variables machines ; le système (16) et (17) se transforme de cette manière en un système „d'équations machines".

$$\lambda_{\Phi_r''}\Phi_r'' = \frac{1}{c_i}(1-c_r)\left[\frac{\lambda_{\Phi_r''}}{\lambda_{\Phi_i''}}(\lambda_{\Phi_i''}\Phi_i'') - \frac{\alpha^2 L^2}{\beta^2}\cdot\frac{\lambda_{\Phi_r''}}{\lambda_{\Phi_i}}(\lambda_{\Phi_i}\Phi_i)\right] -$$

$$-\frac{100}{c_i\lambda_{z^2}}\left(\frac{\lambda_{z^2}z^2}{100}\right)\left[\frac{\lambda_{\Phi_r}}{\lambda_{\Phi_i''}}(\lambda_{\Phi_i''}\Phi_i'') - \frac{\alpha^2 L^2}{\beta^2}\cdot\frac{\lambda_{\Phi_r''}}{\lambda_{\Phi_i}}(\lambda_{\Phi_i}\Phi_i)\right] + \tag{18}$$

$$+\frac{\alpha^2 L^2}{\beta^2}\cdot\frac{\lambda_{\Phi_r''}}{\lambda_{\Phi_r}}(\lambda_{\Phi_r}\Phi_r) + \frac{2\alpha^2 L^2}{c_i\beta^2}\cdot\frac{\lambda_{\Phi_r''}}{\lambda_{\Phi_i}}(\lambda_{\Phi_i}\Phi_i)$$

$$\lambda_{\Phi_i''}\Phi_i'' = -\frac{1}{c_i}(1-c_r)\left[\frac{\lambda_{\Phi_i''}}{\lambda_{\Phi_r''}}(\lambda_{\Phi_r''}\Phi_r'') - \frac{\alpha^2L^2}{\beta^2}\frac{\lambda_{\Phi_i''}}{\lambda_{\Phi_r}}(\lambda_{\Phi_r}\Phi_r)\right] +$$

$$+\frac{100}{c_i\lambda_{z^2}}\left(\frac{\lambda_{z^2}z^2}{100}\right)\left[\frac{\lambda_{\Phi_i''}}{\lambda_{\Phi_r''}}(\lambda_{\Phi_r''}\Phi_r'') - \frac{\alpha^2L^2}{\beta^2}\frac{\lambda_{\Phi_i''}}{\lambda_{\Phi_r}}(\lambda_{\Phi_r}\Phi_r)\right] + \tag{19}$$

$$+\frac{\alpha^2L^2}{\beta^2}\frac{\lambda_{\Phi_i''}}{\lambda_{\Phi_i}}(\lambda_{\Phi_i}\Phi_i) - \frac{2\alpha^2L^2}{c_i\beta^2}\frac{\lambda_{\Phi_i}}{\lambda_{\Phi_r}}(\lambda_{\Phi_r}\Phi_r)$$

$$\frac{d(\lambda_z z)}{d\tau} = \frac{\lambda_z}{\beta} \tag{20}$$

$$\frac{d(\lambda_z z^2)}{d\tau} = \frac{2}{\beta}\frac{\lambda_{z^2}}{\lambda_z}(\lambda_z z) \tag{21}$$

Tous les facteurs d'échelle seront convenablement choisis. Les coefficients sont affichés à l'aide des potentiomètres qui effectuent une multiplication par une constante inférieure à l'unité c'est -à dire les coefficients qui appraissent dans le système d'équations machines doivent être inférieures à l'unité. Quelques coefficients peuvent également être inférieurs à 10, parce que les amplificateurs ont des résistance d'entrée de 0,1 MΩ qui permettent de multiplier les entrées par 10.

Pour calculer les facteurs λ, il est nécessaire de connaître les valeurs maxima que peuvent prendre les fonctions Φ_r et Φ_i et leurs dérivées, mais il n'y a aucune indication sur ces valeurs. Le facteur d'échelle des temps β étant égal à 10, on suppose que les fonctions ne dépassent pas la valeur de 100 V — autrement dit, on a pris la valeur de 100 V comme unité.

Les paramètres seront choisis de telle façon que les coefficients soient inférieurs à 1 ou à 10. Ainsicile système (18) — (21) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Phi_r'' = \frac{a}{c_i}[\Phi_i'' - \gamma\Phi_i] - \frac{1}{c_i}z^2[\Phi_i'' - \gamma\Phi_i] + \gamma\Phi_r + \frac{2\gamma}{c_i}\Phi_i \tag{22}$$

$$\Phi_i'' = -\frac{a}{c_i}[\Phi_r'' - \gamma\Phi_r] + \frac{1}{c_i}z^2[\Phi_r'' - \gamma\Phi_r] + \gamma\Phi_i - \frac{2\gamma}{c_i}\Phi_r \tag{23}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\beta} \tag{24}$$

$$\frac{dz^2}{d\tau} = \frac{2}{\beta}z \tag{25}$$

avec les notations

$$a = 1 - c_r, \qquad \gamma = \frac{\alpha^2 L^2}{\beta^2} \tag{26}$$

A chaque système de valeurs a, γ, correspondront des valeurs propres c_r et c_i.

Le schéma de câblage est cnstituée de telle façon, afin qu'il permette d'afficher sur le panneau de câblage, le système d'équations à résoudre. Les principaux éléments utilisés sont les suivants : un intégrateur pour

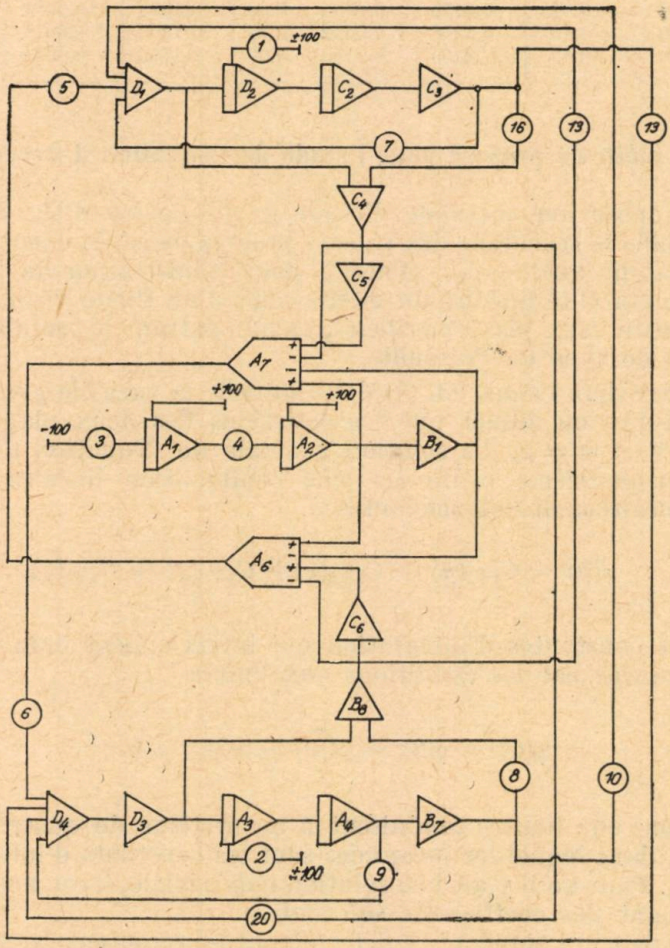


Fig. 2 Le schéma de cablage pour la résolution de l'équation de Rayleigh.

la base de temps ; un intégrateur pour la formation de la fonction z^2 ; quatre intégrateurs pour intégrer les fonctions Φ_r'' et Φ_i'' ; deux multiplieures à paraboles pour former les produits par z^2. Les autres éléments utilisés sont des potentiomètres et des sommateurs (fig. 2).

Les valeurs des paramètres pour lesquelles on an obtenu des solutions satisfaisant aux conditions aux limites sont données dans le tableau 1

Tableau 1

No.	Φ_n'	Φ_i'	a	γ	αL	c_r	c_i	Conclusions
1	0,13	−0,04	0,8025	0,1000	0,95	0,1975	−0,0090	stabilité
2	0,11	−0,02	0,8090	0,8010	0,90	0,1910	−0,0025	stabilité
3	0,02	−0,01	0,8112	0,0722	0,85	0,1888	−0,0006	stabilité
4	0,02	−0,01	0,8176	0,0640	0,80	0,1824	0,0001	instabilité
5	−0,10	−0,10	0,8200	0,0562	0,75	0,1800	0,0015	instabilit
6	−0,20	−0,15	0,8205	0,0490	0,70	0,1795	0,0043	instabilité

4. La méthode proposé pour l'étude de l'équation d'Orr-Sommerfeld

On propose une méthode d'étude de l'équation d'Orr Sommerfeld qui réside dans la recherche des valeurs propres de cette équation à l'aide d'un calculateur analoqique „Pace"; pour l'illustration de la méthode on étudie la stabilité linéaire du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, entre deux plans parallèles, en admenttant le profil parabolique des vitesses de type de Poiseuille.

On considère l'équation (8) dans laquelle la variable y varie entre 0 et 2 c'est à dire on admet que les équations des deux plans parallèles soient $y = 0$ et $y = 2$. La solution générale de l'équation différentielle ordinaire du quatrième ordre est une combinaison linéaire de quatre solutions linéairement indépendantes

$$\varphi(y) = C_1\varphi_1(y) + C_2\varphi_2(y) + C_3\varphi_3(y) + C_4\varphi_4(y) \tag{27}$$

Les quatres constantes d'intégration qui interviennent dans la solution sont déterminées par les conditions aux limites

$$\varphi(0) = \varphi(2) = \varphi'(0) = \varphi'(2) = 0 \tag{28}$$

Ces conditions aux limites conduisent à un système de quatre équations homogènes, dans lequel les inconnues sont les constants d'intégration C_1, C_2, C_3 et C_4. Pour qu'il y ait une solution non triviale, il est necessaire que le déterminant des coefficients soit nul.
Les valeurs de c qui annulent ce déterminant représentent les valeurs propres de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

Le calculateur donne la solution d'une equation différentielle satisfaisant à des cnditions initiales et non à des conditions aux limites. Les solutions particulières $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ et $\varphi_4(y)$ satisfont à des conditions initiales données. Il faut chercher les solutions particulières de l'équation (8). On impose aux quatre solutions particulières les conditions ini-

tiales exprimées dans le tableau

	$k = i$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\varphi_k(0)$	$1 + i$	0	0	0
$\varphi'_k(0)$	0	$1 + i$	0	0
$\varphi''_k(0)$	0	0	$1 + i$	0
$\varphi'''_k(0)$	0	0	0	$1 + i$

Les quatre solutions sont évidement linéairement indépendantes, parce que leur wronskien n'est pas zéro.

En tenant compte des conditions initiales données et en appliquant les conditions aux limites (28) à la solution général, on obitent :

$$\varphi(0) = C_1(1 + i) = 0 \qquad \text{donc } C_1 = 0$$

$$\varphi'(0) = C_2(1 + i) = 0, \qquad \text{donc } C_2 = 0$$

$$\varphi(2) = C_3\varphi_3(2) + C_4\varphi_4(2) = 0,$$

$$\varphi'(2) = C_3\varphi_3^3(2) + C_4 + C_4\varphi'_4(2) = 0.$$

Il faut que le système formé des deux dernières équations ait un solution non triviale ; il s'ensuit qu'il faut annuler le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_3(2) & \varphi_4(2) \\ \varphi'_3(2) & \varphi'_4(2) \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

L'annulation de ce déterminant, formé à l'aide de deux fonctions complexes et leurs dérivées, se fait en annulant la partie réelle et la partie imaginaire du déterminant.

Pour chercher les valeurs φ_{3r}, φ_{4r}, φ_{3i}, φ_{4i}, φ'_{3r}, φ'_{4r}, φ'_{3i} et φ'_{4i} à l'aide du calculateur analogique, on donne une valeur arbitraire aux différents paramètres et il résout le problème pour des conditions initiales, correspondent à la solution φ_3, ce qui permettra de sortir les valeurs $\varphi_{3r}(2)$ et $\varphi_{3i}(2)$; en procédant de la même manière il résout le probleme pour les conditions initiales correspondant à la solution φ_4 et on obtient $\varphi_{4r}(2)$ et $\varphi_{4i}(2)$.

Ayant les quatres valeurs $\varphi_{3r}(2)$, $\varphi_{3i}(2)$, $\varphi_{4r}(2)$ et $\varphi_{4i}(2)$ et les dérivées correspondantes, on calcule les valeurs des parties réelles et imaginaires du déterminant (29). Il faut calculer ensuite la somme des carrrés de la partie réelle et de la partie imaginaire du déterminant et on fait varier les paramètres jusqu'à ce que cette somme s'annule.

Pour résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld avec le calculateur analogique, il faut la séparer en sa partie réelle et sa partie imaginaire, remplaçant φ et c par leur valeurs

On obtient

$$\frac{1}{\alpha Re}\varphi_r^{IV}-\left[c_i+\frac{2\alpha^2}{\alpha Re}\right]\varphi_r''+(U-c_r)\varphi_i''+\alpha^2\left[c_i+\frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right]\varphi_r-$$

$$-\alpha^2\left(U+\frac{U''}{\alpha^2}-c_r\right)\varphi_i=0 \tag{30}$$

$$\frac{1}{\alpha Re}\varphi_i^{IV}-\left[c_i+\frac{2\alpha^2}{\alpha Re}\right]\varphi_i''-(U-c_r)\varphi_r''+\alpha^2\left[c_i+\frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right]\varphi_i+$$

$$+\alpha^2\left(U+\frac{U''}{\alpha^2}-c_r\right)\varphi_r=0 \tag{31}$$

À des nombres de Reynolds grands (par exemple pour un fluide peu visqueux), les termes en $\frac{1}{\alpha Re}$ pourraient devenir tellement petits que leur effets au calculateur seraient négligeables, ce qui cacherait l'iflunence du nombre de Reynolds sur les valeurs propres. Pour considérer l'influence de la viscosité sur les valeurs propres on évite l'incovénient signalé en changeant la variable

$$y=\varepsilon x, \quad \text{avec} \quad \varepsilon=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha Re}} \tag{32}$$

La nouvelle variable x varie de 0 a $2\sqrt[4]{\alpha Re}$, pour une variation correspondante de y entre 0 et 2. Les équations (30) et (31) s'écrivent :

$$\frac{d^4\varphi_r}{dx^4}-\left[\sqrt{\alpha Re}\,c_i+\frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha Re}}\right]\frac{d^2\varphi_r}{dx^2}+\sqrt{\alpha Re}[U-c_r]\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}+$$

$$+\alpha^2\left[c_i+\frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right]\varphi_r-\alpha^2\left[U+\frac{U''}{\alpha^2}-c_r\right]\varphi_i=0 \tag{33}$$

$$\frac{d^4\varphi_i}{dx^4}-\left[\sqrt{\alpha Re}\,c_i+\frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha Re}}\right]\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}-\sqrt{\alpha Re}[U-c_r]\frac{d^2\varphi_r}{dx^2}+$$

$$+\alpha^2\left[c_i+\frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right]\varphi_i+\alpha^2\left[U+\frac{U''}{\alpha^2}-c_r\right]\varphi_r=0 \tag{34}$$

Ces dernières équations doivent être écrites pour un profil des vitesses parabolique de type de Poiseuille, $U=y(2-y)$, en variables machines et sous la forme normale, conseillée par la technique du calculateur „Pace".

On obtient les équations machines suivantes :

$$\frac{d(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{\varphi_i}}{\lambda_{y_1}}(\lambda_{y_1}y_1) \tag{35}$$

$$\frac{d(\lambda_{y_1}y_1)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_1}}{\lambda_{y_2}}(\lambda_{y_2}y_2) \tag{36}$$

$$\frac{d(\lambda_{y_2}y_2)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_2}}{\lambda_{y_3}}(\lambda_{y_3}y_3) \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\lambda_{y_3}y_3)}{d\tau} = {} & \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{y_2}}\left[\sqrt{\alpha Re}\,c_i + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha Re}}\right](\lambda_{y_2}y_2) - \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{x_2}}\sqrt{\alpha Re}\,c_r(\lambda_{x_2}x_2) + \\ & + \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{x_2}}\sqrt{\alpha Re}\,(\lambda_{x_2}x_2)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] - \frac{1}{\beta}\frac{100\lambda_{y_3}}{\lambda_{x_2}\lambda_z}(\lambda_{x_2}x_2)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right] - \\ & - \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_i}}\alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right](\lambda_{\varphi_i}\varphi_i) + \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_r}}(2 + \alpha^2 c_r)(\lambda_{\varphi_r}\varphi) - \\ & - \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_r}}\alpha^2(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] + \frac{100}{\beta\sqrt{\alpha Re}}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_r}\lambda_z}\alpha^2(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right]\end{aligned} \tag{38}$$

$$\lambda_z z = \frac{\sqrt{\alpha Re}}{100}\lambda_z(\lambda_x x)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] \tag{39}$$

$$\frac{d(\lambda_x x)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{100}{\sqrt{\alpha Re}} \tag{40}$$

$$\frac{d(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{\varphi_r}}{\lambda_{x_1}}(\lambda_{x_1}x_1) \tag{41}$$

$$\frac{d(\lambda_{x_1}x_1)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_1}}{\lambda_{x_2}}(\lambda_{x_2}x_2) \tag{42}$$

$$\frac{d(\lambda_{x_2}x_2)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_2}}{\lambda_{x_3}}(\lambda_{x_3}x_3) \tag{43}$$

$$\frac{d(\lambda_{x_3}x_3)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{x_2}}\left[\sqrt{\alpha Re}\,c_i + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha Re}}\right](\lambda_{x_2}x_2) + \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{y_2}}\sqrt{\alpha Re}\,c_r(\lambda_{y_2}y_2) -$$

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{y_2}}\sqrt{\alpha Re}\,(\lambda_{y_2}y_2)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right]+\frac{1}{\beta}\frac{100\lambda_{x_3}}{\lambda_{y_2}\lambda_z}\,(\lambda_{y_2}y_2)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right]-$$

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_r}}\alpha^2\left[c_i+\frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right](\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)-\frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_i}}[2+\alpha^2 c_r](\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)+$$

$$+\frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_i}}\alpha^2(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right]-\frac{100}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\alpha Re}}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_i}\lambda_z}\alpha^2(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right] \qquad (44)$$

Il faut que les facteurs d'échelle et le facteur temps β aient des valeurs convenablement choisies, de sorte que tous les coefficients des equations (35) à (44) soient inférieurs obligatoirement à la 1 ou à 10 ; on a donné à ces facteurs les valeurs suivantes :

$$\lambda_{\varphi_r}=\lambda_{\varphi_i}=\lambda_{x_2}=\lambda_{y_2}=5\,;\qquad \beta=5$$

Tous les autres λ sont égaux à 1.

Les valeurs du nombre d'onde α des perturbations périodiques sont fixées par des valeurs de α^2 comprises entre $\alpha^2=0{,}04$ et $\alpha^2=1{,}25$

Pour considérer les mouvements des fluides visqueux dans une gamme étendue des nombres de Reynolds on, donne pour l'expression $\sqrt[4]{\alpha Re}$ des valeur comprises entre $\sqrt[4]{\alpha Re}=5$ et $\sqrt[4]{\alpha Re}=15$

On prend comme paramètres variables

$$\delta_1=-\frac{1}{\beta\lambda_{x_2}}\left[\sqrt{\alpha Re}\,c_i+\frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha Re}}\right];\quad \delta_2=-\frac{\alpha^2}{\beta\lambda_{\varphi_i}}\left[c_i+\frac{\alpha^2}{\alpha Re}\right] \qquad (45)$$

autrement dit, on ne fixe pas les valeurs des potentiomètres, correspondant à ces paramètres.

Pour c_r on prend quelques valeurs constantes, comprises entre 0,1 et 0,4.

Finalement on obtient les valeurs propres c_r correspondent aux valeurs c_r, α^2 αRe.

Tabelau 2

No.	α	Re	α^2	αRe	δ_1	δ_2	c_r	c_i	Conclusion
1	0,7	16000	0,49	11200	−0,0002	0,0001	0,222	−0,0001	stabilité
2	0,9	6400	0,81	5760	−0,0002	0,0002	0,244	−0,0002	stabilité
3	0,9	90000	0,81	81000	−0,6412	−0,0001	0,180	0,0001	instabilité
4	1,0	5300	1,00	5300	−0,0052	0,0001	0,250	−0,0002	stabilité
5	1,0	10000	1,00	10000	−0,0156	−0,0001	0,251	0,0037	instabilité
6	1,1	16000	1,21	17600	−0,0360	0,0001	0,232	−0,0001	stabilité
7	1,2	6400	1,44	7680	0,0183	−0,0003	0,231	−0,0056	stabilité

Le schéma de câblage est représenté dans la figure 3 ; les résultats sont inscrites dans le tableu 2.

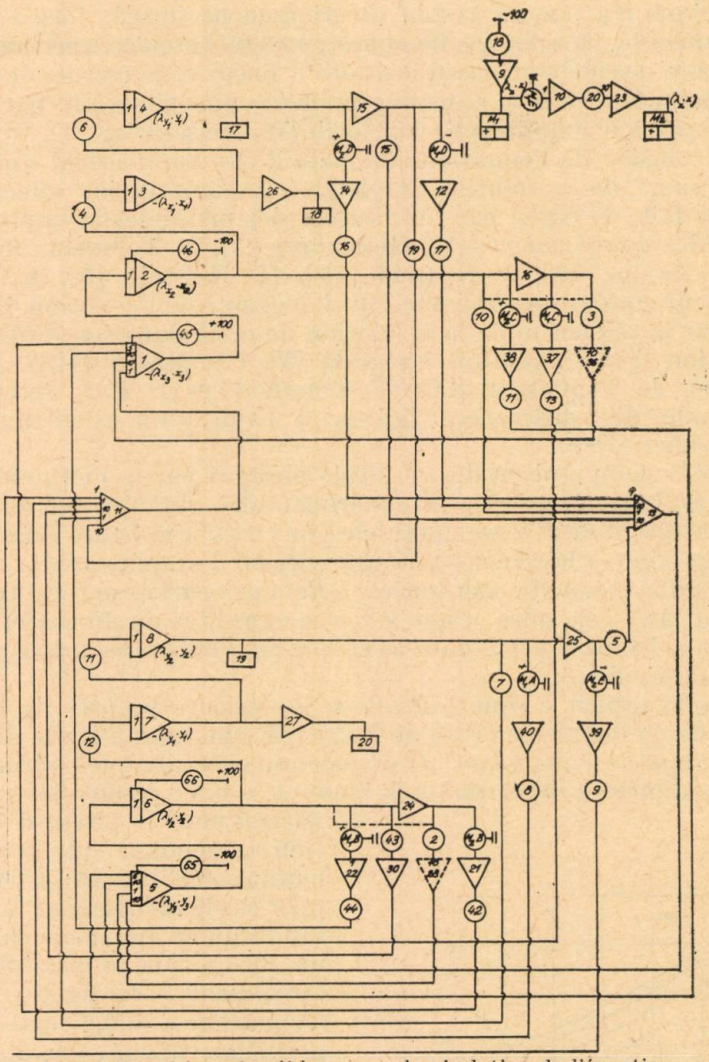


Fig. 3 Le schéma de câblage pour la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

5. Comparaison entre les méthodes mentionnées en littérature pour l'étude de la stabilité du mouvement d'un fluide et la méthode proposée ; conclusions.

Pour aborder le problème de la stabilité hydrodynamique en littérature sont mentionnées de différentes méthodes mathématiques par exemple la théorie qualitative des équations aux dérivées partiales (G. Prodi [14]), des méthodes d'analyse fonctionnelle (O.A. Ladyzhenskaïa [7]), des méthodes variationnelles (L. M. Lee, W. C. Reynolds [8]), la théorie des groupes Lie (V. I. Arnold [1]) etc. Jusqu'à présent, bien qu'on eut été utilisé un appareil mathématique moderne, le problème de la stabilité hy-

drodynamique n'a pas été résolu théoriquement sous la forme générale. On a été effectué, en échange, de nombreuses recherches expérimentales [9]

L'étude des phénomènes d'instabilité linéaire, gouvernés de l'équation d'Orr-Sommerfeld se fait, dans une première aproximation, par la résolution de l'équation simplifiée de Rayleigh (W. Heisenberg [4], W. Tollmien [20]). La solution de l'équation complète d'Orr-Sommerfeld s'obtient par „la correction" de la solution Rayleigh ; la construction effective de la solution se fait, de règle, par l'utilisation des méthodes asymptotiques ou des méthodes aproximatives (W. Heisenberg [4], W. Tollmein [20], C.C. Lin [10], G. I. Taylor [18], W. H. Reid [15], H. Holstein [5], K. T. Kuen [6]). On peut construire aussi une solution exacte de l'équation d'Orr-Sommerfeld par la réduction de la résolution de cette équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale (V. Panaitescu [12]). En outre, la solution de l'équation d'Orr-Sommerfeld peut être obtenue aussi par méthode des différences finites, à l'aide d'un calculateur digital (L. H. Thomas [19]).

Pour la comparaison des résultats obtenus par la méthode proposée avec les résultats théoriques et expérimentales obtenus par autres chercheurs en utilisant de diverses méthodes, on emploie la figure 4 dans laquelle ont été reproduites les courbes d'égale vitesse d'amplifications c_i = constant dans un système de coordonées α-Re. Ces courbes ont été tracées par S. F. Shen [16] à la suite d'une serieuse consultation du matériel bibliographyque existant à cette date-là et ont ete confirmées aussi par les recherches ultérieures.

Dans le tableu 1 sont présentées les valeurs propres de l'équation différentielle de deuxiéme ordre de Rayleigh, obtenues à l'aide du calculateur analogique. An analysant ces données on constate que pour les valeurs du nombre d'onde α supérieurs à la limite $\alpha = 0{,}8$ il résulte des valeurs négatives pour la vitese d'amplification c_i, pendant que pour les valeurs $\alpha < 0{,}8$ il resulte $c_i > 0$. En premier cas le mouvement reste stable tandis qu'en deuxième cas il a lieu un phénomène d'instabilité. Conformément à la figure, la droite d'équation $\alpha = 0{,}8$ représente approximativement, une direction asymptotique de la courbe neutre $c_i = 0$, pour de grandes nombres de Reynolds. Puisque l'équation de Rayleigh est valable seulement dans l'hypothèse de grandes nombres de Reynolds, on deduit que les résultats obtenus par la méthode proposée sont en concordance avec les resultats obtenus par S.F. Shen.

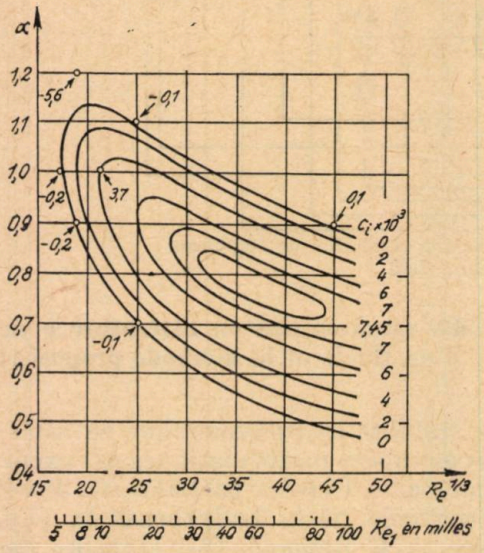


Fig. 4 La comparaison entre les données obtenues par ce travail et les données obtenues par S. F. Shen.

Dans le tableu 2 sont présentées les valeurs propres de l'équation différentielle de quatrième ordre d'Orr-Sommerfeld, obtenues

à l'aide du calculateur analogique. On transpose graphiquement ces données sur la figure.

Parmi les courbes c_i = constant, une importance particulière presente la courbe neutre ou la courbe d'indifférence, nommée ainsi parce qu'elle sépare la domaine α-Re en deux zones : la zone de stabilité à l'extérieur de la courbe et la zone d'instabilité, à l'interieur de la courbe. Un des buts de ce travail a été l'obtention d'un nombre suffisant de points avec c_i égal approximativement à zero. On remarque une bonne concordance entre les resultats obtenus dans le present travail et les résultats obtenus par S. F. Shen.

L'examen comparatif de divers méthodes connues de l'étude de la stabilité linéaire, d'une part, et de la méthode proposée d'autre part, permet de faire ressortir quelques remarques :

1. à côté des autres méthodes rencontrées en littérature la méthode de l'étude de la stabilité des écoulements plans paralleles par l'investigation du problème des valeurs propres des équation différentielle de Rayleigh et d'Orr-Sommerfeld à l'aide des calculateurs analogiques est une méthode bien utile ;

2) après l'opinion des auteurs, basée sur une recherche extensive d'une riche bibliographie, en littérature n'est pas signalé le modélage des équation de Rayleigh et d'Orr-Sommerfeld à l'aide des calculateurs analogiques ;

3) la méthode proposée permet d'aborder directement le problème de la stabilité : au vrai, à la différence des méthodes classiques qui déterminent d'abord la solution des équations de Rayleigh et d'Orr-Sommerfeld et seulement puis, pour chaque paire des valeurs α et Re, déterminent les valeurs propres du problème à l'aide desquelles on tire la conclusion sur la stabilité ou sur l'instabilité du mouvement, la méthode préconisée permet la trouvaille directe des valeurs propres ; en plus, la solution de l'équation est tracée graphiquement effectivement par le calculateur ;

4) la méthode exposée est une méthode générale et elle peut etre appliquée à tous écoulements dont la stabilité on étudie à l'aide de l'équation d'Orr-Sommerfeld, c'est-à-dire aux écoulements stationaires plans parallèles ou presque parallèles (par exemple les écoulements de type de Couette, les écoulements le type de Poiseuille, les écoulements combinés de type de Coutte-Poiseuille ; l'écoulement dans la couche-limite ; l'écoulement dans le diffuseur plan l'écoulement dans le jet plan ; l'écoulement dans le sillage plan etc ; pour chaque type d'écoulement on introduit dans l'équation le profil correspondant des vitesses $U(y)$ et on impose les conditions aux limites exigées de problème.

En conclusion, eu égard au grand intérêt accordé aux problèmes liés de l'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement laminaire d'un fluide, on considère très utile la mise au point d'une nouvelle méthode de résolution des équations differentielle de Rayleigh et d'Orr-Sommerfeld.

Chaire de Hydraulique et Machines hydrauliques
Institut Polytechnique „Gheoghe Gheorghiu-Dej" Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Arnold, V. I.* On a Variational Principle for Steady Flow of Perfect Liquids and its Applications to Nonlinear Stability Problems, Journal de Mécanique, 5, 1, 29—43, (1966).
2. *Florea, J., Panaitescu, V.*, Studiul stabilității mișcării unui fluid incompresibil între două plane paralele cu ajutorul unor calculatoare analogice, A XIII-a Sesiune științifică a Institutului politehnic din București, (1970).
3. *Florea, J., Panaitescu, V.*, Metodă de studiu a stabilității curgerilor plane paralele prin cercetarea problemei valorilor proprii ale ecuațiilor diferențiale Rayleigh și Orr-Sommerfeld cu ajutorul calculatoarelor analogice, A XIV-a Sesiune științifică a Institutului politehnic din București, (1971).
4. *Holstein, H., Über* die aussere und innere Reibungsschicht bei Storungen laminarer Stromungen, ZAMM, 30, (1950).
5. *Heisenberg, W.*, Über stabilitat und Turbulenz von Flussigkeitstomen, Annalen der Physik, 74, 4, (1924)
6. *Kuen, K. T.*, On the Asymptotic Solution of the Orr-Sommerfeld Equation by the Method of Multiplescales, J. of Fluid Mech 34, 1, 145—158, (1968).
8. *Lee, L. H. Reynolds, W. C.* A Variational Method for Investigating the Stability o, Paralle Flow, Stanford. Univ., Termosci, Division, Dept. Mech. Eng. Rep. FM—1, (1964).
9. *Leite, R. J.*, An Experimental Investigation of the Stability of Poiseuille flow, J. Fl. Mech, 5, 81—96, (1959).
10. *Lin, C.C*, On the Stability of Two-dimensional Parallel Flows, Part I, II, III, Quart. Appl. Math., 3, 117—142, 218—234, 277—301, (1945).
11. *Orr. W. Mc. F.*, The Stability or Instability of the Steady Motion of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid, Proc. Roy, Irisch Acad., A, 27, 9—68, 69—138, (1907).
12. *Panaitescu, V.*, Asupra stabilității liniare a unei curgeri laminare plane, Stud. cerc. de mec. aplic., 3, tomul 30, 519—558, (1971).
13. *Pélegrin, M.*, Machines à calculer électroniques. Applications aux automatismes, ed. II-a, Ed. Dunod. Paris, (1964).
14. *Prodi, G.*, Teoremi di tipo locale per il sisteme di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionari, Rend. Sem. Matem. Padova, 20, 374—397, (1960).
15. *Reid, W. H.*, The Stability of Parallel Flow, Recent Advances in Fluid Dynamics (ed. Hold, M.) Academic Press, New-York, (1964).
16. *Shen, S. F.*, Calculated Amplified Oscilations in the Plane Poiseuille and Blasius flows, Journ. Aeronaut. Sci, 21, Nr. 1, 62—64, (1954).
17. *Sommerfeld, A.*, Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung, Atti del Congr. intern di mat., Roma, (1908).
18. *Talyor*, G.I., Stability of Viscous Liquid Contained Between two Rotating Cylinders, Phil. Trans. A223, 289—343, (1931).
19. *Thomas, L. H.*, The Stability of Plane Poiseuille Flow, Physical Review, vol. 91, no. 4, (1953).
20. *Tollmein, W.*, Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen, Nachr. Gess. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Klasse, Fachgruppe I,Bd. 1, 79—114, (1935).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

TEHNOLOGIA CONSTUCȚIILOR DE MAȘINI

CONTRIBUȚII LA STABILIREA BAZELOR CALCULULUI FORȚELOR DE STRINGERE A PIESELOR ÎN DISPOZITIVE*

ION UNGUREANU, VOICU TACHE

C.Z.: 621. 881: 531. 2

1. Introducere

Stabilirea relațiilor de calcul a forțelor de strîngere a pieselor, necesare asigurării echilibrului în timpul prelucrării, este una din problemele importante ale proiectării și construcției dispozitivelor. Strîngerea cu forțe insuficiente duce la smulgerea piesei din dispozitiv, uneori, cu consecințe grave. Strîngerea cu forțe mai mari are consecințe nefavorabile prin aceea că deformațiile, date de aceste forțe în sistemul piesă-dispozitiv, se transmit sub formă de erori asupra piesei de prelucrat. De asemenea, forțele de strîngere superioare celor necesare duc la creșterea gabaritelor dispozitivelor, cu consecințe nefavorabile asupra prețului de cost.

Problema stabilirii unor relații de legătură a forțelor de strîngere și a celor care acționează asupra piesei în timpul lucrului este abordată într-un număr mare de lucrări, contribuții valoroase aducînd autorii lucrărilor [2], [4].

În lucrarea [2] se face o analiză asupra factorilor care influențează mărimea forțele de strîngere prezentînd pentru unele cazuri particulare, simple, relațiile de calcul ale acestora, ținînd seamă și de rigiditățile reazemelor și ale elementelor de strîngere.

În lucrarea [4] se aduce o contribuție valoroasă în stabilirea acestor relații, prin aceea că, au fost generalizate pentru cazul acționării asupra piesei a unei singure componente a forțelor exterioare și anume, forța de greutate, stabilind mărimea forțelor de reglare care asigură conservarea schemei de bazare, la așezarea piesei în dispozitiv.

În lucrarea de față se extinde studiul teoretic asupra bazelor calculului forțelor de strîngere a pieselor în dispozitive, urmărind conservarea schemelor de bazare în timpul lucrului, în cazul cel mai general.

Relațiile stabilite pînă în prezent se referă la un număr limitat de cazuri particulare, care foarte rar pot fi întîlnite în practică, încît utilizarea lor în situații reale dau numai o orientare cu totul aproximativă asupra mărimii forțelor de strîngere.

---

* Manuscris predat redacției la data de 20 septembrie 1972

2. Fluxurile de forţe din sistemul piesă-dispozitiv

După strîngerea piesei în dispozitiv se poate considera că aceasta face corp comun cu dispozitivul aflîndu-se în timpul lucrului sub acţiunea a două fluxuri de forţe aşa cum se poate urmări în figura 1.

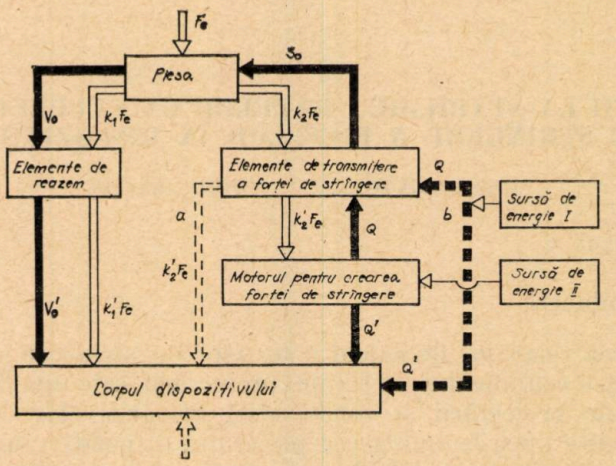


Fig. 1

Fluxul forţelor interioare (culoare neagră) poate fi creat cu două surse de energie I sau II. În cazul creării fluxului interior cu sursa de energie II, acesta se închide în corpul dispozitivului cu valoarea Q' şi în elementele de transmitere a forţei de strîngere cu valoarea Q. Piesa este strînsă cu forţa S_0 şi fiind aşezată pe elementele de reazem, în acestea va rezulta o reacţiune V_0.

În corpul dispozitivului fluxul forţelor interioare se închide cu reacţiunea V_0'.

Fluxul forţelor exterioare este compus din forţele şi momentele de aşchiere, masice şi secundare [4]. De obicei aceste forţe acţionează pe piesă formînd un flux F_e, care se desparte în două ramuri. O ramură închizîndu-se prin elementele de reazem cu valoarea K_1Fe şi în corpul dispozitivului cu valoarea $K_2'Fe$, iar cea de a doua prin elementele de strîngere cu valoarea K_2Fe şi în motor cu valoarea K'_2Fe şi nu trece în corpul dispozitivului.

De foarte multe ori, motorul pentru crearea forţei de strîngere nu este intercalat în fluxul forţelor exterioare, lucru care apare atunci cînd în lanţul de transmitere a forţei de strîngere se foloseşte un element ireversibil. În acest caz fluxul forţelor exterioare se închide în corpul dispozitivului pe ramura „a", iar fluxul forţelor interioare pe ramura „b". În mod similar se închid forţele şi în cazul cînd pentru realizarea strîngerii piesei se foloseşte energia musculară.

În cazul intercalării motorului în fluxul de forţe, situaţia se prezintă ca în figura 2, adică fluxul forţelor exterioare nu modifică reacţiunea

în corpul dispozitivului, fluxul forțelor în elementele de strîngere rămînînd constant.

Situația creării fluxului forțelor interioare cu o sursă de energie printr-un motor exterior, sau folosind energia musculară, se prezintă în

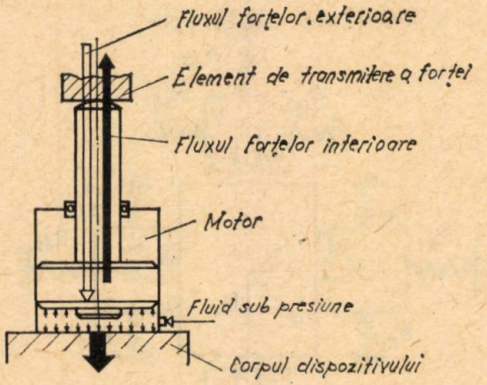


Fig. 2

figura 3. În acest caz forțele exterioare modifică reacțiunea din corpul dispozitivului. În continuare se va lua în discuție această ultimă situație care este mai complexă.

O caracteristică deosebit de importantă a celor două fluxuri de forțe interioare și exterioare este aceea că ele se aplică succesiv fapt ce impune realizarea echilibrului piesei atît la acțiunea fluxului forțelor interioare cît și în cazul cînd lucrează ambele fluxuri.

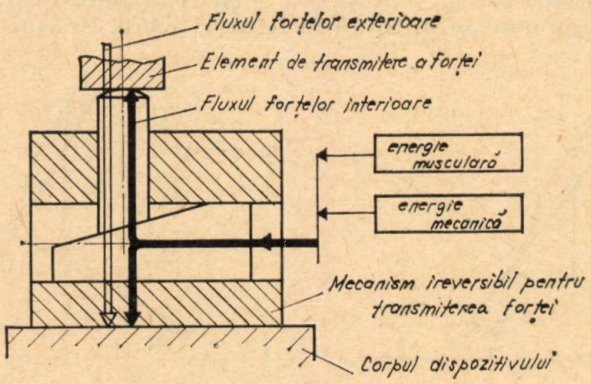


Fig. 3

3. Stabilirea relației generale dintre forțele inițiale de strîngere și forțele care iau naștere într-un cuplu „element de reazem — element de strîngere", după aplicarea forțelor exterioare.

Pentru stabilirea acestei relații se pleacă de la modelul prezentat în figura 4, în care se prezintă două cupluri situate în același plan, iar forțele exterioare sînt reduse la o singură rezultantă *Fe* cu punct de aplicație la intersecția axelor celor două cupluri, acționînd asupra piesei.

S-a considerat că elementele 1 și 2 sînt reazeme, iar 3 și 4 elemente de strîngere. De asemenea, s-a notat pe figură rigiditățile direcționale după cele două axe.

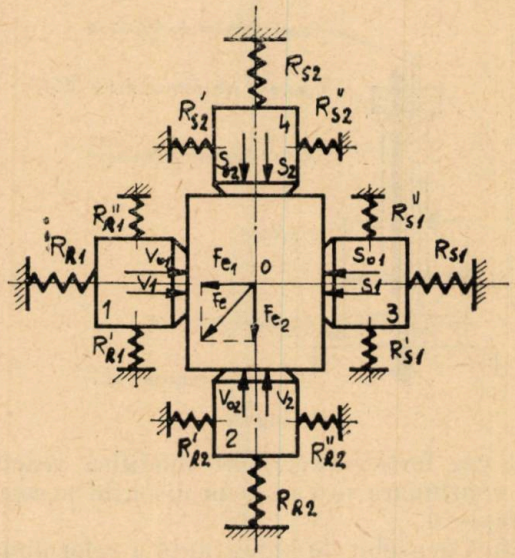


Fig. 4

La acțiunea forțelor interioare S_{01} și S_{02} pe elementele de reazem vor apare reacțiunile V_{01} și respectiv V_{02}, realizîndu-se un echilibru pe fiecare cuplu, așa cum se prezintă în figurile 5 și 6. Se consideră că strîn-

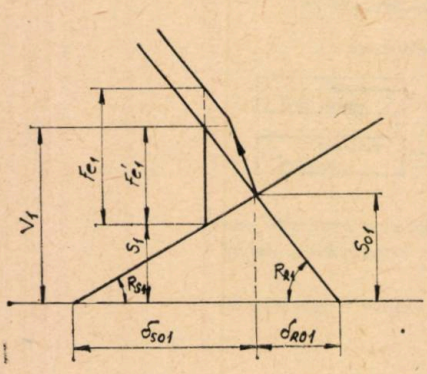


Fig. 5

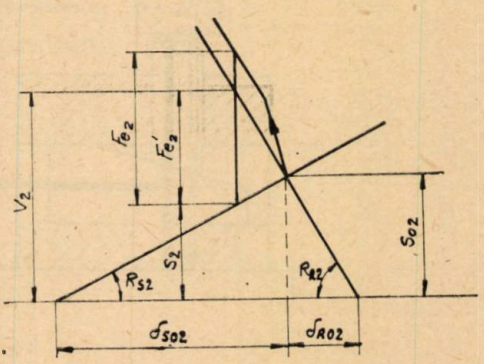


Fig. 6

gerile pe cele două cupluri se realizează simultan așa încît $V_{01} = S_{01}$, iar $V_{02} = S_{02}$.

Pe figuri s-a notat cu R_{R1}, R_{R2}, R_{S1} și R_{S2} rigiditățile corespunzătoare ale elementelor, iar cu δ_{R01}, δ_{R02}, δ_{S01}, δ_{S02} deformațiile corespunzătoare ale elementelor. S-a considerat caracteristica de rigiditate ca fiind lineară.

Prin aplicarea forței exterioare Fe, pe cele două cupluri se va realiza un nou echilibru al forțelor interioare și exterioare.

Presupunînd că Fe_2 este nulă, iar Fe_1 crește de la zero, atunci, la valori ale forței exterioare mai mici decît o anumită valoare, nu există mișcare relativă între piesă și elementele 2 și 4, piesa făcînd corp comun cu acestea. Piesa se deplasează pe direcție forței Fe_1 împreună cu elementele 1, 2 și 4 urmată de elementul 3. Elementele 1, 2 și 4 se vor opune deformațiilor elastice cu o rigiditate sporită față de rigiditatea R_{R1} a elementului 1.

La o anumită valoare a forței exterioare Fe_1 elementele 2 și 4 capătă asemenea deformații elastice pe direcția forței, încît depășește forța de frecare. Din acest moment se produce alunecarea între piesă și elementele 2 și 4, iar creșterea în continuare a forței urmînd să fie preluată în întregime de cuplul 1—3.

La acțiunea simultană a celor două componente ale forței exterioare Fe, rezultă că la realizarea echilibrului între forțele interioare și cele exterioare vor apare reacțiunile V_1 și V_2 pe elementele de reazem și respectiv S_1 și S_2 pe elementele de strîngere.

În acest caz $V_1 - S_1 = F'_{e1}$, iar $V_2 - S_2 = F'_{e2}$, unde F'_{e1} și F'_{e2} reprezintă mărimea forțelor exterioare preluate de cele două cupluri pe direcția axelor lor.

Diferențele $Fe_1 - F'_{e1}$ și $Fe_2 - F'_{e2}$ reprezintă părți din forțele exterioare preluate prin frecare.

Pentru cazul cînd forțele exterioare sînt îndreptate în sensul forțelor S_{01} și S_{02} urmărind figurile 5 și 6 se poate scrie:

$$S_{01} = \frac{R_{S1}}{R_{S1} + R_{R1}} \left(V_1 + \frac{R_{R1}}{R_{S1}} S_1 \right) \tag{1}$$

$$S_{02} = \frac{R_{S2}}{R_{S2} + R_{R2}} \left(V_2 + \frac{R_{R2}}{R_{S2}} S_2 \right) \tag{2}$$

Pentru cazul cînd forțele exterioare sînt îndreptate împotriva forțelor S_{01} și S_{02} relațiile anterioare devin:

$$S_{01} = \frac{R_{R1}}{R_{S1} + R_{R1}} \left(S_1 + \frac{R_{S1}}{R_{R1}} V_1 \right) \tag{3}$$

$$S_{02} = \frac{R_{R2}}{R_{S2} + R_{R2}} \left(S_2 + \frac{R_{S2}}{R_{R2}} V_2 \right) \tag{4}$$

Aceste relații se pot scrie concentrat dacă se folosește funcția „Λ” (sau), indicînd că în relație rămîn, numai primele variabile sau numai următoarele. Se vor nota, de asemenea, rigiditățile elementelor cuplului cu R_{Ri} respectiv cu R_{Si}, „i” fiind un indice indicînd numărul cuplului.

$$S_{0i} = \frac{R_{Ri} \wedge R_{Si}}{R_{Ri} + R_{Si}} \left[S_i \wedge V_i + \left(\frac{R_{Si}}{R_{Ri}} \wedge \frac{R_{Ri}}{R_{Si}} \right) (V_i \wedge S_i) \right] \tag{5}$$

Această relaţie exprimă legătura dintre forţa de strîngere iniţială şi forţele existente în elementele cuplului după aplicarea forţelor exterioare, sub forma cea mai generală.

Pentru o schemă cu $i = 6$ cupluri forţele exterioare crează forţe, în elementele unui cuplu cu sensul către elementul de reazem pentru un număr K de cupluri, iar pentru restul de $6\text{-}K$ cupluri cu sensul către elementul de strîngere.

4. Modelul matematic de calcul al forţelor de strîngere

Pentru stabilirea modelului matematic se consideră un model fizic complex care corespunde unei piese prismatice rezemată în 6 puncte şi care este strînsă corespunzător cu 6 elemente de strîngere, formînd astfel şase cupluri „element de reazem — element de strîngere". Cele şase puncte de reazem formează sistemul de baze de prelucrare [5]. Cele două fluxuri de forţe vor fi proiectate în acest sistem. În figura 7 se prezintă modelul de calcul unde s-a notat:

$A_1, A_2, \ldots, A_6$, punctele de reazem cuprinse în planele sistemului xyz;

$A_7, A_8, \ldots, A_{12}$, punctele de aplicaţie ale forţelor de strîngere;

$V_1, V_2, \ldots, V_6$, reacţiunile în punctele de reazem;

$S_1, S_2, \ldots, S_6$, forţele de strîngere;

$F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3$, componentele torsorului forţelor exterioare aplicate în punctul C.

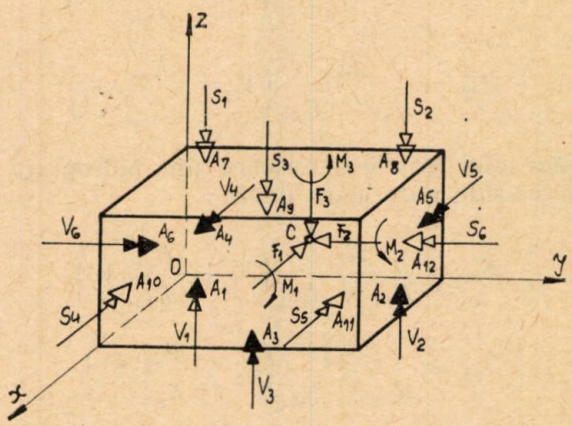


Fig. 7

Pentru ca piesa să rămînă în echilibru sub acţiunea torsorului forţelor exterioare este necesar ca torsorul de reducere să fie nul.

$$\begin{cases} R = 0 \\ M = 0 \end{cases} \tag{6}$$

sau raportate la axele sistemului :

$$\begin{cases} F_{xi} = 0 \\ F_{yi} = 0 \\ F_{zi} = 0 \\ M_{xi} = (y_i F_{zi} - Z_i F_{yi}) - M_1 = 0 \\ M_{yi} = (z_i F_{xi} - x_i F_{zi}) - M_2 = 0 \\ M_{zi} = (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}) - M_3 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

În sistemul 7 în afară de proiecţiile forţelor trecute pe figura 7 trebuie să fie cuprinse şi proiecţiile forţelor de frecare dintre piesă şi cele 12 elemente ale cuplurilor. Se consideră că forţele de frecare au o poziţie oarecare în planul de contact, iar pentru proiecţia lor pe axele de coordonate ale sistemului se foloseşte cosinusurile directoare ale acestora. Aceste forţe de frecare vor fi scrise funcţie de normala la suprafaţa de contact.

Nu se vor scrie dezvoltat relaţiile 7 întrucît ar ocupa un spaţiu prea mare.

Se face observaţia că, atunci cînd se ia în considerare influenţa forţelor de frecare trebuie să se ţină seamă de rigidităţile elementelor pe direcţia acestora, întrucît piesa nu se poate deplasa liber pe elemente, astfel încît forţele de frecare să poată rezulta cu toată mărimea lor. De exemplu, dacă se consideră cazul unui element cu joc, situaţia apare ca în figura 8 unde influenţa forţei de frecare este nulă în limitele jocului.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii 7 se trece la forma matriceală a acestuia urmărind separarea necunoscutelor care interesează.

Se fac următoarele notaţii :

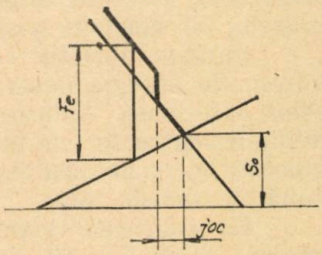


Fig. 8

$V_i (i = 1, \ldots, 6)$ şi $S_i (i = 1, \ldots, 6)$ se vor nota în ordine cu x_j $(j = 1, \ldots, 12)$, coeficienţii necunoscutelor x_j se notează cu a_{ij}, iar termenii liberi cu $b_i (i = 1, \ldots, 6)$.

Forma matriceală a sistemului 7 scrisă simplificat devine :

$$A.X = B. \tag{8}$$

unde A este o matrice dreptunghiulară 6×12, X o matrice vector coloană cu 12 linii, iar B produsul a două matrice.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots\ldots a_{1.12} \\ a_{21} a_{22} \ldots\ldots a_{2.12} \\ \vdots \\ a_{61} a_{62} \ldots\ldots a_{6.12} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{12} \end{Vmatrix} \tag{10}$$

$$B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_6 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -zc & yc & 1 & 0 & 0 \\ zc & 0 & -xc & 0 & 1 & 0 \\ -yc & xc & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Vmatrix} = B_c \cdot B_z \tag{11}$$

Acestui sistem i se pot ataşa condiţiile restrictive $x_j > 0$, dar deoarece rangul matricei este mai mic decît numărul necunoscutelor, sistemul este nedeterminat şi poate fi rezolvat dacă se va găsi o funcţie de optimizat (funcţie obiectiv).

Condiţiile restrictive $x_j > 0$ corespund principiului conservării schemelor de bazare [6].

Sub acţiunea torsorului forţelor exterioare, forţele date de forţele de strîngere în unele elemente ale cuplurilor vor scade, iar în elementele corespunzătoare ale cuplurilor vor creşte, aşa încît, în final, sub acţiunea torsorului, şase elemente vor fi încărcate cu forţe mai mari decît cele iniţiale, iar celelalte şase cu forţe mai mici.

Funcţia obiectiv se alege, aşa încît, să corespundă unui consum minim de energie pentru realizarea echilibrului forţelor interioare şi a celor exterioare. Aplicarea acestui criteriu permite obţinerea unor valori minime pentru forţele interioare (de strîngere). Pentru stabilirea funcţiei obiectiv se va analiza energia, pe un cuplu, la aplicarea succesivă a celor două fluxuri de forţe.

La aplicarea fluxului de forţe interioare energia totală W_{oi} din cuplul „i" va fi egală cu lucrul mecanic de deformaţie al celor două ele-

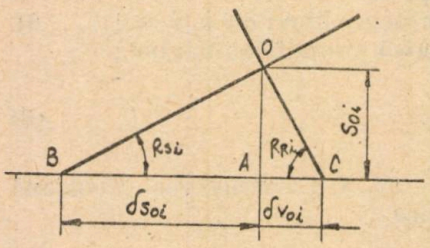


Fig. 9

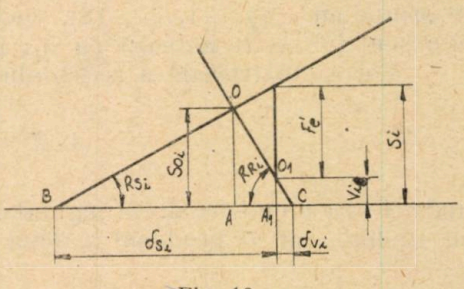


Fig. 10

mente ale cuplului, deci va fi egală cu suma suprafeţelor triunghiurilor OAB şi OAC (fig. 9).

$$W_{oi} = \frac{S_{oi}^2}{2}\left(\frac{R_{Ri} + R_{Si}}{R_{Ri} \cdot R_{Si}}\right) \tag{12}$$

După aplicarea forţelor exterioare starea energetică a sistemului se modifică aşa cum se prezintă în fig. 10.

Energia de deformaţie pe elementul de reazem scade, iar pe elementul de strîngere creşte. $F'e$ reprezintă acţiunea forţelor exterioare asupra cuplului.

Energia totală pe cuplul „i" W_i, după aplicarea forţelor exterioare va fi :

$$W_i = \frac{V_i^2}{2R_{Ri}} + \frac{S_i^2}{2R_{Si}} \tag{13}$$

Pentru ca funcţia W_i să fie minimă în condiţiile că V_i şi $S_i \geqslant 0$ şi că nu pot fi nule V_i şi S_i ale aceluiaşi cuplu, trebuie să se respecte relaţia :

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{(V_i \wedge S_i)^2}{R_{Ri} \wedge R_{Si}} = 0. \tag{14}$$

Cum rigidităţile nu pot fi infinite pentru respectarea relaţiei 14 trebuie ca :

$$V_i \wedge S_i = 0 \; ; \; (i = 1, \ldots, 6). \tag{15}$$

Trecînd la forma matriceală a relaţiei 5 şi ţinînd seama că termenul al doilea, aplicînd funcţia obiectiv, este întotdeauna nul, se poate scrie :

$$Z = D.Y. \tag{16}$$

Sau scris dezvoltat :

(17)

$$\begin{Vmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \\ S_{04} \\ S_{05} \\ S_{06} \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{R_{R1} \wedge R_{S1}}{R_{R1} + R_{S1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{R2} \wedge R_{S2}}{R_{R2} + R_{S2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{R3} \wedge R_{S3}}{R_{R3} + R_{S3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_{R4} \wedge R_{S4}}{R_{R4} + R_{S4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_{R5} \wedge R_{S5}}{R_{R5} + R_{S5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_{R6} \wedge R_{S6}}{R_{R6} + R_{S6}} \end{vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} S_1 \wedge V_1 \\ S_2 \wedge V_2 \\ S_3 \wedge V_3 \\ S_4 \wedge V_4 \\ S_5 \wedge V_5 \\ S_6 \wedge V_6 \end{Vmatrix}$$

Aplicînd funcţia obiectiv şi sistemului 8, matricea A se transformă în C care este o matrice patrată :

$$C = \begin{Vmatrix} a_{17(1)} & a_{18(2)} & \cdots & a_{1\cdot 12(6)} \\ a_{27(1)} & a_{22(8)} & \cdots & a_{2\cdot 12(6)} \\ \vdots & & & \\ a_{67(1)} & a_{68(2)} & \cdots & a_{6\cdot 12(6)} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

(Cifra din paranteză poate înlocui pe aceea din faţa ei la aplicarea funcţiei „sau"), iar matricea X se transformă în Y.

Astfel, sistemul 8 devine :

$$CY = B. \tag{19}$$

Din relaţiile 16 şi 19 se elimină Y. Înmulţind în 19 cu inversa lui C şi introducînd în 16 se obţine :

$$Z = DC^{-1}B. \tag{20}$$

Ţinînd seama de expresiile anterioare se poate scrie :

$$\begin{Vmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \\ S_{04} \\ S_{05} \\ S_{06} \end{Vmatrix} = D \cdot C^{-1} \cdot B_c \begin{Vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Vmatrix} \tag{21}$$

Relaţia 21 este relaţia generală de calcul a forţelor de strîngere funcţie de trosorul forţelor exterioare.

Soluţiile date de relaţia 21 prezintă cel mai mic consum de energie deoarece presupune că nici un element nu este încărcat inutil cu forţe.

Torsorul forţelor exterioare, de obicei, îşi schimbă punctul de aplicaţie, ceea ce impune să se ia în considerare mai multe poziţii ale acestuia pentru a determina valorile maxime ale forţelor de strîngere.

5. Concluzii

Considerînd sistemul piesă-dispozitiv ca element al sistemului tehnologic, în cazul cel mai general de acţiune a forţelor exterioare s-au stabilit relaţiile de legătură între forţele interioare şi exterioare, permiţînd calculul forţelor de strîngere în condiţiile unui consum minim de energie.

Relaţiile de calcul fiind stabilite pe un model complex permit ca prin particularizări să se obţină soluţiile pentru orice situaţie reală.

Forţa stabilită cu aceste relaţii este optimă din punct de vedere al consumului de energie.

Utilizarea calculului matriceal la rezolvarea acestei probleme este deosebit de utilă deoarece permite evidenţierea uşoară a parametrilor care interesează.

Rezolvarea practică pentru găsirea unor soluţii generale nu se poate face decît utilizînd aparatura electronică de calcul.

Pentru rezolvarea integrală a problemei este necesar să se stabilească criteriul matematic, de aplicare a funcţiei obiectiv, precum şi modul de luare în considerare a forţelor de frecare.

Această teorie poate fi aplicată pentru orice piesă, supusă unor solicitări, din ansamblul unei maşini.

Catedra de tehnologia construcţiei de maşini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Ionescu H. ş.a.* Programarea lineară. Bucureşti, Editura ştiinţifică 1964.
2. *Korsakov V. S.* Osnovî konstruirovania prisposoblenii. Moscova, Maşinostroenie, 1965.
3. *Stoenescu Al. ş.a.* Curs de mecanică teoretică. Editura didactică şi pedagogică 1957.
4. *Tache Voicu*, Contribuţii la studiul schemelor de fixare şi al forţelor care solicită ansamblul dispozitiv – piesă la prelucrările pe maşini unelte (Teză de doctorat). Institutul politehnic Bucureşti, 1972.
5. *Tache Voicu, Ungureanu Ion*, Consideraţii privind definirea şi utilizarea bazelor de cotare şi de prelucrare în construcţia de maşini. Revista Construcţia de maşini Nr. 7/1972.
6. *Ungurea I., Tache V.*, Cercetări experimentale privind stabilirea criteriului de conservare a schemelor de bazare. În curs de apariţie la revista Construcţia de maşini.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

C.Z.: 621.9

DETERMINAREA MODURILOR DE VIBRAȚII DIN MECANISMUL FICTIV AL LANȚULUI DE RULARE AL MAȘINILOR DE PRELUCRAT ROȚI DINȚATE

CONSTANTIN MINCIU

1. Considerații generale

În cazul L C R, raportul de transfer al mecanismului fictiv i_w, care reprezintă caracteristica de rigidizare cinematică a lanțului cinematic, trebuie să fie egal cu 1. Datorită unor cauze de natură cinematică și dinamică acest raport nu-și păstrează această valoare. Cauzele cinematice nu fac studiul acestei lucrări.

Cauzele dinamice influențează asupra preciziei dinamice a mașinii-unelte. Precizia dinamică a unui lanț cinematic reprezintă precizia cu care acesta transmite mișcarea ținîndu-se seama de procesul de așchiere și de faptul că elementele care-l formează sînt deformabile și au inerție.

În L C R, în arborii săi apar vibrații torsionale. Acestora li se adaugă și deformațiile elastice de contact dintre arbori și pene, pene și butuci, dintre dinții roților dințate, deformații de încovoiere ale arborilor etc., toate putînd fi reduse la deformații torsionale. Toate aceste deformații elastice sînt cu atît mai mari cu cît efortul perturbator este mai mare. Din acest punct de vedere, mașinile de frezat roți dințate cu freză-melc lucrează dezavantajos în comparație cu celelalte mașini-unelte, deoarece pe o porțiune a LCR se suprapune lanțul cinematic principal la capătul căruia se găsește scula, și unde apar forțele de așchiere cu valorile cele mai mari.

Pe scurt, mecanismul apariției vibrațiilor forțate în LCR este următorul : la început are loc o torsionare de „mers în gol" care depinde de masele în mișcare, de forțele de frecare și de elasticitatea sistemului. Această torsionare este constantă și nu influențează precizia L C R. În momentul așchierii, cînd dinții sculei intră și ies din semifabricat, efortul de așchiere variază în limite foarte largi (putînd ajunge la variații de 50% din efortul maxim). La creșterea forțelor apare o „tensionare" iar la scăderea lor o „detensionare" sub efectul forțelor elastice. Aceasta duce la accelerarea mișcării sculei care devansează poziția corespunzătoare a

* Manuscris predat redacției la data de 23 noiembrie 1971

piesei avînd ca efect creşterea eforturilor de aşchiere şi „tensionarea" elementelor L C R. Această „tensionare" atrage după sine o rămînere în urmă a sculei faţă de piesă după care fenomenul se repetă.

Se observă că are loc o acumulare şi o cedare de energie (pe seama eforturilor perturbatoare şi a forţelor elastice) care se traduce prin apariţia vibraţiilor forţate.

2. **Calculul dinamic** al L C R are drept scop determinarea caracteristicilor naturale ale acestuia (frecvenţa proprie, etc.) şi a modurilor de vibraţie forţată şi în special amplitudinile acestor vibraţii. Primele caracteristici sînt necesare pentru a evita apariţia instabilităţii dinamice iar celelalte vor da imaginea calitativă şi cantitativă a preciziei dinamice a L C R.

Calculul dinamic este un calcul de vibraţii libere şi întreţinute ale unui sistem dinamic cu mai multe grade de libertate format de L C R.

Ecuaţia de mişcare a unui astfel de sistem este dată sub formă matricială :

$$J\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + K_t\varphi = M_t \tag{1}$$

sau sub forma ecuaţiei lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial D}{\partial \varphi_i} = Q_i \tag{2}$$

în care

J, C, K_t, M_t reprezintă matriciile momentelor de inerţie, coeficienţilor de amortizare, constantelor elastice şi a momentelor perturbatoare.

E_c, E_p, D energia cinetică, energia potenţială şi funcţia de disipare

Q_i forţele generalizate.

Pentru calculul caracteristicilor dinamice este necesar a se stabili schema de calcul, precum şi determinarea caracteristicilor de mai sus.

2. 1. *Schema dinamică de calcul.* Plecînd de la schema cinematică a L C R (fig. 1) se poate ajunge la schema dinamică de calcul.

În figura 1 este reprezentată schema cinematică a LCR de la o maşină de frezat roţi dinţate cu freză-melc. Experienţele de determinare a vibraţiilor mecanismului fictiv au fost făcute pe o asemenea maşină avînd în vedere unele considerente : largă răspîndire în construcţia de maşini precum şi faptul că pe o porţiune a LCR se suprapune lanţul cinematic principal, motiv pentru care la capătul LCR corespunzător sculei forţele perturbatoare să fie relativ mari.

Literatura de specialitate [5], [6], [8], indică modul de determinare a schemei dinamice de calcul reprezentată în figura 2, de aceea nu se va insista asupra acestui lucru. Facem însă observaţia că momentele de iner-

ție J_i sînt corespunzătoare angrenajelor din schema cinematică, iar consr tantele elastice K_i sînt corespunzătoare elasticității arborilor, îmbinărilo- cu pană sau caneluri, lagărelor, roților dințate, etc., care au fost reduse la

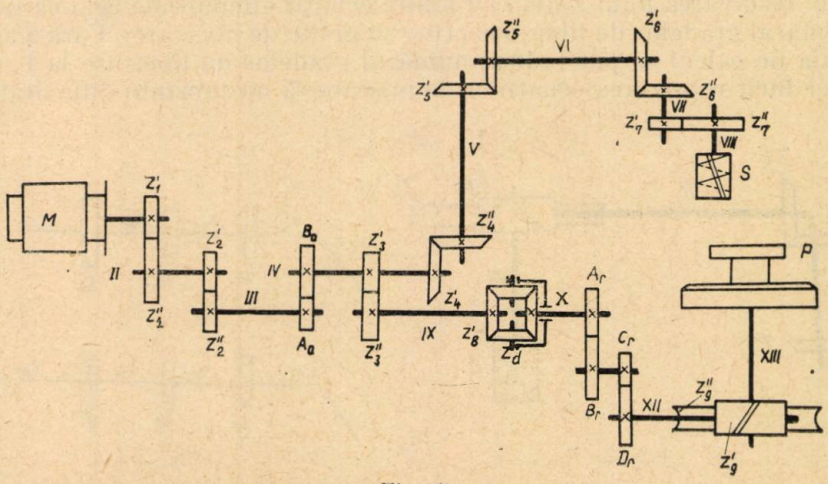


Fig. 1

elasticități torsionale la axele arborilor de rang i [4], [6]. De asemenea, la capetele LCR apar cele două momente perturbatoare M_{Sarm} și M_{Parm} care întreține vibrațiile forțate.

Se va insista, însă, asupra unor particularități ce decurg din existența în lanțul cinematic a unui angrenaj melc-roată melcată. Pentru aceasta,

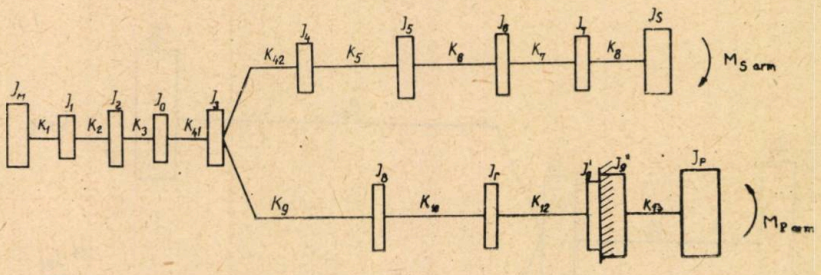


Fig. 2

în figura 3, a fost reprezentată o parte a LCR „ramura sculei" în care apare un asemenea angrenaj notat cu z_6z_7. Fenomenul de auto-frînare care apare în acest angrenaj modifică substanțial schema de calcul și implicit ecuațiile de mișcare. În momentul apariției „tensionării" elementului final al LCR schema de calcul nu se schimbă față de cea din figura 2 (fig. 4 a), dar în momentul „detensionării" (pe seama forțelor elastice), datorită autofrînării roata melcată nu mai rotește melcul și în schema dinamică de calcul, în locul acestui angrenaj, apare o încastrare care separă lanțul cinematic în două, ca în figura 4 b.

Ţinînd seama de aceste considerente schema dinamică de calcul din figura 2 trebuie modificată în timpul semiperioadei de de tensionare cu introducerea încastrării în dreptul momentului de inerţie J_9.

L C R formează un sistem dinamic cu multe grade de libertate care duce la rezolvarea unui sistem cu multe ecuaţii diferenţiale egal ca număr cu numărul gradelor de libertate (10—20 grade de libertate). Fără a afecta precizia de calcul se pot reduce numărul gradelor de libertate la 4—5 în aşa fel încît rezolvarea ecuaţiilor de mişcare să nu prezinte dificultăţi [6]

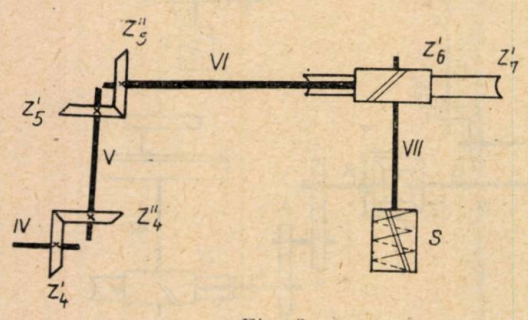
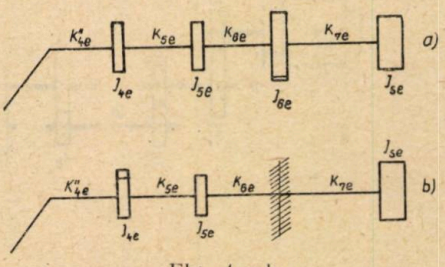


Fig. 3



Flg. 4 a,b

O metodă de reducere a numărului gradelor de libertate este indicată în lucrările [6], [7] motiv pentru care nu se va insista în lucrarea de faţă. Folosind această metodă se poate ajunge la schema dinamică de calcul reprezentată în figura 5 în care indicele r arată că elementele dinamice sînt reduse. Calculul dinamic se va efectua avînd schema dinamică din figura 5.

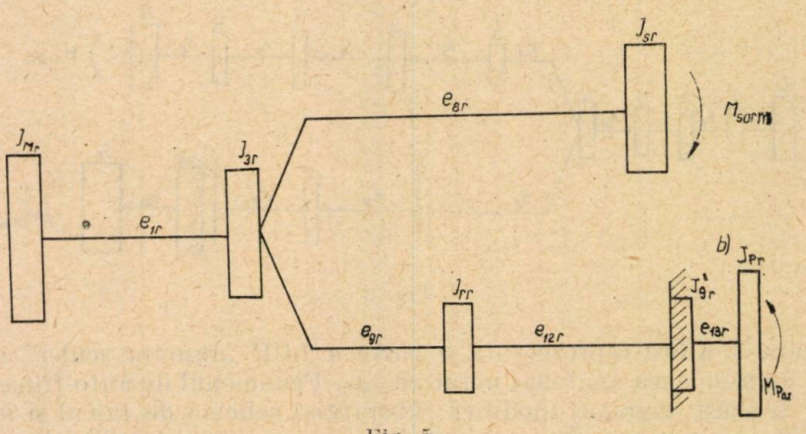


Fig. 5

2.2. *Determinarea momentelor perturbatoare.* La capetele L C R apar momentele forţelor de aşchiere a căror variaţie poate căpăta diferite forme depinzînd de modul de prelucrare prin rulare al roţii dinţate ce se execută (frezare, mortezare, etc.).

În figura 6 sînt reprezentate diagramele de variaţie a momentelor forţelor de aşchiere la axele elementelor mecanismului fictiv (scula şi piesa) care au fost determinate prin măsurare cu ajutorul unor dornuri tensometrice de construcţie proprie.

Momentele pot fi descompuse într-o componentă medie constantă M_m şi o componentă variabilă M_p (pulsatorie).

Componenta medie M_m este anulată de cuplul motor al motorului de antrenare.

Componenta variabilă duce la apariţia şi întreţinerea vibraţiilor forţate. Această componentă poate fi adusă oricînd sub formă armonică (cu ajutorul seriilor Fourier).

Din figura 6 se poate deduce forma ecuaţiilor momentelor perturbatoare

— la axul sculei

$$M_{Sarm} = M_{s_1} \sin \beta_1 t + M_{s_2} \sin \beta_2 t \tag{3}$$

— la axul piesei

$$M_{Parm} = M_{P_1} \sin \beta_1 t + M_{P_2} \sin \beta_2 t$$

în care $M_{S(P)}$ reprezintă amplitudinile momentelor perturbatoare cu semnificaţiile din figura 6 ; β_1 este pulsaţia corespunzătoare rotaţiei frezei iar β_2 este pulsaţia corespunzătoare procedeului de frezare

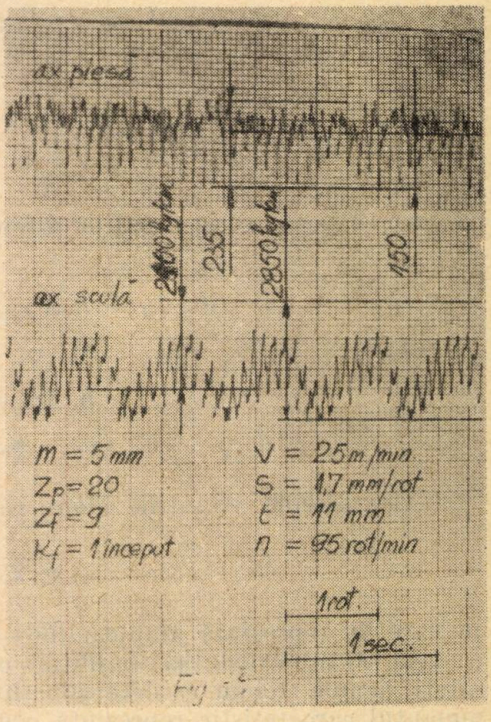


Fig. 6

$$\beta_1 = 2\pi \frac{n_f}{60}$$

$$\beta_2 = 2\pi \frac{z_f \cdot n_f}{60} \tag{4}$$

în care n_f şi z_f reprezintă turaţia şi numărul de dinţi ai frezei-melc. Mai multe amănunte privind momentele de aşchiere în lucrarea [2].

Facem observaţia că forţele de frecare şi inerţie fiind mult mai mic în comparaţie cu forţele de aşchiere, acţiunea lor va fi neglijată.

2.3. *Determinarea caracteristicilor naturale ale L C R* se face plecînd de la ecuaţia lui Lagrange (2) în care se face $Q_i = 0$ şi pentru simplificare se consideră că şi energia disipată este nulă. Deci :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} = 0 \tag{5}$$

Pentru sistemul dinamic din figura 5 energiile cinetică şi potenţială sînt (pentru exemplul nostru vom considera faza de „detensionare" în care apare încastrarea sistemului dinamic)

$$E_c = \frac{J_{Mr}\dot{\varphi}_M^2}{2} + \frac{J_{3r}\dot{\varphi}_3^2}{2} + \frac{J_{sr}\dot{\varphi}_s^2}{2} + \frac{J_{rr}\dot{\varphi}_r^2}{2} \tag{6}$$

$$E_p = \frac{K_{1r}(\varphi_M - \varphi_3)^2}{2} + \frac{K_{8r}(\varphi_3 - \varphi_s)^2}{2} + \frac{K_{gr}(\varphi_3 - \varphi)^2}{2} + \frac{K_{12r}\varphi_r^2}{2}$$

cu care se poate scrie ecuaţiile diferenţiale ale sistemului dinamic redus

$$\begin{gathered} J_{Mr}\ddot{\varphi}_M + K_{1r}(\varphi_M - \varphi_3) = 0 \\ J_{3r}\ddot{\varphi}_3 + K_{8r}(\varphi_3 - \varphi_s) + K_{gr}(\varphi_3 - \varphi_r) - K_{1r}(\varphi_M - \varphi_3) = 0 \\ J_{sr}\ddot{\varphi}_s - K_{8r}(\varphi_3 - \varphi_s) = 0 \\ J_{rr}\ddot{\varphi}_r - K_{gr}(\varphi_3 - \varphi_r) + K_{12r}\varphi_r = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Considerînd vibraţiile libere ca fiind armonice de forma :

$$\varphi_i = \Phi_i \sin p_i t \tag{8}$$

în care Φ_i reprezintă amplitudinea iar p_i pulsaţia proprie, introducînd ecuaţia (8) în sistemul (7) se obţine un sistem omogen care pentru a avea soluţii nenule trebuie ca determinantul său caracteristic să fie nul. Determinantul caracteristic reprezintă ecuaţia pulsaţiilor proprii

$$\Delta(p^2) \equiv \begin{vmatrix} K_{1r} - J_{Mr}p^2 & -K_{1r} & 0 & 0 \\ -K_{1r} & K_{1r}+K_{8r}+K_{gr}-J_{3r}p^2 & K_{8r} & -K_{gr} \\ 0 & -K_{8r} & -K_{8r}-J_{sr}p^2 & 0 \\ 0 & -K_{gr} & 0 & K_{gr}+K_{12r}-J_{rr}p^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Rezolvînd acest determinant şi egalîndu-l cu zero se obţine ecuaţia pulsaţiilor proprii sub forma :

$$A(p^2) + B(p^2)^3 + C(p^2)^2 + D(p^2) + E = 0 \tag{10}$$

în care A, B, C, D, E, sînt constante funcţie de J_i şi K_i.

Din rezolvarea acestei ecuaţii se obţine pulsaţiile proprii ale sistemului cu care acesta poate vibra cu una sau cu toate aceste pulsaţii.

De făcut remarca că nu interesează coeficienţii de influenţă ai amplitudinilor pulsaţiilor proprii.

2.4. *Determinarea amplitudinilor vibrațiilor forțate* se face plecînd de la ecuația (1) sau (2) în care apare și membrul al doilea sub forma ecuațiilor (3).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \varphi_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} = \sum_{i=1}^{n} M_{s(P)} \sin \beta_i t \tag{11}$$

Pentru sistemul dinamic din figura 5 în perioada de „tensionare" ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt :

$$\begin{gathered}
J_{Mr}\ddot{\varphi}_M + K_{1r}(\varphi_M - \varphi_3) = 0 \\
J_{3r}\ddot{\varphi}_3 + K_{8r}(\varphi_3 - \varphi_s) + K_{9r}(\varphi_3 - \varphi_r) - K_{1r}(\varphi_M - \varphi_3) = 0 \\
J_{sr}\ddot{\varphi}_s - K_{8r}(\varphi_3 - \varphi_s) = M_{s1} \sin \beta_1 t + M_{s2} \sin \beta_2 t \\
J_{rr}\ddot{\varphi}_r - K_{9r}(\varphi_3 - \varphi_r) - K_{12r}(\varphi_P - \varphi_r) = 0 \\
J_{Pr}\ddot{\varphi}_y - K_{12r}(\varphi_P - \varphi_r) = M_{P1} \sin \beta_1 t + M_{P2} \sin \beta_2 t
\end{gathered} \tag{12}$$

Pentru perioada de „detensionare", ultima ecuație dispare.

Soluția generală a sistemului este formată din soluția sistemului omogen (7) la care se adaugă o vibrație forțată sub forma :

$$\varphi_{fs} = \Phi_{s1} \sin \beta_1 t + \Phi_{s2} \sin \beta_2 t$$

$$\varphi_{fP} = \Phi_{P1} \sin \beta_1 t + \Phi_{P2} \sin \beta_2 t \tag{13}$$

Soluția sistemului omogen (7) se amortizează repede și deci nu ne interesează. Din punct de vedere al preciziei L C R interesează mărimea amplitudinilor.

Amplitudinea vibrațiilor forțate este dată de relația [8].

$$\Phi_{s(P)i} = \frac{\Delta(i)}{\Delta(\beta^2)} \tag{14}$$

în care $(\Delta\gamma^2)$ reprezintă determinantul (7) (Δp^2) în care s-a înlocuit p^2 prin β^2, iar $\Delta(i)$ reprezenta același determinant în care se înlocuiesc coloanele de rang i cu amplitudinile forțelor generalizate date sub forma (3), adică cu următorul vector coloană :

$$[f] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{si} \\ 0 \\ M_{Pi} \end{bmatrix} \tag{15}$$

În perioada de „detensionare" (schema fig. 5) cînd apare încastrarea $\Delta(s)_1$ pentru armonica 1 va fi determinantul (9) în care p^2 se transformă în β^2 iar coloana a treia se înlocuiește cu vectorul coloană (15) pentru această perioadă :

$$\Delta(s)_1 = \begin{vmatrix} K_{1r}-J_{Mr}\beta_1^2 & -K_{1r} & 0 & 0 \\ -K_{1r} & K_{1r}+K_{8r}+K_{gr}-J_{3r}\beta_1^2 & 0 & -K_{gr} \\ 0 & -K_{8r} & M_{s1} & 0 \\ 0 & -K_{gr} & 0 & K_{gr}+K_{12r}-J_{rr}\beta_1^2 \end{vmatrix} \tag{16}$$

În perioada de „tensionare" $\Delta(s)_1$ va fi un determinant de 5 linii cu 5 coloane în care apare $si M_{P1}$.

Pentru armonica 2 $\Delta(s)_2$ este același determinant în care se înlocuiește M_{s1} cu M_{s2} și M_{P1} cu M_{P2}.

Pentru axul piesei în perioada de „tensionare" amplitudinea se determină ca în cazul unui sistem cu 1 grad de libertate

$$\Phi_{P1(2)} = \frac{M_{P1(2)}}{K_{13r} - (J''_{gr} + J_{Pr})\beta_{1(2)}^2} \tag{17}$$

În perioada de „tensionare" (sistemul cu 5 grade de libertate) determinantul $\Delta(P)_{1(2)}$ va avea forma :

$$\Delta(P)_{1(2)} = \begin{vmatrix} K_{1r}-J_{Mr}\beta_{1(2)}^2 & -K_{1r} & 0 & 0 & 0 \\ -K_{1r} & K_{1r}+K_{8r}+K_{gr}-J_{3r}\beta_{1(2)}^2 & -K_{8r} & -K_{gr} & 0 \\ 0 & -K_{8r} & K_{8r}-J_{sr}\beta_{1(2)}^2 & 0 & M_{s1(2)} \\ 0 & -K_{gr} & 0 & K_{gr}+K_{12r}-J_{rr}\beta_{1(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{12r} & M_{P1(2)} \end{vmatrix} \tag{18}$$

În felul acesta se determină amplitudinile vibrațiilor forțate date de ecuațiile (13) care mișcări, în timpul prelucrării, introduc o alunecare între baza și rulanta mecanismului fictiv al LCR atrăgînd după sine o întreagă serie de abateri de la evolventa teoretică [4].

Experimental, au fost măsurate vibrațiile de la cele două axe ale mecanismului fictiv al LCR, una din diagrame fiind cea din fig. 7. Măsurarea s-a făcut cu ajutorul unor captori seismici pentru vibrații torsionale de construcție proprie [3] pe o mașină de frezat roți dințate cu freză-melc, mașină pe care s-au măsurat și momentele forțelor de așchiere (Fig. 6).

Din figură se poate observa că mișcările la cele două axe sînt de natura unor oscilații care sînt de forma ecuațiilor (13) ceea ce verifică ipotezele făcute.

Se pot observa pulsaţiile β_1 şi β_2 [4] datorate momentelor perturbatoare ale forţelor de aşchiere din figura 6.

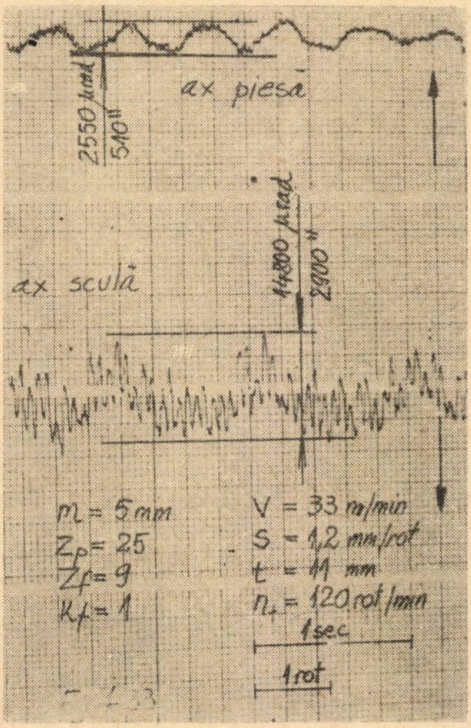


Fig. 7

În concluzie se poate spune că lucrarea de faţă indică metodica de calcul analitic a caracteristicilor dinamice ale LCR necesară la studiul şi proiectarea acestui lanţ cinematic pentru a-i mări precizia şi a evita cazurile de instabilitate dinamică. Calculul este util atît la proiectarea cît şi la utilizarea maşinii-unelte.

Catedra maşini-unelte şi scule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Bolez E.* Maşini-Unelte. Cinematica Ed. Tehnică 1969.
2. *Minciu C.* Măsurarea eforturilor de aşchiere la frezarea cu freză melc-modul în Construcţia de maşini nr. 4/1971.
3. *Minciu C.*, Măsurarea preciziei dinamice a lanţului cinematic de rulare cu ajutorul captorilor seismici pentru vibraţii torsionale în Construcţii de maşini nr. 2/1971.
4. *Minciu C.*, Influenţa deformaţiilor elastice asupra lanţului cinematic de rulare (disertaţie I.P.B.).
5. *Farber A. M.*, Tehnologhiceskaia tocinosti zuborezanie stankov i ee povişenia Moskva 1957.
6. *Rivin, E. I.* Dinamika privoda stankov Moskva 1966.
7. *Terskih, V. P.* Rascetî krutilnîh kolebanii silovîh i stankov Moskva 1954.
8. *Harris, C., Crede, C.*, Şocuri şi vibraţii vol. 1—3 (trad. limba engleză) Ed. Tehnică, 1968

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

REZISTENȚA MATERIALELOR

C. Z.: 539.384:669

UNTERSUCHUNGEN EINER ZERSTÖRUNGSFREIEN BESTIMMUNGSMETHODE DER STRECKGRENZE VON STÄHLEN*

K. SCHULLER

1. Einleitung

Die Beziehung zwischen verschiedenen Härtewerten (Brinell—, Rockwell—und Vickershärtezahlen) und den Werten der mechanischen Materialeigenschaften beschäftigt schon seit der Einführung der Härteprüfung (etwa im Jahre 1900) sowohl die Forscher als auch — und vielleicht vor allem — die Praktiker auf dem Gebiete der Materialprüfung, da eine Härteprüfung erstens leichter und zweitens zerstörungsfrei durchzuführen ist.

Was jedoch die Streckgrenze anbetrifft, muss gesagt werden, dass die Bemühungen, diese aus der Härte zu bestimmen, bis jetzt nicht zum gewünschten Resultat führten, da auf der einen Seite die erhaltenen Ergebnisse nicht allgemeingültig waren, auf der anderen Seite aber — trotz nachgewiesener Proportionalität zwischen Änderung der Streckgrenze und Änderung der Härte— die Streckgrenze nicht allein aus der Brinell- oder Vickershärte berechnet werden kann.

Die Ursache dafür ist vor allem darin zu suchen, dass die Härte — als Materialcharakteristik — die Vorgänge beim Strecken oder Fliessen eines Stahles nicht genügend erfasst.

Im Jahre 1959 wurde deshalb, nach langwierigen vorhergegangenen Studien, die Kugelschubhärte als neue Stahlcharakteristik eingeführt [1]**).

Im Gegensatz zu den anderen Härteprüfungen, wo der Eindruckkörper (Kugel, Pyramide, usw.) auf eine ebene Fläche angesetzt wird, wird bei der Bestimmung der Schubhärte eine Kugel in eine zylindrische Bohrung gepresst.

Ähnlich wie die „klassischen“ Härtewerte, wird die Schubhärte dabei als das Verhältnis zwischen der auf die Kugel aufgebrachten Kraft

*) Manuskript am 10 Dezember 1971 eingegangen.

**) Karel Waitzmann, welcher diesen Vorschlag machte, war bis zu seinem Tode (1968) an dem Institut für Theoretische und Angewandte Mechanik der Tschechoslowakischen Akademie tätig.

und der Fläche der durch plastische Verformung des Kontaktbereiches entstehenden Kugelzone definiert.

Diese Definition trägt auch der Verkleinerung des Bohrungsdurchmessers Rechnung, eine Tatsache, welche bei manchen Metallen durch Erhöhung der Genauigkeit und Empfindlichkeit von Bedeutung sein,

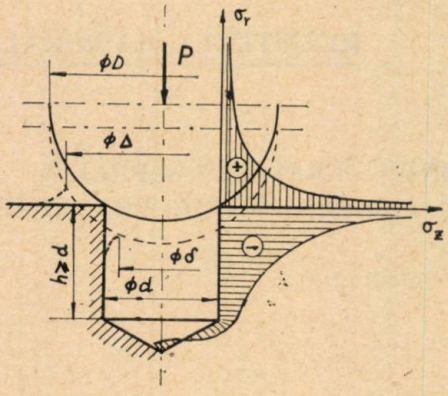


Fig. 1 — Geometrische Beziehungen und Spannungsverteilung bei der Kugelschubhärte — Prüfung

beziehungsweise den Einfluss der Ungenauigkeiten der Bohrung einschränken kann.

Bezeichnungen:

D	— Kugeldurchmesser
d	— Durchmesser der Bohrung
F_0	— Mantelfläche der Kugelzone
F_Δ, F_δ	— die den beiden Durchmessern der Kugelzone zugeordneten Flächen der Kugelkalotten
H_B	— Brinell — Härte
H_{KS}	— Kugelschubhärte
H_B^Δ, H_B^δ	— die den beiden Durchmessern der Kugelzone zugeordneten Brinellhärten
h	— Tiefe der Bohrung
P	— aufgebrachte Kraft (Prüfkraft)
Δ, δ	— grosser, beziehungsweise kleiner Durchmesser der Kugelzone
σ_S	— Zugstreckgrenze
σ_r, σ_z	— Spannungen in radialer, beziehungsweise in Richtung der Bohrachse
σ_B	— Bruchfestigkeit

Die Mantelfläche der Kugelzone wird leicht berechnet, so dass der Ausdruck der Kugelschubhärte, unter Benützung der in Abbildung 1 angegebenen Bezeichnungen, die Form

$$H_{KS} = \frac{P}{F_0} = \frac{2P}{\pi D(\sqrt{D^2 - \delta^2} - \sqrt{D^2 - \Delta^2})} \qquad (1)$$

erhält.

Sehr wichtig ist die Tatsache, dass dieser Ausdruck auch in Abhängigkeit von den beiden den zwei Durchmessern der Kugelzone zugeordneten Brinellhärten (H_B^Δ und H_B^δ) geschrieben werden kann.

Die Fläche der Kugelzone wird zu diesem Zwecke als die Differenz der Oberflächen der entsprechenden Kalotten angesehen,

$$F_0 = F^\Delta - F^\delta. \tag{2}$$

Da aber, laut Definition der Brinellhärte, diese Flächen als

$$F = P/H_B \tag{3}$$

ausgedrückt werden können, kann F_0 auch als

$$F_0 = P\,\frac{H_B^\delta - H_B^\Delta}{H_B^\delta\, H_B^\Delta} \tag{2'}$$

angeschrieben werden, so dass die Kugelschubhärte leicht mit Hilfe der zugeordneten Brinellhärten berechnet werden kann:

$$H_{KS} = \frac{P}{F_0} = \frac{H_B^\delta\, H_B^\Delta}{H_B^\delta - H_B^\Delta}. \tag{4}$$

Diese Eigenschaft der Schubhärte ist von grossem Vorteil, da sie zeigt, dass Apparat und Tabellen der Brinell-Härteprüfung auch für ihre Bestimmung verwendet werden können.

Die Zweckmässigkeit der Einführung der Schubhärte für die zerstörungsfreie *) Bestimmung der Streckgrenze eines Werkstoffes — im Weiteren sei nur von Stahl die Rede — folgt aus der, gegenüber der üblichen Brinellhärteprüfung, bedeutend grösseren Beanspruchung der Umgebung der Bohrung, so dass die Vorgänge an der Streckgrenze beschleunigt werden.

In Abbildung 1 ist die Spannungsverteilung bei der Kugelschubhärteprüfung angedeutet, welche auf Grund von photoelastischen Untersuchungen an ebenen Modellen bestimmt wurde und beweist, dass die Schubspannungen einen erheblichen Anteil an der Ausbildung des Eindruckes haben (da die Schubstreckgrenze für, zum Beispiel, Konstruktionsstahl bei rund 60% der Zugstreckgrenze liegt).

Werden mit r und z die radiale Richtung, beziehungsweise die Richtung längs der Bohrachse bezeichnet, ist klar erkennbar, dass in der Nähe des Eindruckes in beiden Richtungen sowohl bei Zug als auch bei Druck, die Streckgrenze überschritten wird, also plastische Verformungen auftreten.

---

*) Genau genommen, ist es eine quasizerstörungsfreie Prüfung. Da jedoch die Ausmasse der Bohrung sehr gering sind und diese — bei Bedarf — nach ausgeführter Bestimmung der Schubhärte leicht geschlossen werden kann, kann die Bestimmung der Streckgrenze mit Hilfe der Kugelschubhärte als eine zerstörungsfreie Werkstoffprüfung angesehen werden.

Versuche [1] ergaben, dass die zweckentsprechendsten Abmessungen der Bohrung bei

$$d = h = D/2 \tag{5}$$

liegen, da die Abhängigkeit der Schubhärte von dem Verhältnis d/D bei 0,5 einen Wendepunkt hat, so dass einerseits in diesem Bereich die Genauigkeit der Bestimmung der Schubhärte am grössten ist, andererseits eine geringe Ungenauigkeit in der Ausführung der Bohrung nur einen geringfügigen Einfluss auf das Ergebnis ausübt.

Die Tiefe der Bohrung beeinflusst die Ausmasse des Eindruckes nur im Bereiche $h \leqslant 0{,}3\ D$. Deshalb wurde für die Tiefe als Mindestmass $h = 0{,}5\ D$ empfohlen.

In allen durchgeführten Versuchen wurden für die Bohrung die durch Beziehung (5) angegebenen Werte verwendet.

2. Merkmale der Kugelschubhärte

Die wichtigsten Merkmale der Kugelschubhärte sind folgende:

— Die Schubhärte ist unbahängig von der Belastung (Prüfkraft).

— Bei der Bestimmung der Schubhärte ist es nicht nötig, die volle Belastung länger als 30 Sekunden einwirken zu lassen, da eine längere Wirkung keinen Einfluss mehr auf die Ausbildung des Eindruckes hat.

— Die Schubhärte ist unempfindlich gegenüber Kalthärtung durch Recken.

— Reibung, Verfestigung und Vergütung haben auf die Schubhärte etwa den selben Einfluss wie auch auf die Brinell-Härte.

— Bei Anwachsen der im Prüfling vorhandenen Spannungen sinkt die Kugelschubhärte langsam ab.

3. Aussagefähkeigiten des Verhältnisses Kugelschubhärte zur Brinellhärte

Es wurde festgestellt [1], dass zwischen dem Verhältnis der Streckgrenze zur Zerreisfestigkeit und jenem der Schubhärte zur Brinellhärte eine bestimmte Abhängigkeit besteht.

Da das erste Verhältnis die plastische Reserven des Stahles charakterisiert, kann auch über das zweite das Gleiche gesagt werden.

Die Versuche von K. Waitzmann ergaben als Beziehung zwischen den beiden Verhältnissen den Ausdruck

$$\frac{\sigma_S}{\sigma_B} = \left[6{,}72 - 6{,}85 \lg 10 \frac{H_{KS}}{H_B}\right] \frac{H_{KS}}{H_B}, \tag{6}$$

so dass — bei bekanntem Verhältnis H_{KS}/H_B, oder eventuell experimentell bestimmtem, — jederzeit das Verhältnis der Streck— zur Bruchgrenze berechnet werden kann.

Diesbezügliche Ergebnisse der eigenen Versuche des Verfassers sind unter Punkt 5 angegeben.

Ausserdem besteht auch zwischen dem Exponenten der Beziehung nach Meyer (zwischen der aufgebrachten Kraft und dem Durchmesser des Brinelleindruckes)

$$P = a \cdot \rho^n \tag{7}$$

und dem Verhältnis der Kugelschubhärte zur Brinellhärte eine lineare Abhängigkeit,

$$n = \alpha\,(H_{KS}/H_B) + \beta. \tag{8}$$

Da n ein Mass für den Kalthärtungszustand des betreffenden Materials darstellt, kann das selbe auch über das Verhältnis H_{KS}/H_B gesagt werden.

Dabei sind a, α und β Konstanten, welche den verschiedenen Materialien und dem Zustand (also auch den Eigenschaften), in welchem sich diese befinden, charakteristisch sind.

Aus dem oben Gesagten geht hervor, dass das Verhältnis der Schubhärte zur Brinellhärte genügend Aussagekraft über die Eigenschaften eines Stahles besitzt, um die Kugelschubhärte als eine seiner charakteristischen Werte ansehen zu können.

4. Bestimmung der Streckgrenze mittels der Schubhärte

Eine Anzahl von über 1200 Versuchen, welche bis zum Jahre 1959 durchgeführt wurden [1], bestätigten, dass zwischen Schubhärte und Streckgrenze eine Abhängigkeit besteht.

Um die Streckgrenze aus der Schubhärte zu berechnen, wurde ein Umrechungfaktor

$$C_{KS} = \frac{\tau_S}{H_{KS}} \tag{9}$$

eingeführt, für welchen der Ausdruck

$$C_{KS} = 1{,}613 - 1{,}875\frac{H_{KS}}{H_B}, \quad \text{für } \frac{H_{KS}}{H_B} < 0{,}71, \tag{10a}$$

$$C_{KS} = 0{,}439 - 0{,}221\frac{H_{KS}}{H_B}, \quad \text{für } \frac{H_{KS}}{H_B} > 0{,}71 \tag{10b}$$

gefunden wurde.

Wenn also die Schub- und die Brinellhärte – mit demselben Apparat und denselben Tabellen – bestimmt worden sind, kann die Streckgrenze des betreffenden Stahles mit Hilfe des Ausdruckes

$$\sigma_S = H_{KS}\left(1{,}613 - 1{,}875\,\frac{H_{KS}}{H_B}\right), \quad \text{für } \frac{H_{KS}}{H_B} < 0{,}71, \qquad (11\text{ a})$$

$$\sigma_S = H_{KS}\left(0{,}439 - 0{,}221\,\frac{H_{KS}}{H_B}\right), \quad \text{für } \frac{H_{KS}}{H_B} > 0{,}71 \qquad (11\text{ b})$$

berechnet werden.

Dabei ist bemerkenswert, dass nicht nur die Kugelschubhärte, sondern auch ihr Verhältnis zu der Brinellhärte in diese Beziehung eingeht.

Näheres geht aus Punkt 5 hervor.

5. Eigene Versuche und ihre Ergebisse

5.1. *Durchführung der Schubhärteprüfung*

Die Schubhärteprüfung wurde nach dem von K. Waitzmann beschriebenen Verfahren durchgeführt. Ihr Verlauf ist folgender:

Die Oberfläche des Prüflings*) wird durch Feilen, Hobeln oder Grobschliff roh und dann mit Schmirgelpapier fein bearbeitet.

Die Bohrung wird entweder mit einer festen – bei Prüflingen – oder tragbaren Bohrmaschine – bei Konstruktionen oder sperrigen geprüften Teilen – ausgeführt. Wichtig ist dabei, dass diese einerseits zylindrische Form hat, sich also nicht durch ein etwaiges Schwenken der Bohrachse oder das Vorhandensein von Spannungen im Prüfling ovalisiert, und andererseits nach dem Bohren kein Grat zurückbleibt. Dieser wird entweder durch Verschleifen mit feinem Schmirgelpapier oder durch leichtes Abziehen mit einem Schaber entfernt.

Es folgt darauf die Durchführung der Schubhärteprüfung und – parallel – der Brinellhärteprüfung, welche nach dem bekannten Verfahren mit einer Kugel von 10 mm Durchmesser bei einer Belastung von 3000 kgf oder einer Kugel von 5 mm Durchmesser bei einer Belastung von 750 kgf vorgenommen werden.

Die Belastungsdauer beträgt 30 Sekunden.

Vorteilhaft ist – falls genügend bearbeitete Fläche zur Verfügung steht – für die Kugelschubhärte und die Brinellhärte je zwei Eindrücke herzustellen und auszumessen.

Nach Eindrücken der Kugel entsteht – für die Schubhärtemessung – um die Bohrung eine Kugelzone, deren Innen- und Aussendurchmesser in je zwei senkrecht aufeinanderstehenden Richtungen bestimmt werden. Für die Brinellhärtemessung gilt dasselbe.

*) Falls die Prüflinge aus Blechen stammen, wird für die Eindrücke der Kugel eine ihrer ebenen Flächen benützt. Bei runden Prüflingen muss eine ebene Fläche angearbeitet werden. Falls nötig, können für die beiden Härteprüfungen auch die Einspannköpfe der Versuchsstäbe benützt werden.

Es ist darauf zu achten, dass die Messung der beiden Durchmesser mit Apparaten vorgenommen wird, deren Messgenauigkeit grösser als 0,01 mm ist.

Mit Hilfe der Brinellhärtetabellen und der Beziehung (4) werden die Brinell— und die Kugelschubhärte berechnet, aus denen dann die Streckgrenze bestimmt werden kann.

5.2. *Versuche und Ergebnisse*

Angeregt durch das in [1] Gesagte, wurden durch den Verfasser fast 700 Versuche durchgeführt, um die Gültigkeit der angegebenen Beziehungen (6, 10, 11) für rumänische Stähle festzustellen. Hauptsäch-

Tabelle 1

Grenzen der mechanischen Eigeschaften der untersuchten Proben

Lfd. Zahl.	Charakteristik	Bezeichnung	Masseinheit	Grenzwerte
1	Streckgrenze	σ_S	kgf/mm²	20,50 —160,0
2	Zugfestigkeit	σ_B	kgf/mm²	21,80 —180,5
3	Verhältnis σ_S/σ_B	—	—	0,403—0,952
4	Kugelschubhärte	H_{KS}	kgf/mm²	68,0 —292
5	Brinellhärte	H_B	kgf/mm²	93,0— 497
6	Verhältnis H_{KS}/H_S	—	—	0,437—0,930

lich wurden dabei Prüflinge verschiedener Stahlsorten im Anlieferungszustand benützt.

Für normalisierte, warm vergütete oder durch Rekhen kalt gehärtete Stähle wurden entweder die normalen Prüflinge — nach der betreffenden Behandlung — oder aber eigens dafür angefertigte verwendet.

Die mechanischen Eigenschaften der untersuchten Proben waren zwischen den in Tabelle 1 angeführten Werten enthalten.

In jedem der 693 Versuche wurden auf Grund der ausgeführten Messungen die in Tabelle 1 angeführten Kennwerte bestimmt.

Mit den gefundenen Werten wurde in erster Linie die Abhängigkeit des doppelten Verhältnisses $(\sigma_S/\sigma_B) : (H_{KS}/H_B)$ zu dem Verhältnis H_{KS}/H_B untersucht. Wie aus Abbildung 2 (in halblogarithmischer Darstellung) hervorgeht, lassen sich die Messwerte in guter Annäherung durch die mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Geraden

$$(\sigma_S/\sigma_B) : (H_{KS}/H_B) = 6{,}715 - 6{,}484 \lg 10 \, (H_{KS}/H_B) \qquad (12)$$

darstellen.

Als Nächstes wurde der durch die Beziehung (9) definierte Proportionalitätsfaktor C_{KS} zwischen der Streckgrenze und der Schubhärte in Abhängigkeit von dem Verhältnis H_{KS}/H_B grafisch aufgetragen, um auch hier, ebenfalls mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, eine analytische Beziehung zu bestimmen. Der Ausgleich ergab — nach meh-

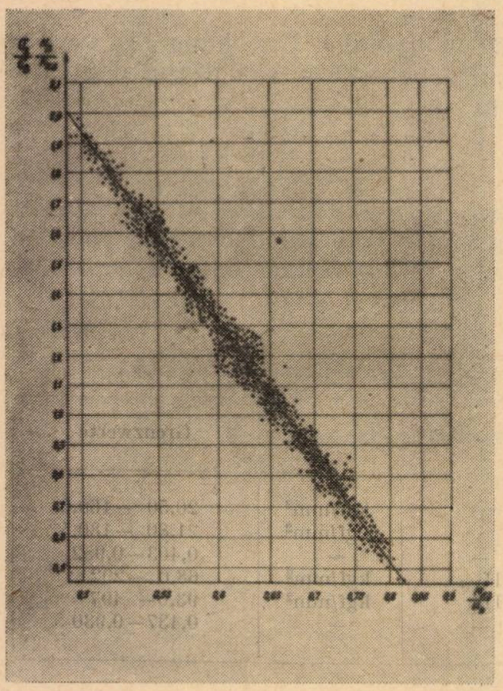


Fig. 2. Abhängigkeit des Verhältnisses $(\sigma_S/\sigma_B) : (H_{KS}/H_B)$ vom Verhältnis H_{KS}/H_B (Abszissse logarithmisch geteilt)

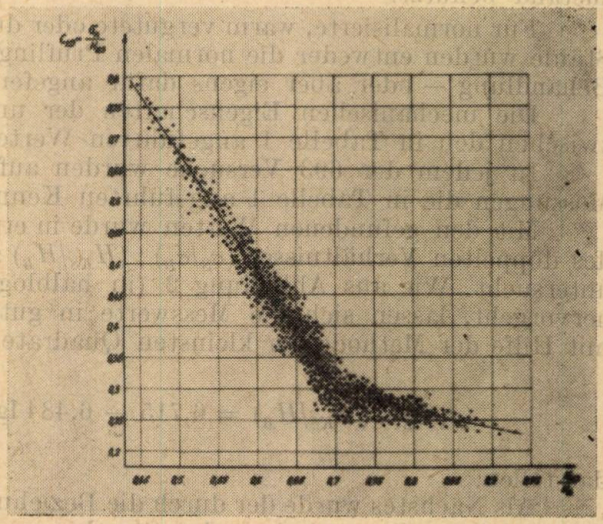


Fig. 3. Abhängigkeit des Verhältnisses $C_{KS} = \sigma_S/H_{KS}$ vom Verhältnis H_{KS}/H_B

reren vergeblichen Versuchen einen einzigen zufriedenstellenden Ausdruk finden — ebenfalls zwei Gerade, und zwar :

$$C_{KS} = 1{,}590 - 1{,}845\,(H_{KS}/H_B), \text{ für } H_{KS}/H_B < 0{,}705, \qquad (13\,a)$$

$$C_{KS} = 0{,}480 - 0{,}270\,(H_{KS}/H_B), \text{ für } H_{KS}/H_B > 0{,}705. \qquad (13\,b)$$

Die beiden Geraden sind in Abbildung 3 eingezeichnet.

Es ist klar, dass die Streckgrenze des Stahles nun aus (13) mit Hilfe der Beziehungen :

$$\sigma_S = H_{KS}[1{,}590 - 1{,}845\,(H_{KS}/H_B)], \text{ für } H_{KS}/H_B < 0{,}705, \qquad (14, a)$$

$$\sigma_S = H_{KS}[0{,}480 - 0{,}270\,(H_{KS}/H_B)], \text{ für } H_{KS}/H_B > 0{,}705 \qquad (14, b)$$

berechnet werden kann.

Ein Vergleich mit den von K. Waitzmann [1] gefundenen Ausdrücken (6, 10, 11) zeigt, dass die oben angeführten (12, 13, 14) praktisch mit diesen übereinstimmen. Damit war der Beweis dafür erbracht, dass die vorgeschlagene Methode allgemeine Gültigkeit hat. Im Besonderen wurde das auch für rumänische Stähle gezeigt.

Um die auf diese Weise gefundenen Werte der Streckgrenze σ_S mit den im Zugversuch bestimmten (das heisst also — im Rahmen der

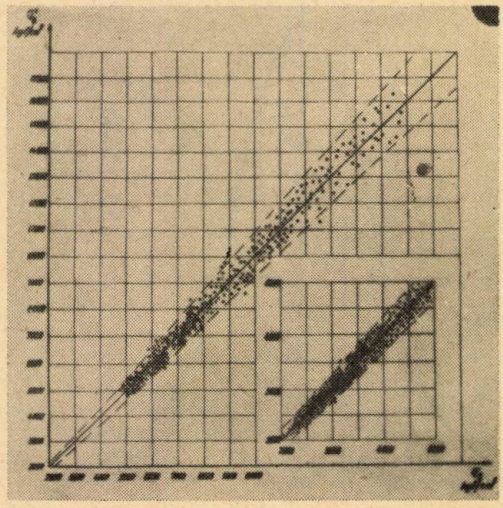


Fig. 4.Zusammenhang zwischen der mit den vorgeschlagenen Beziehungen berechneten, σ_S, und der im Zugversuch bestimmten Streckgrenze, σ'_S

erreichbaren Genauigkeit — sichereren) σ'_S zu vergleichen, wurden die erhaltenen Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\sigma'_S - \sigma_S$ eingetragen. Das Ergebnis ist in Abbildung 4 wiedergegeben.

Der ideale Fall, also $\sigma'_S = \sigma_S$, ist als Winkelhalbierende ebenfalls eingezeichnet.

Bei der statistischen Auswertung der durch zerstörungsfreie Bestimmung der Streckgrenze erhaltenen Werte, wurden sowohl Grösse,

Gleichmässigkeit und Gesetzmässigkeit der auftretenden Fehler, als auch eventuelle systematische Fehler gesucht. Als Grundlage dafür wurde der „wahre" (experimentell im Zugversuch ermittelte) Wert der Streckgrenze benützt.

Die Häufigkeitsverteilung der relativen Abweichungen der berechneten gegenüber den versuchsmässig bestimmten Werten wird durch Tabelle 2, beziehungsweise Abbildung 5, dargestellt.

Tabelle 2

Häufigkeitsverteilung der relativen Abweichungen der berechneten gegenüber den versuchsmässig bestimmten Werten der Streckgrenze

Bereich der relativen Abweichung (%)	−15 −13	−13 −11	−11 −9	−9 −7	−7 −5	−5 −3	−3 −1	−1 1	1 3	3 5	5 7	7 9	9 11	11 13	13 15
Anzahl	2	10	15	15	58	75	98	115	95	79	60	44	15	2	0

Die Analyse der Abbildung 5 zeigt deutlich, dass die Methode der Bestimmung der Streckgrenze aus der Schubhärte keinen systematischen Fehler enthält (Maximum der Verteilungskurve liegt um 0% relativer Abweichung) und dass die Häufigkeit der verschiedenen Abweichungen eine normale Verteilung aufweist.

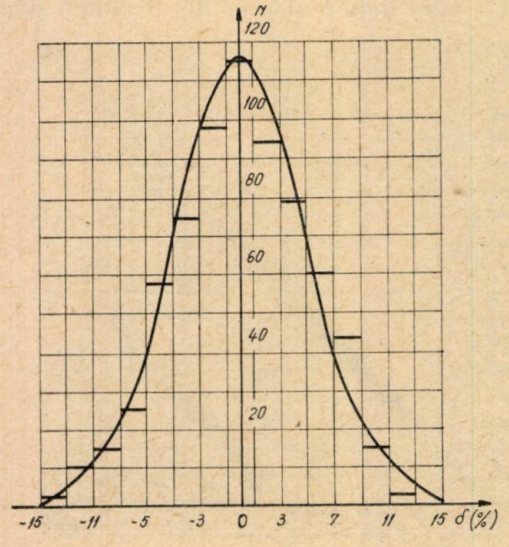


Fig. 5. Häufigkeitsverteilung der relativen Abweichungen der berechneten gegenüber den versuchsmässig bestimmten Werten der Streckgrenze

Natürlich kann kein Mittelwert der Streckgrenze berechnet werden, da diese ja weder für eine einzige Stahlsorte, noch für einen einzigen Zustand einer bestimmten Sorte bestimmt wurde.

Zusammenfassend können die in Tabelle 3 enthaltenen statistischen Kenngrössen angegeben werden.

Dabei muss auf die Tatsache hingewiesen werden, dass die kleinste Unsicherheit, mit welcher mechanische Eigenschaften heute im Zugversuch bestimmt werden können, ± 2 % beträgt.

In Abbildung 4 ist durch zwei Geraden, welche gegenüber dem idealen Fall, also der Winkelhalbierenden, um das doppelte der Standardabweichung verschoben sind, das Gebiet abgegrenzt, in welchem sich praktisch alle gefundenen Punkte befinden.

Tabelle 3

Statistische Kenngrössen der ausgeführten Versuchsreihe

Lfd. Zahl	Kenngrösse	Masseinheit	Wert
1	Probenanzahl	Stück	693
2	Mittlerer relativer Fehler	%	4,83
3	Standardabweichung	%	5,00
4	Wahrscheinlicher relativer Fehler	%	3,63

6. Schlussfolgerungen

Die Ergebnisse der durchgeführten Versuche zeigten, dass die Streckgrenze mit Hilfe der Kugelschubhärte mit — auf jeden Fall für die Technik — genügender Genauigkeit bestimmt werden kann.

Dabei muss hervorgehoben werden, dass diese Methode überall dort Erfolg zeitigt, wo entweder nicht die nötige Materialmenge, oder aber die notwendige Zeit, beziehungsweise Prüfmaschine, für die Durchführung eines Zugversuches zur Verfügung stehen.

Besonders nützlich ist die beschriebene Methode auf folgenden Gebieten:

— Untersuchung von Schweissnähten und deren Umgebung (zum Beispiel bei Hochdruckbehältern, wo die Einhaltung der vorgeschriebenen Streckgrenze besonders wichtig ist);

— Prüfung der Härtbarkeit von Metallen;

— praktisch punktförmige Überprüfung der Materialeigenschaften an der Oberfläche und im Inneren der Werkstücke;

— Untersuchungen im Falle von Unfällen (zum Beispiel bei Kesselexplosionen oder Sprödbruchunfällen).

Die Übereinstimmung der Ergebnisse der durch den Verfasser vorgenommenen Versuche mit den in der einschlägigen Literatur vorhandenen Daten [1] zeigt, dass die Methode der Bestimmung der Streckgrenze der Stähle mit Hilfe der Kugelschubhärte, also mit Hilfe einer — praktisch — zerstörungsfreien Materialprüfungsmethode, welche überdies sehr einfach und nach einer bekannten Versuchsmethodik (und zwar der der Bestimmung der Brinellhärte) durchzuführen ist, allgemeine Gültigkeit hat. Die Vielseitigkeit der Anwendungsmöglichkeiten ist ausserdem ein bestechender Anlass, diese Methode möglichst bald in die Praxis einzuführen.

Lehrstuhl für Festigkeitslehre,
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bukarest

LITERATUR:

Waitzmann, K.: Bestimmung der Streckgrenze mittels einer Kugelschubhärte, Materialprüfung, Band 1, 1959, Nr. 8, Seite 261—268

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

ELECTRONICĂ

C. Z.: 621.38:681.3.04...51

PROCEDEE ȘI METODE DE TRANSMISIE A DATELOR CU DETECȚIA ȘI CORECȚIA ERORILOR.

DAN STOICHESCU

1. Introducere

În ultimul deceniu, datorită importanței informațiilor transmise prin canalele de telecomunicații, siguranța de transmisie a vechilor procedee nu mai este satisfăcătoare și ele au fost înlocuite din ce în ce mai des cu altele noi, care folosesc detecția ori corecția erorilor, sau pe amîndouă în același timp.

Scopul articolului este de a prezenta cîteva din cele mai noi metode — teoretice și practice — de detecție și corecție a erorilor. Procedeele clasice pe bază de coduri liniare și ciclice au fost lăsate la o parte; au fost alese procedeele care se pretează la realizări sau sînt de oarecare generalitate.

2. Procedee de transmitere a datelor cu detecția erorilor

În general, aparatura de prelucrare a datelor în cazul detecției erorilor este mult mai simplă și implicit mai ieftină decît în cazul corecției erorilor, însă necesită un canal de reacție.

De aceea, se folosește detecția erorilor fie atunci cînd mesajul este mai lent decît frecvența de eșantionare și semnalele ce se dovedesc eronate la recepție, pot fi pur și simplu șterse (cazul transmisilor de pe sateliți sau din locuri greu accesibile), fie cînd informația transmisă este reintrodusă în memoria emițătorului de unde poate fi scoasă la cererea receptorului (cazul schimbului de date între două calculatoare).

2.1. *Detecția erorilor în cazul transmisiei între pămînt și satelitul vest-european ESRO—1.*

Se folosește un alfabet de patru simboluri dintre care trei sînt impulsuri modulate în durată iar al patrulea un interval de timp în care nu se transmite nimic. Sistemul lucrează sincron, la bordul satelitului și la sol existînd două ceasuri cu cuarț de aceeași frecvență; perioada ceasurilor o vom numi tact.

Manuscris predat redacției la data de 4 noiembrie 1971.

Semnalele impulsuri sînt: impulsul sincro de 54 tacte, semnalul „1" de 36 tacte și semnalul „0" de 18 tacte.

Intervalul între începuturile a două impulsuri și durata intervalului gol sînt egale fiecare cu 72 tacte.

Fiecare frază e compusă dintr-o secvență de 5 cuvinte de cod, fiecare cuvînt conținînd 8 biți, un impuls sincro și un interval gol. Primele două din cele cinci cuvinte reprezintă adresa (dispotizivul căruia îi este

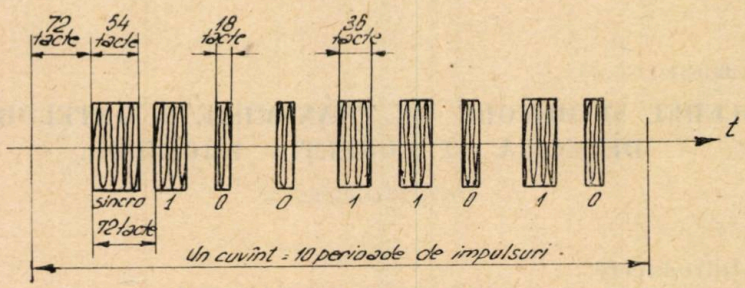


Fig. 1. Exemplu de cuvînt codat.

destinată comanda) repetată de două ori iar următoarele trei reprezintă ordinul propriu-zis. Siguranța în funcționare este astfel mult mărită deoarece este suficient ca numai unul din primele două și unul din ultimele trei cuvinte să fie transmise fără erori pentru ca ordinul corect să fie recepționat și îndeplinit.

Un exemplu de cuvînt este dat în fig. 1.

Procedeul utilizat pentru detecția erorilor este construirea cuvintelor dintr-un număr determinat de „0" și de „1". Astfel cuvîntul — adresă are totdeauna două „0" și șase „1" sau doi „1" și șase „0" iar cuvîntul — ordin conține patru „0" și patru „1". Cu acest tip de cod sînt detectate toate erorile simple și 43% din erorile duble referitoare la biți.

Pentru a reduce și mai mult probabilitatea unei declanșări parazite a decodorului, fiecare cuvînt (adresă sau ordin) nu poate fi decodat decît după detectarea unui impuls sincro iar după detecția unui cuvînt — adresă, cuvîntul — ordin poate fi detectat doar într-un interval determinat (patru cuvinte).

2.2. *Sisteme de detecție a erorilor cu canale de reacție.*

În continuare sînt expuse regimurile de funcționare de bază ale sistemelor cu retransmisie prin algoritmurile funcționale ale acestora. După regimul de lucru, sistemele cu detecție cu reacție pot fi:

— cu așteptare
— fără așteptare, cu retransmisie dublă.
— fără așteptare, cu retransmisie unică

2.2.1. *Sisteme cu retransmisie cu așteptare.*

Legătura are loc între un emițător și un receptor. Primul transmite semnale utile de cîte n biți ($n = k + r$, unde k este numărul simbolurilor binare utile și r numărul celor redundante, iar al doilea le recepționează,

verifică corectitudinea lor și răspunde printr-un alt semnal de s biți prin care confirmă primirea în bune condiții a semnalului util (semnal de reacție OK) sau cere repetarea lui (semnal de reacție RQ).

Se fac notațiile :

P_d, P'_d — probabilitățile de apariție a unor erori detectabile

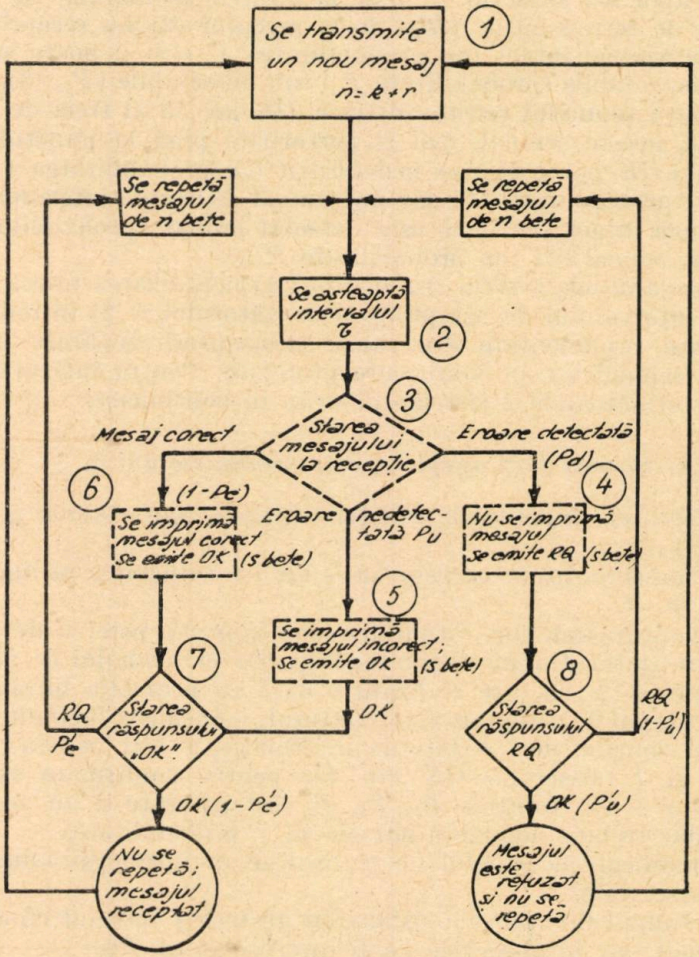


Fig. 2. Organigrama sistemelor cu retransmisie cu timp de așteptare.

în semnalul util și respectiv, în semnalul de reacție.

P_u, P'_u — probabilitățile de apariție a unor erori nedetectabile în semnalul util și, respectiv, în semnalul de reacție.

$P_e = P_u + P_d$; $P'_e = P'_d + P'_u$

Modul de funcționare poate fi semiduplex (semnalele utile merg într-un singur sens) sau duplex (se transmit semnale utile și de răspuns în ambele direcții ; la fiecare capăt e o instalație emisie-recepție).

Funcționarea este redată cu ajutorul diagramei din fig. 2, care, pentru simplitate, redă modul de funcționare semiduplex. Mențiunile

referitoare la emiţător vor fi făcute în dreptunghiuri cu margini coninui, cele referitoare la receptor în dreptunghiuri cu margini întrerupte, iar deciziile asupra semnalului în romburi. Deciziile finale asupra mesajelor sînt date în chenare circulare.

În punctul (1) un nou mesaj util (de n biţi) este transmis. Emiţătorul aşteaptă apoi un interval τ pînă la sosirea semnalului de confirmare (*OK*) sau de retransmisie (*RQ*) de la receptor (2) La recepţie, semnalul util poate ajunge intact (cu probabilitatea $1 - P_e$), poate suferi deformări nedectectabile (probabilitate P_u) sau detectabile (P_d) (3). În primele două situaţii semnalul retransmis este *OK* iar în al treia de tip *RQ*. La rîndul lor, aceste semnale pot fi perturbate pînă la punctul de emisie. Un semnal *OK* poate ajunge nedeformat (cu probabilitatea $1 - P'_e$) sau deformat (probabilitate P'_e) iar un semnal *RQ* este interpretat ca atare dacă ajunge intact sau dacă este detectat eronat (probabilitate $1 - P'_u$) sau ca un semnal *OK* (cu probabilitate P'_u).

Dezavantajele acestui sistem sînt : 1) neutilizarea totală a timpului, datorită intervalului de aşteptare al emiţătorului şi 2) introducerea unei redundanţe suplimentare din cauza transmiterii separate pe calea de reacţie a semnalelor de confirmare protejate. Pentru înlăturarea lor sînt preferate următoarele 2 sisteme descrise în continuare.

2.2.2. *Sisteme fără aşteptare, cu retransmisie unică.*

Diferenţele funcţionale esenţiale între aceste sisteme şi cele precedente sînt :

1. transmiterea semnalelor utile are loc totdeauna pe ambele direcţii între *A* şi *B*.

2. confirmarea corectitudinii semnalelor sau cererea de retransmisie se face cu ajutorul unui singur bit înglobat în semnalul ce pleacă în sens invers ; protecţia lui este realizată o dată cu protecţia biţilor utili.

3. timpul de aşteptare este înlăturat, transmisia făcîndu-se continuu. Semnalul conţine deci k biţi de informaţie, r biţi pentru verificare la paritate şi *1* bit-service *OK* sau *RQ* pentru confirmare sau infirmare ($n = k + r + 1$). Notaţiile P_u, P_d, P_e sînt păstrate şi au aceeaşi însemnătate, dar trebuie adăugate notaţia p_α — probabilitatea ca bitul-service să fie modificat pe canalul de transmisie în interiorul unui semnal cu erori nedectabile.

În timpul funcţionării sistemului un mesaj detectat ca eronat nu va fi imprimat, iar bitul-service va fi interpretat ca *RQ*.

Funcţionarea este redată în fig. 3 şi convenţiile stabilite la punctul precedent rămîn valabile : chenarele cu margini pline se referă la sursa *A*, cele cu margini întrerupte la sursa *B*.

Analiza semnalului recepţionat se face în (1). Dacă apar erori detectabile (probabilitatea P_d), în mesajele ce pleacă în sens invers este introdus un bit-service de tip *RQ* (2). Dacă acest mesaj cuprinde erori nedetectabile pînă în *A* şi bitul-service este inversat în (*OK*), mesajul iniţial nu va mai fi tretransmis (probabilitate $P_u P_\alpha$). (3). În orice altă situaţie a mesajului din *B* spre *A*, mesajul iniţial este retransmis (4) (probabilitatea $1 - P_u P_\alpha$).

Revenind în (1), dacă nu s-au produs erori în mesajul iniţial ($1 - P_e$), sau au apărut erori nedetectabile (probabilitate P_u), bitul-service

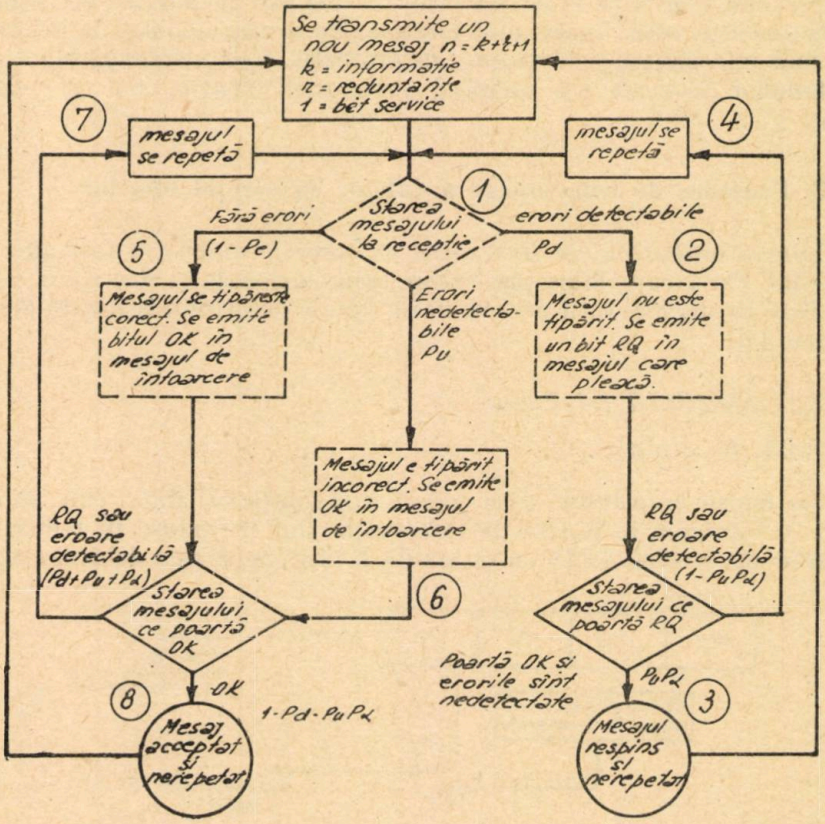


Fig. 3. Diagrama sistemelor cu retransmisie unică, continue.

introdus în mesajul invers va fi de tip *OK*. Dacă erorile care intervin în acest mesaj sînt detectabile sau dacă sînt nedetectabile dar afectează și bitul-service, mesajul inițial va fi retransmis. Altfel va fi transmis un nou mesaj.

Dezavantajele acestui sistem sînt:

— posibilitatea repetării unor mesaje corecte și a nerepetării altora cu erori detectabile.

— tipărirea deseori a cuvintelor recepționate în altă ordine decît cea în care au fost emise, deoarece un semnal este emis înainte ca precedentul să fi fost infirmat. Pentru rearanjarea cuvintelor se pot folosi etaje suplimentare, dar asta complică și scumpește sistemul.

2.2.3. *Sisteme fără așteptare, cu dublă retransmisie.*

Și în acest caz mesajele sînt transmise continuu în ambele sensuri și conțin k biți de informație, r biți redundanți și 1 bit-service ($n = k + r + 1$). Acceptarea lor, însă, la recepție se face automat numai în ordine corectă și nici un mesaj nu e acceptat mai mult decît o dată, afară

de cazul cînd erorile ce modifică bitul-service sînt nedetectabile. Numărul de retransmisii, este, însă, mai mare şi, de aceea, debitul de informaţie va fi mai mic pentru acelaşi grad de protecţie. Mecanismul de funcţionare al sistemelor de acest tip ocupînd prea mult spaţiu, nu este dat în articol.

3. Procedee de transmitere a datelor cu coreţia erorilor

Dintre procedeele de transmisie cu corecţia erorilor a fost ales algoritmul lui Fano care foloseşte coduri convoluţionale şi decodare secvenţială. Este expus mai întîi procedeul iar apoi e descrisă o realizare practică pe baza lui.

3.1. *Algoritmul lui Fano.*

3.1.1. *Generalităţi.*

La emisie informaţia este codată convoluţional după cum se arată în fig. 5. Simbolurile binare de informaţie sînt introduse în registrul de deplasare cu k celule (RD) cu viteza de R biţi/sec (R este debitul codului).

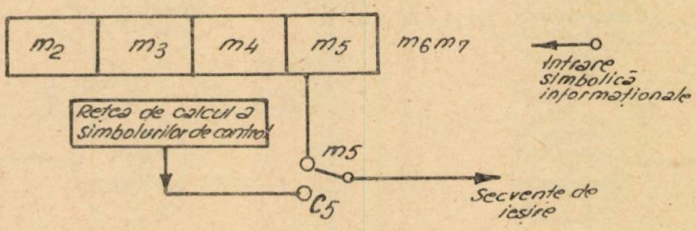


Fig. 4

La ieşire, la fiecare $1/R$ secunde sînt extraşi k_0 biţi de informaţie şi m_0 biţi de control la paritate (în exemplu $k_0 = 1$, $m_0 = 1$), fiecare simbol de control la paritate fiind determinat de k simboluri de informaţie anterioare.

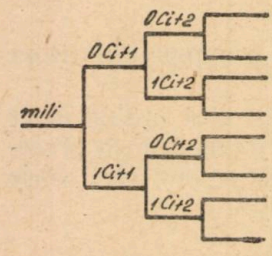


Fig. 5.
Codarea convoluţională.

Aceşti $m_0 + k_0$ simboluri binare formează un cuvînt de cod convoluţional. (k = lungimea de constrîngere).

Structura codului convoluţional astfel obţinut poate fi reprezentată convenabil sub formă arborescentă (vezi fig. 5); fiecărei ramuri ($i + 1$ îi corespunde unul din cuvintele de cod care pot fi generate după cuvîntul i.

Din fiecare nod pornesc două ramuri, întrucît simbolul de informaţie poate lua valorile 0 sau 1. Apariţiei simbolurilor de control nu îi corespunde o nouă ramificaţie căci valoarea lui-dependentă de informaţie—nu mai are un caracter aleatoriu.

O secvenţă informaţională particulară va determina astfel o anumită rută prin arbore.

Dacă un cuvînt conține k_0 biți de informație, numărul ramurilor ce pornesc dintr-un nod este 2^{k_0}. De pildă, pentru $k_0 = 2$, $m_0 = 2$, ramificația se înfățișează astfel:

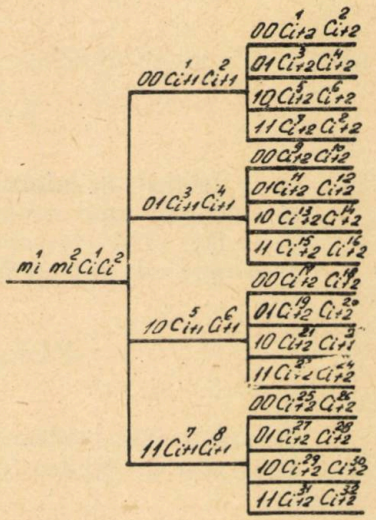


Fig. 6

Notînd cu x_i cuvintele emise, șirul $X = x_1x_2x_3 \ldots\ldots$ reprezintă o cale prin structura arborescentă. Pe baza șirului de simboluri recepționate $Y = y_1y_2 \ldots$ trebuie stabilită calea X urmată la emisie.

3.1.1. *Problema decodării secvențiale.*

Tocmai acest deziderat încearcă să-l satisfacă decodarea secvențială stabilind la fiecare nod o cale X'_n ce conține n ramuri astfel încît $P(X'_n/Y_n)$ să fie „suficient de mare", adică să depășească un anumit prag. Dacă operația reușește la nodul i, ea este repetată la nodul $i + 1$.

În condiții tipice de zgomot, dacă X'_n este secvența transmisă, $P(X'_n/Y_n)$ va fi mai mare decît $P(X''_n/Y_n)$ pentru orice X''_n incorect. Se poate întîmpla, însă, ca din cauza unor împrejurări nefavorabile, o cale corectă să pară eronată : $P(X'_n/Y_n)$ mic și o cale incorectă să pară bună : $P(X''_n/Y)$ mare. Dar cu cît n e mai mare, împrejurările atipice sînt mediate și prin calculul lui $P(X/Y)$ se poate distinge o cale corectă de una incorectă.

În rezumat, decodorul calculează $P(X_n/Y_n)$ pentru întreaga cale pînă la nodul curent și compară $P(X_n/Y_n)$ cu un prag. Dacă $P(X_n/Y_n)$ e suficient de mare, se merge pe ramura cea mai probabilă pînă la nodul $n + 1$ și se calculează $P(X_{n+1}/Y_{n+1})$. Dacă $P(X_n/Y_n)$ nu este suficient de mare., se impun două ipoteze :

a) decodorul este pe o cale corectă care pare eronată din cauza unui zgomot netipic.

b) în trecut au existat împrejurări netipice de zgomot care au determinat decodorul să se deplaseze pe o cale greșită.

Decodorul adoptă mai întîi ipoteza b) și caută în urmă în mod sistematic pentru a găsi o cale bună ; dacă nu găsește o altă cale cu probabilitate mai mare revine în punctul n, se consideră în ipoteza a) și merge mai departe.

În același timp, informația conținută în cuvintele decodate cu n cuvinte mai înainte sînt furnizate demodulatorului.

Intrînd în detaliu, calculul probabilității $P(X_n/Y_n)$ se face în felul următor :

$$P(X_n/Y_n) = \frac{P(X_n;Y_n)}{P(Y_n)} = \frac{P(X_n)P(Y_n/X_n)}{P(Y_n)}$$

Dacă toate secvențele de cîte n cuvinte sînt egal probabile, probabilitatea uneia va fi :

$$P(X_n) = 2^{-\alpha}$$

unde α este numărul biților informaționali din secvență sau

$$P(X_n) = 2^{-\tau R n} = 2^{-\overline{R} n}$$

R = debitul de informație în biți/sec.
τ = durata unui simbol.
$\overline{R} = R\tau$, rata informației (informația pe cuvînt) în biți/cuvînt.
Presupunînd canalul fără memorie, probabilitatea devine :

$$P(X_n/Y_n) = 2^{-\overline{R} n} \prod_{i=1}^{n} \frac{p(y_i/x_i)}{p(y_i)}$$

Deoarece este totdeauna mai convenabilă a utiliza o expresie aditivă decît una multiplicativă, se logaritmează în baza 2 expresia anterioară :

$$L_n = L(X_n, Y_n) = \log P(X_n/Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\log \frac{p(y_i/x_i)}{p(y_i)} - \overline{R} \right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Deoarece $\log \dfrac{p(y_i/x_i)}{p(y_i)}$ este informația mutuală între intrarea ipotetică x_i și ieșirea canalului y_i iar $\overline{R}$ informația pe cuvînt, diferența, lor, λ_i, va fi în medie pozitivă pentru o secvență corectă și negativă pentru una incorectă.

Deci $L_n = f(n)$ este crescătoare pentru secvențele corecte, descrescătoare pentru secvențele incorecte și nemonotonă cînd apar situații de zgomot netipic. Aceste trei cazuri sînt prezentate în fig. 7.

Pentru ca decodorul să decidă cînd secvența este corectă, se defi-

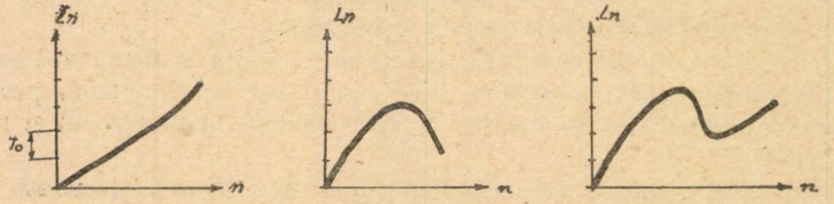


Fig. 7. Cele trei cazuri de variație a lui $L_n = f(n)$

nesc un set de praguri T_1, T_2 ... separate prin T_0 și două stări în care se poate găsi decodorul la nodul n :

Starea a) — secvența X_n e presupusă corectă ; decodorul încearcă, să găsească o secvență corectă X_{n+1} (tot de lungime n) care conține și un nod consecutiv lui n.

Starea b) — numai primele (cele mai vechi) m ramuri (din secvenţa de lungime n) sînt presupuse corecte; decodorul încearcă să găsească o cale pornind dintr-un nod între m şi n suficient de probabilă.

În starea a) pragul curent este linia de prag imediat sub valoarea curentă a lui L_n. Cînd L_n creşte, pragul curent creşte cu el. Dacă la nodul n decodorul este în starea a, el poate trece în starea b, dacă L_{n+1} scade sub pragul curent. Calea va fi presupusă corectă doar pînă la nodul m (primul aflat deasupra acestui prag). Pragul este menţinut la această valoare şi pornind dintr-un nod între m şi n este căutată o altă cale. În momentul găsirii ei, decodorul rămîne în starea a) şi porneşte mai departe.

3.1.3. *Descrierea algoritmului.*

Pentru înţelegerea algoritmului se dă diagrama din fig. 8 ilustrată cu ajutorul exemplului din fig. 9.

În arborele de codare din fiecare nod (n) pornesc $b = 2^{k_0}$ ramuri. Ele vor fi desemnate $I(n)$ $(1 \leqslant I \leqslant b)$ în ordinea probabilităţii; $I = 1$ desemnează ramura pentru care λ este maxim. Stările în care se găseşte decodorul (a sau b) sînt desemnate cu ajutorul funcţiei F (F_a sau F_b).

În dreptunghiul A valoarea L_n este comparată cu pragul curent; iniţial, pragul este luat la valoarea $T = 0$, funcţia F ia valoarea F_a, I_n se ia egal cu 1 iar L_n se compară cu 0. În cazul cînd $L_n \geqslant T$, L_n e comparat cu pragul următor $T + T_0$ (dreptunghiurile F şi E). Dacă decodorul era în starea a $(F = F_a)$ pragul este mărit la fiecare tact cu T_0 pînă cînd o nouă creştere duce la depăşirea lui L_n (dreptunghiurile F şi G) iar apoi se alege ramura cea mai probabilă ce porneşte din el (I) şi se execută o deplasare cu un nod în reţea, după care ciclul se repetă. În exemplul dat, pe această cale se merge din origine pînă în punctul 8. În tot acest timp $F = F_a$; în punctul 1 şi 2 se trece de două ori prin dreptunghiurile F şi G iar în restul situaţiilor o dată sau nici o dată. În punctele 3 şi 8 L_n scade, dar nu scade sub pragul curent şi de aceea decodorul nu trece în starea b.

Dacă $L_n < T$, decodorul trece în starea b $(F = F_b)$, se reîntoarce cu un nod în urmă şi compară $L_{n-1} : T$ (dreptunghiul B).

Dacă $L_{n-1} \geqslant T$, decodorul verifică dacă toate ramurile pornind din acest nod au fost folosite (dreptunghi C). În situaţia că nu găseşte o nouă ramură, el urmează calea de reacţie. Dacă, însă, este găsită o nouă ramură, se face o nouă comparaţie $L_{n-1} : T + T_0$ (dreptunghi D). Oricum, decodorul va merge pe această ramură (K), dar va intra în starea a doar dacă $L_{n-1} < T + T_0$ (dreptunghi L). Explicaţia acestei decizii o constituie faptul că ramura pentru care $L_{n-1} > T + T_0$ nu poate fi una nouă; ea trebuie să fi fost cercetată înainte de scăderea pragului (vezi dreptunghiurile M, N, P) şi revenirea la ea ar duce la o mişcare în circuit închis prin arbore. Pe calea de reacţie principală se ajunge din nou în dreptunghiul A şi, după cum $F = F_a$ sau $F = F_b$, în dreptunghiul F sau E ş.a.m.d.

Revenind la dreptunghiul B, dacă $L_{n-1} < T$ (lucru care nu se poate întîmpla decît după întoarcerea pe mai multe noduri) se reduce pragul, I_n

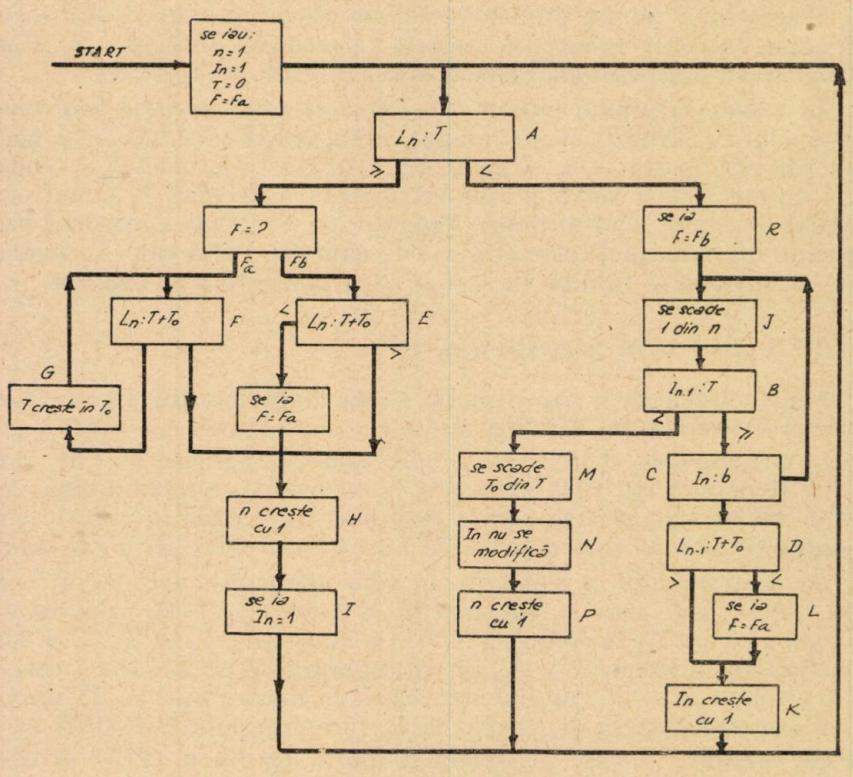


Fig. 8. Algoritmul lui Fano.

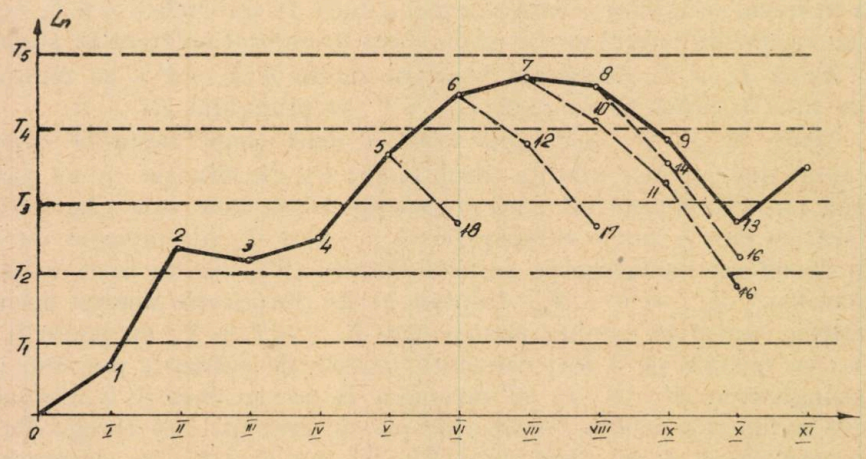


Fig. 9. Exemplu de aplicare a algoritmului lui Fano

nu este modificat, se trece la nodul următor celui examinat (prin M, N, și P) și se reia ciclul de la dreptunghiul A. Deoarece $F = F_b$, se merge prin dreptunghiul E unde pragul de comparație este vechiul T. Decodorul rămîne în starea b cîtă vreme acest prag este depășit și execută deplasări spre dreapta cu cîte o ramură la fiecare tact pînă cînd ajunge la nodul la care se oprise prima dată (pentru care $L_n > T$) unde trece în starea a făcîndu-se ipoteza că scăderea lui L_n a fost produsă accidental de niște perturbații netipice.

În exemplul expus se dau cîteva cazuri ce pot fi întîlnite în practică, dreptunghiurile fiind indicate prin literele asociate.

În pct. 8 decodorul intră în starea b (în 9 $L_{IX} < T_4$; T_4 = pragul curent stabilit la trecerea din 5 în 6). El revine în pct. 7 (prin J) care se află deasupra lui T_4 (B) și stabilește că mai sînt ramuri care pleacă din nodul VII (C). Deoarece $L_{VII} < T_5$ (D) decodorul trece în starea a (L) iar apoi alege ramura imediat următoare în ordinea probabilității pentru a ajunge în nodul VIII. Ramura duce în pct. 10 și aici $L_{VIII} < T_4$(A). Deoarece $F = F_a$, L_{VIII} e comparat cu T_5 (F) și deoarece $L_{VIII} < T_5$ e menținut T_4 ca referință. Se consideră nodul VIII decodat (H) și se calculează L_{IX} pentru ramura cea mai probabilă care, duce în 11 (I). Deoarece aici $L_{IX} < T_4$, din nou $F = F_b$(R) și decodorul se întoarce în 7 (J și B) de unde nu mai pornește nici o ramură nouă (C). De aceea decodorul revine în 6 (calea de reacție și J) unde $L_{VI} > T_4$ (B), dar $L_{VI} < T_5$(D); de aceea $F = F_a$(L), și se alege ramura următoare I_2 (K) care duce în 12. Deoarece aici $L_{VII} < T_4$(A), decodorul intră în starea b(R), revine în 6 și apoi în 5 într-un mod analog celor prezentate anterior. În 5 $L_V < T_4$ și de aceea se reduce pragul la T_3 (M), se menține $I_n = 1$ (N) și se trece în 6 (P). În 6 $L_{VI} > T_3$ și deoarece decodorul era în starea b și $L_{VI} > T_4 = T_3 + T_0$ (E), el rămîne în această stare și trece pe ramura cea mai probabilă în 7. Analog trece la nodul VIII și apoi la IX în punctul 9 unde L_{IX} este acum deasupra pragului T_3 și așa $F = F_a$. Pentru ramura cea mai probabilă, însă, ($I_n = 1$) care duce în 13 $L_x < T_3$ și de aceea decodorul revine în 8 după mecanismul cunoscut. Ramura I_2 care pleacă din 8 duce în 14, unde $L_{IX} > T_3$, dar de aici nu se poate ajunge decît în 15 unde din nou $F = F_b$; decodorul e obligat să revină din nou în 8, iar apoi în 7 și 5 de unde se ajunge foarte repede tot sub prag (pct. 16, 17, 18). În 4 pragul este din nou scăzut la T_2, se revine în 13 de unde L_n începe să crească ș.a.m.d.

3.2. *Sistemul Lincoln.*

Algoritmul lui Fano își găsește o aplicare în cazul aparaturii sistemului „Lincoln", destinat transmiterii a două semnale multiplexate prin sateliți activi și pasivi. În continuare nu se descriu decît părțile sistemului cuprinse între intrarea codorului și ieșirea decodorului deoarece acestea pun în evidență utilizarea algoritmului lui Fano (fig. 10)

3.2.1. *Codorul.*

Informaţia binară este prelucrată într-un codor convoluţional cu o lungime de constrîngere $k = 60$ biţi sub forma unor cuvinte de cîte patru biţi. Codorul poate lucra în două regimuri.

a) — Într-un cuvînt 1 bit este de informaţie iar ceilalţi trei de control

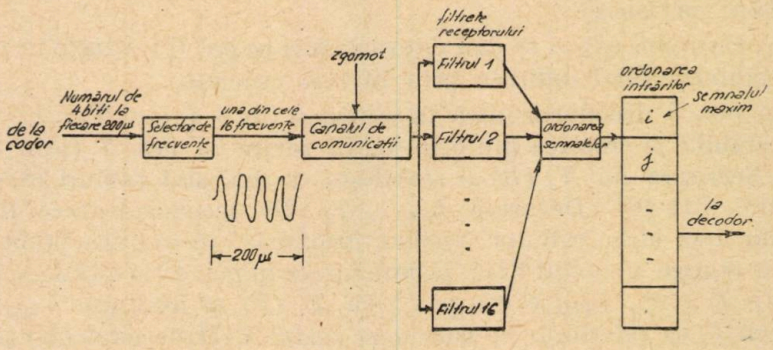


Fig. 10. Modulatorul şi demodulatorul sistemului Lincoln.

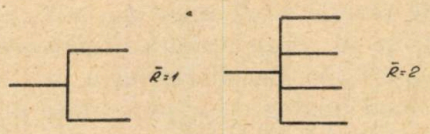


Fig. 11

($\bar{R} = 1$; $R = 5000$ biţi/sec); în structura arborescentă menţionată dintr-un nod pleacă două ramuri (fig. 11 a)

b) — Într-un cuvînt doi biţi sînt de informaţie. ($\bar{R} = 2$; $R = 10.000$ biţi/sec); dintr-un nod pleacă 4 ramuri (fig. 11 b).

3.2.2. *Modulatorul şi demodulatorul.*

Numărul maxim de cuvinte ce pot apărea astfel la ieşirea codorului este 16. Ele sînt modulate sub forma a 16 trenuri de oscilaţii sinusoidale de frecvenţe diferite de durată 200 μsec.

Sub forma aceasta, simbolurile sînt ortogonale datorită unor decalaje de frecvenţă suficiente.

La recepţie semnalul este detectat cu ajutorul unei reţele de 16 filtre acordate pe cele 16 frecvenţe urmate de detectoare de anvelopă. Ieşirile detectoarelor sînt legate la o reţea de ordonare care reţine primele 7 semnale de ieşire în ordinea amplitudinii şi le introduce într-un registru cu 7 celule, iar de aici ele sînt preluate de decodor.

3.2.3. *Decodorul*

3.2.3.1. *Principii funcționale.*

Pentru clarificarea modului de lucru al decodorului se notează alfabetul valorilor luate de cuvîntul emis x, cu a_1, a_2 ... a_{16} iar conținutul registrului de ordonare este considerat ca un vector $y = b_1 \ldots b_2$, b_j fiind un cuvînt a_i astfel încît nici un a_i nu aare de două ori în registrul de ordonare.

Dacă se transmite semnalul $x = a_i$ există următoarele probabilități condiționate de apariție a cuvîntului a_i într-una din pozițiile b_j, sau de neapariție în cadrul lui y

$$P_j = p\,(b_j = a_i/a_i),\ j = 1, 2, \ldots l;\ i = 1, 2, \ldots m$$

$$P_{l+1} = p\,(b_j \neq a_i/a_i)\ j = 1, 2, \ldots l),\ i = 1, 2, \ldots m$$

(în cazul studiat $l = 7$, $m = 16$)

Deoarece sînt ortogonale, toate simbolurile netransmise apar în celelalte poziții cu probabilități egale și de aceea:

$$p\,(y/x) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{m-2} \cdot \cdot \frac{1}{(m-l+1)} P_j,\ j = 1, 2, \ldots l$$

$$p\,(y/x) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{m-2} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{m-l} \cdot P_{l+1}$$

au, restrîngînd:

$p\,(y/x) = \dfrac{(m-l)\,!}{(m-1)\,!} P_j,\ j = 1, 2, \ldots l$ — probabilitatea ca x să ocupe o poziție oarecare b_j

$p\,(y/x) = \dfrac{(m-l-1)\,!}{(m-1)\,!} P_{l+1}$ — probabilitatea ca x să nu ocupe nici o poziție b_j

Pe baza acestor formule se pot calcula valorile λ a căror expresie pentru o intrare ipotetică x^* este:

$$= \log \frac{p\,(y/x^*)}{p\,(y)} - \overline{R}$$

Întrucît toate simbolurile de intrare sînt echiprobabile,

$$p\,(y) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1} \cdot \cdot \frac{1}{(m-l+1)} = \frac{(m-l)\,!}{m\,!}$$

iar λ ia următoarele $l + 1$ valori.

$$\lambda^j = \log \frac{\frac{(m-l)!}{(m-1)!} P_j}{\frac{(m-l)!}{m!}} - \overline{R} = \log mP_j - \overline{R},\ j = 1 \ldots l$$

$$\lambda^{l+1} = \log \frac{\frac{(m-l-1)!}{(m-1)!}}{\frac{(m-l)!}{m!}} - \overline{R} = \log \frac{m}{m-l} P_{l+1} - \overline{R}$$

În cazul sistemului descris:

$$\lambda^j = \log 16\, P_j - \overline{R}, j = 1, \ldots 7$$

$$\lambda^8 = \log \frac{16}{9} P_8 - \overline{R}$$

$\overline{R}$ ia valorile 1 sau 2, iar P_j și P_8 depind de caracteristica de zgomot a canalului de transmisiuni.

În timp, aparatura funcționează ciclic, un ciclu fiind împărțit în 3 intervale, după cum se vede și în figură.

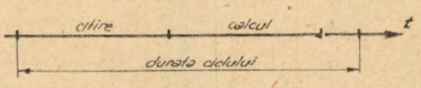


Fig. 12

Vectorii succesivi y_i sînt înmagazinați în registre succesive ale memoriei. În intervalul: „citire"—care durează aproape o jumătate din durata ciclului — vectorul y_n este scos din memorie, în intervalul „calcul" de aceeași durată — este calculat λ_n^j cu ajutorul vectorului y_n și al unei ramuri generate local x_n^*, iar apoi L_n. În restul timpului care a rămas din ciclu L_n este comparat cu pragul curent T și pe baza rezultatului acestei comparații are loc o deplasare înainte ($L_n > T$) sau înapoi ($L_n < T$) în structura arborescentă. Practic, asta înseamnă creșterea sau descreșterea indicelui vectorului y_n cu o unitate. Un nou ciclu este început cu vectorul y_{n+1}.

Algoritmul de decodare dat în fig. 13 este același cu cel dat în fig. 11 cu mici modificări pentru a se desfășura după ciclul menționat mai sus. Între cele două variante există diferențe simple:

— partea stîngă sus a fig. 13 este o versiune ușor comprimată a secțiunii corespunzătoare din fig. 8; se presupune $\lambda_{max} < T_0$ și astfel nu poate avea loc decît o singură depășire de prag.

— succesiunea de operaţii din această parte a diagramei urmează şi nu precede, în fig. 16, creşterea lui n după evenimentul $L_n > T$ din dreptunghiul A. Astfel E se referă la L_{n-1} în fig. 13 pe cînd în fig. 11 se referea la L_n.

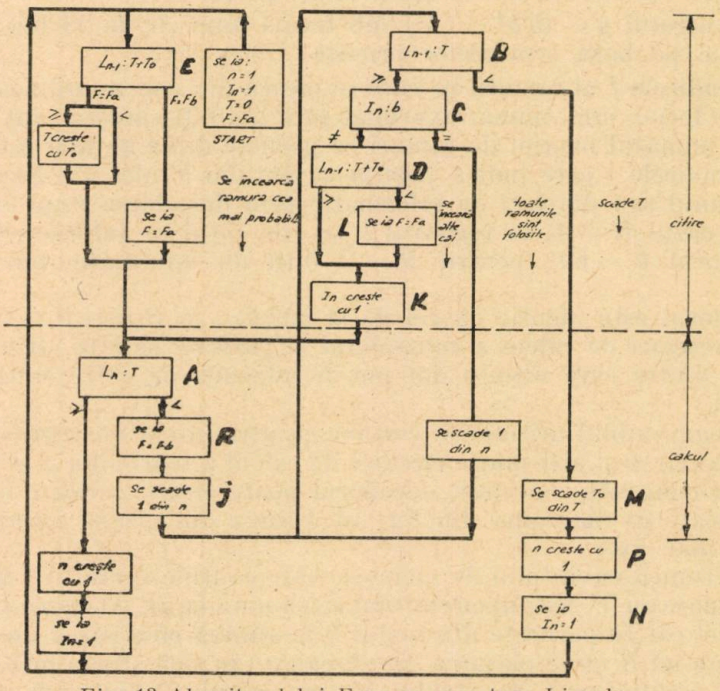


Fig. 13 Algoritmul lui Fano pe aparatura Lincoln.

3.2.3.2. *Structura.*

Decodorul este compus din trei părţi mari : 1) o memorie cu miezuri magnetice, 2) un codor identic celui de la emisie şi 3) un grup de prelucrare a datelor şi elaborarea a comenzilor (fig. 14).

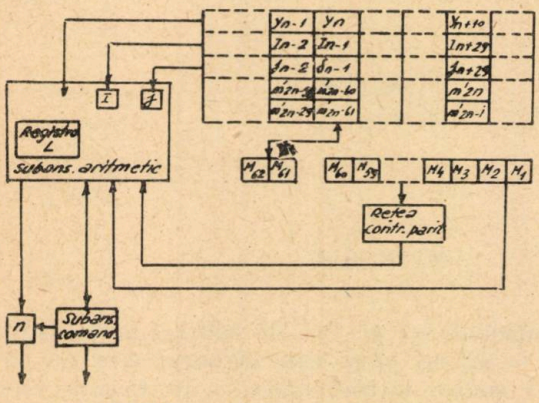


Fig. 14 Schema bloc a decodorului.

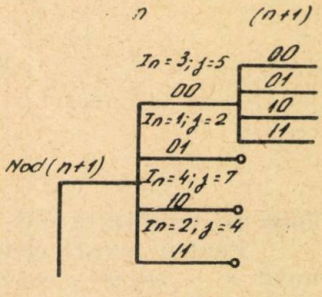


Fig. 15

Memoria conține mai multe registre, în fiecare registru găsindu-se informația necesară pentru stabilirea unei ramuri din structura arborescentă. Indicele unui registru va juca rolul indicelui n din diagrama algoritmului lui Fano. Desemnînd conținutul registrului k sub denumirea de „cuvîntul k" acesta va fi constituit din 4 părți :

1. vectorul $y = (b^1 b^2 \ldots b^7)$ sub forma unui șir de 28 biți generați la recepție pe baza semnalelor primite.

2. indicele I al ramurii pe care se pleacă din nod în ordinea probabilității sub forma unui număr exprimat prin doi biți ; aceștia sînt suficienți deoarece numărul maxim de ramuri ce pornesc dintr-un nod este 4.

3. indicele j care indică poziția cuvîntului b^j ales din șirul y.

4. unul sau doi biți de informație prin decodarea unui cuvînt anterior în cazul $\overline{R} = 1$, în registrul k se află bitul de informație decodat din cuvîntul $k - 60$; pentru $\overline{R} = 2$ biții de informație din cuvîntul $k - 30$.

Codorul este identic cu cel de la emisie : în registrul de deplasare legat la rețeaua de calcul a controlului la paritate se află ultimii 60 biți decodați dintre care ultimii doi pot fi înlocuiți de către subansamblul de calcul.

Subansamblul aritmetric conține printre altele un registru în care este acumulat L și mai multe circuite de calcul a mărimilor I și j.

Așa cum este conceput, decodorul poate efectua oricare din operațiile indicate în diagrama din fig. 13. Cîteva din aceste operații vor fi descrise mai jos :

Secțiunea cuvîntului de memorie care conține vectorul y se notează în continuare cu Y. Restul cuvîntului se va nota cu H. Alegerea sau schimbarea unei căi ce pornește din nodul k înseamnă efectuarea unor modificări asupra lui H iar deplasarea spre dreapta sau spre stînga prin diagramă înseamnă schimbarea registrului asupra căruia acționează decodorul.

3.2.3.3. *Funcționarea (pentru cazul $\overline{R} = 2$)*

Secțiunile Y sînt completate pe măsura recepției semnalelor și elaborării vectorilor y. Cînd nodul n din structura arborescentă este atins prima dată, vectorul y_n este introdus în subansamblul aritmetic și pus sub formă matricială astfel :

$$y = \begin{vmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & g_1^1 & g_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & g_1^2 & g_2^2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ m_1^7 & m_2^7 & g_1^7 & g_2^7 \end{vmatrix}$$

unde m_i^j reprezintă biți informaționali iar g_i^j biți de control la paritate.

Pentru fiecare element $b^j = m_2^j\ m_2^j\ g_1^j\ g_2^j$ este elaborat cîte un element $a^j = m_1^j\ m_2^j\ c_1^j\ c_1^j$ de către codor, introducîndu-se de fiecare dată simbolurile $m_1^j\ m_2^j$ în celulele M_1, M_2 și calculîndu-se simbolurile $c_1^j\ c_2^j$ pe

baza lor și a altor 58 biți anteriori. Se obține astfel matricea :

$$\begin{vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & c_1^1 & c_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ m_1^7 & m_2^7 & c_1^7 & c_2^7 \end{vmatrix}$$

Alegerea ramurii celei mai probabile ($I_n = 1$) înseamnă alegerea celui mai mic j pentru care $b^j = a^j$.

Operațiile de comparare (ca cele din A, B, D) sînt efectuate tot în subansamblul aritmetic prin calculul lui λ^j și adăugarea lui la L_{n-1}. De fapt, în registrul L este memorată diferența $L_{n-1} - T$. (T este pragul curent) ; suma $L_{n-1} + \lambda^j$ este comparată cu 0.

Dacă se execută comparația din chenarul A, în cazul unei sume $L_{n-1} + \lambda^j$ pozitive, aceasta este înmagazinată în registrul L, valoarea lui j în registrul j și I în registrul I iar biții de informație m_1^j și m_2^j în etajele M_1 și M_2 ; registrul M e comutat spre stînga cu două celule, iar conținutul celulelor M_{62} și M_{61} este trecut în ultima parte a cuvîntului de memorie.

Se începe apoi un nou ciclu extrăgînd de la o nouă adresă (dintr-un nou registru Y) și introducînd în memorie un nou vector y în intervalul „citire". Vechiul nod devine acum $n - 1$ și comparația din E se referă la el ; comparația aceasta se face între $L = L_{n-1} + \lambda^j$ și T_0. Dacă pragul trebuie mărit, se va extrage T_0 din L.

Dacă în cadrul comparației din A $L < 0$ conținutul registrului se deplasează spre dreapta cu două celule iar elementele vectorului y se extrag din registrul anterior ($n - 1$). Deoarece registrul L conține $L_n - T$ în loc de $L_{n-1} - T$, se recalculează și se extrage din acest registru. Dacă $L_{n-1} - T$ este pozitiv, se stabilește cu ajutorul registrului I dacă s-au examinat toate ramurile ce pleacă din nodul n.

Se caută o altă cale cu probabilitate mai mică, adică un cuvînt din vectorul y cu indice j mai mare. Dacă o asemenea cale este găsită, ea este încercată prin comparația A (după ce, în prealabil, s-a verificat că $L_{n-1} - T_0 > 0$).

Pentru clarificarea celor expuse se dă mai jos un exemplu fig. 15. Pentru fiecare ramură ce pleacă din nodul n sînt date valorile I și j. Altfel spus, cuvîntul ce conține biții de informație O1 ocupă locul al doilea în vectorul y_n, cuvîntul 1 1 ocupă poziția 4, etc. Inițial va fi prelucrată ramura a doua (O1 ; $I_n = 1$, $j = 2$). Dacă $L_n = L_{n-1} + \lambda_n^2$, este recalculat L_{n-1}, și apoi, se merge pe ramura următoare în ordinea probabilității, adică se calculează pentru cuvîntul cu 1 1 ș.a.m.d.

Concluzii

Pe baza exemplelor expuse se poate afirma că realizările practice nu merg totdeauna pe calea deschisă de teoria codurilor detectoare și corectoare de erori și chiar cînd acest lucru se întîmplă, fantezia celor care construiesc efectiv aparatura mai are destul de spus.

Catedra de electronică aplicată
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Gosmand, R*, Le système de télécomande embarqué des satellites ESRO I et ESRO II ; L'onde Electronique, vol 49, fasc 4. p. 435 — 441.
2. *Benice, R și Frey, A* : An Analysis of Retransmission Systems ; IEEE Trans. on commun. Technol. COM 12, Nr. 4, decembrie, 1964, p. 135—145.
3. *Lebow, I și Mc Hugh, P* : A Sequential Decoding Technique and its Realization in the Lincoln Experimental Terminal ; IEEE Trans. on Commun. Technol. COM-15, Nr. 4, august 1967 p 477—491.
4. *Purce, A. Barrow, B* : Effective Application of Forward -acting Error-control Coding to Multichannel HF Data Modems ; IEEE Trans. Commun Technol, COM-18 Nr. 4 aug/1970

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 3

MANAGEMENT

C.Z.:621.33

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF THE OPERATIONAL DUTY OPTIMIZING OF THE ELECTRIC TRACTION* II

AL. POPA, A. CARABULEA

3. Presentation and Commentation of the Calculus Logic Diagrams

The general logic diagram represented in Fig. 1, is used to ordinate the calculus of the costs which form the structure of the mathematic model (4) when we are working with a digital computer.

The following calculus areas observed on the diagram Fig. 1.

— The input values and the operators are given by the cells (IL1 —IL2)

— Between the cells (IL 3 — IL8) it is the calculus area of the expenses depending on the contact line section.

This portion ends with the determination of the optimum section of the electric contact line through the minimalization of the determinist and probabilist expenses.

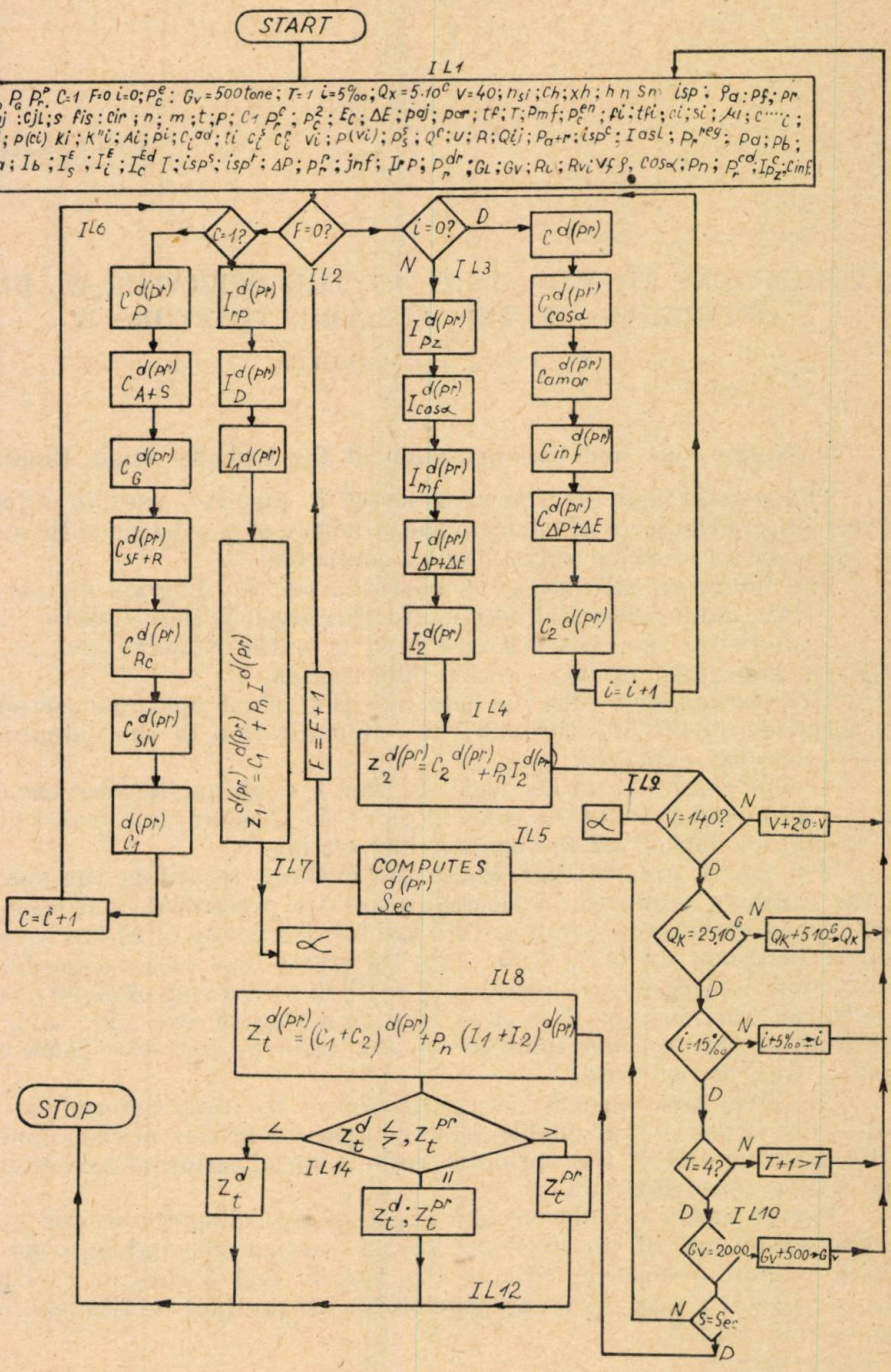
— The third area of the logic diagram is containe between the cells (IL6 — 1L7) and permits the calculation of the expenses and investments which do not depend on the contact line section.

The fourth area is that where the cyclings regarding the specific of the railways subjected to electrification are performed, and refers to the : speed variation $v = (40 - 140)$ km/h, with a step of 20 km/h variation of the goods traffic $Q_k = (5 - 25)\ 10^6$ brutto tons with a step of $5{,}10^6$ brutto tons ; variation of slope $i = (5 - 15)\%$ with a step of 50/00 ; variation of the traction type $T = (1 - 4)$ with a step of one unit and the variation of the medium tonnage on the train $G_v = (500 - 2500)$ tons with a step of 500 tons.

The fifth area permits the calculation of the total determinist and probabilist expenses, and enables their comparison in view of the minimum value printing and of the optimum variant specification of execution of the railway electrification.

For an easier calculus of the expenses regarding the power factor compensation and of the expenses for the contact line influence on the closed telecommunication circuits the Fig. 2. and 3 present two logic diagrams which may serve as specialized subroutines within the logic diagram in Fig. 1.

* This work is the continuation of the paper ,,Contributions to the study of the Operational duty optimizing of the electrical traction'' published in the Polytehnical Institute Bulletin number 2—1973.


START
IL1
IL2
IL3
IL4
IL5
IL6
IL7
IL8
IL9
IL10
IL12
IL14
F=0?
i=0?
C=1?
D
N
F=F+1
C=C+1
COMPUTES
V=140?
V+20=V
T=4?
T+1>T
S=Sec
STOP

The logic diagram presented in Fig. 2., for the power factor optimization make possible the calculus of the minimum expenses and investments necessary for the compensation of the power factor up to the optimum value (cos $\varphi_{opt} = 0.93$ when the supply voltage is $U = 110$ KV; cos $\varphi_{opt} = 0{,}95$ for the supply voltage $U = (6-35)$KV and cos $\varphi_{opt} =$

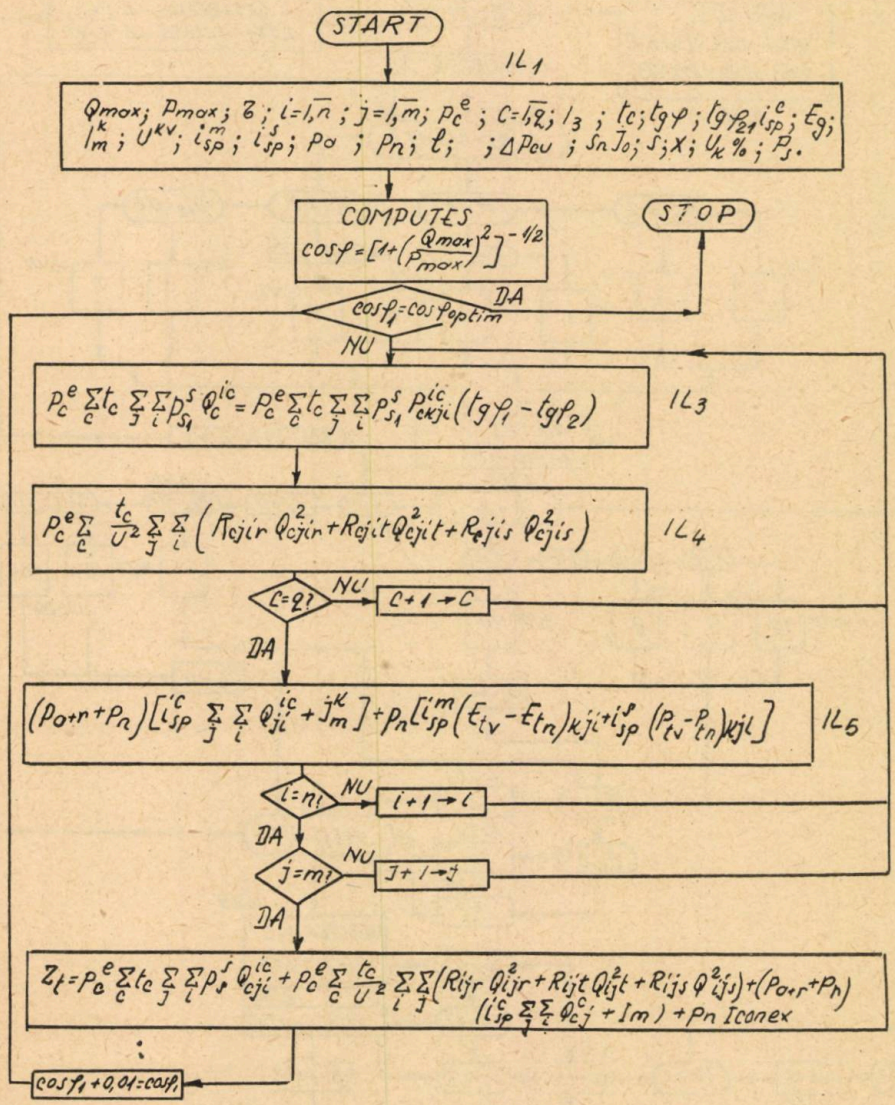


Fig. 2 General logic diagram for the power compensation factor study.

= 0.98 for voltage of 0.4 kV). In the diagram are presented besides the model (13) the differences $(E_{tv} - E_{tn})$ and $(P_{tv} - P_{tn})$ representing the energy and respectively the power loss in the variants which are compared

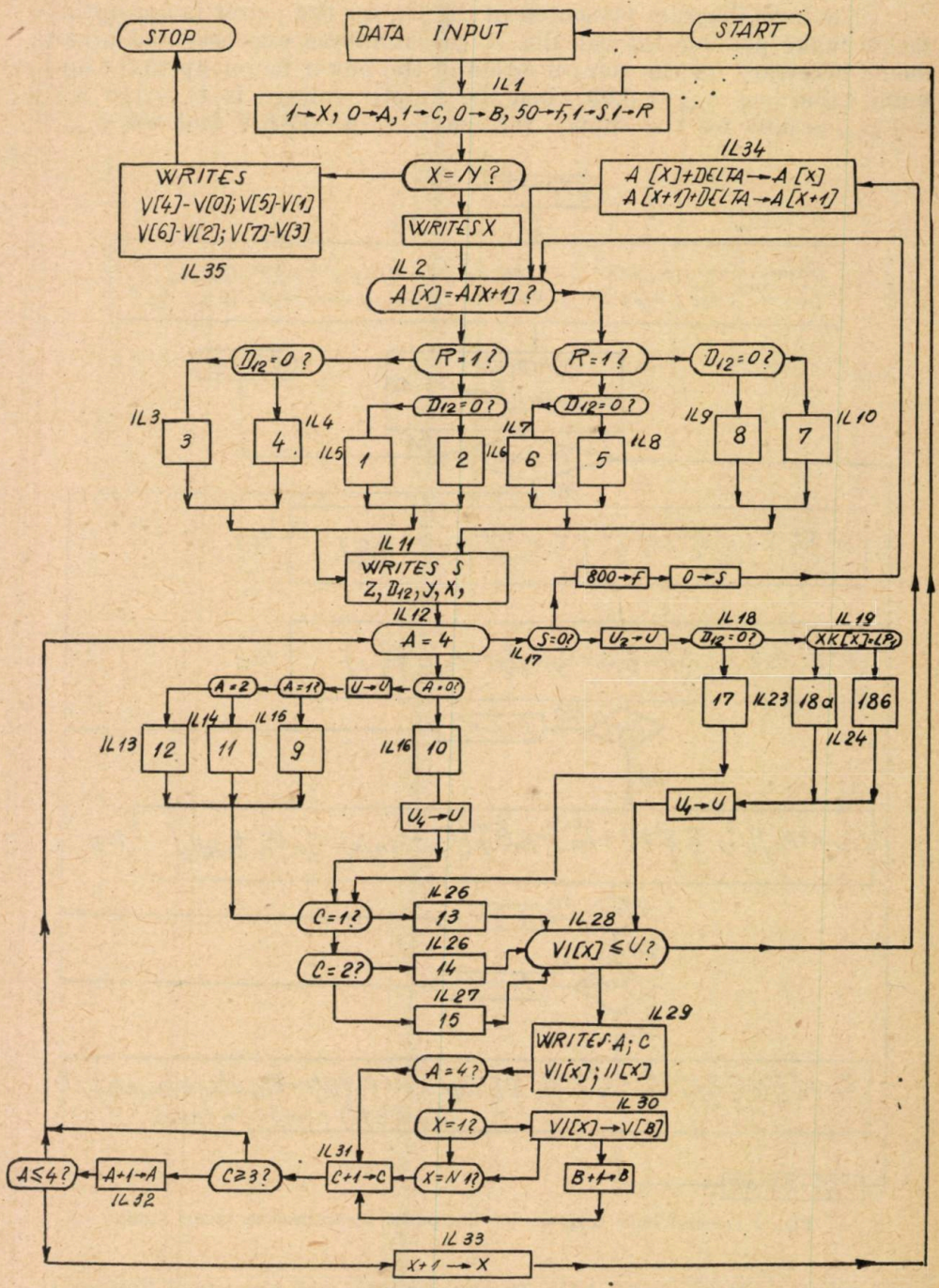


Fig. 3 Logic diagram for the ILECT program a) data input

and for which are considered the power factors given by the tangents tg φ_1 and tg φ_2.

In the logic diagram in Fig. 3 are given the following areas of calculus of the dangerous and disturbing values inducted in the telecommunication circuits closed to the electric contact line :

The input and cycling operator datum area (IL 1) Thus X = number of closed section ; A = normal working ($A-2$) or on monophased shortcircuit ($A-1$) ; biphased ($A=2$) when the two aerial wires touch and triphased ($A=3$) when the aerial wires make a galvanic connection with the earth. Through the value (C) was noted the type of telecommunication circuit with the contact line influence. This circuit can be insulated at both end ($C=1$), grounded at both ends ($C=2$) and insulated at one end and grounded at the other ($C=3$). Such circuits of telecommunication are frequently used in railway field. The operator (B) serves to the selection and retention in the cell (IL 35) of the induced dangerous voltages (because they can produce electrocution) and disturbing (because they cause distortion of the electric waves carrying information as messages) The dangerous values depend on the frequency $F=50$ Hz and the disturbing values are conditioned by the frequency $F = 800$ Hz. The logic diagram is conceived taking account of the parallel and oblique approach between the lines and enables the calculus of the own and mutal impedances for the establishment of the induced voltages.

The calculated induced voltages are compared with the normate ones (U_1, U_2, U_3, U_4) in the cell IL 28, and in case that the first are below the last we may consider that the electric line road is favourable under the influence aspect. Notwithstanding the distance between the line in presence is enlarged until an influence practically negligible is obtained. If the train does not allow a much to great distance of the lines then protection measures are provided for, on both types of lines in view of an influence attenuation.

The protection equipement requires maintenance expenses and investments which are included in the general mathematic model of the contact electric line influence on the telecommunication neighbouring circuits.

The calculus ratio of the dangerous and distunbing induced values can be followed in the literature (8).

The working conditions study of the contact lines by means of the subroutines for the determination of the optimum section, for the power factor compensation and for the influence attenuation on the neighbouring telecommunicatic circuits, allow the optimum concept application at the selection of the research — design — mounting and working variations of the railway installations within electrification using digital computer of heavy duty.

4. Conclusions

An optimum organization of the research — design — mounting and working of the installations as part of the railway subjected to electrification involves the complex, approach of the problems by means of the mathematical modelling and of electronic computers.

Aiming to develop this idea the paper emphasizes the way of building determinist and probabilist mathematic models of the total expenses (Z_t) caused by the application of optimum concept at the design and execution practice level of the railway electrification. The structure of the expenses was digital modelled, taking into account the operational research concepts and, namely, of the waiting theory, the stocking theory, the wear theory, the working reliability theory, the power factor compensation theory, the line theory and graph theory applied to the stage of research—design and mounting of the installations under electrification.

The algorithm contains the mathematic models (4 — 26) (published in nr 2 — 1973) and the logic diagrams from the Figures 1—2—3, and allows the optimization of the railway electrification through the minimalization of costs (Z_t) under restrictive conditions imposed and presented under the form of the relations (3). On base of the digital example from the annex, the algortithm was tested with the digital computer I.B.B. 360/30, It was thus confirmed the possibility of the optimum theory application to the level of contact line conductor section determination, power factor compensation influence of the electric lines closed to the telecommunication circuits and to the determination level of the optimum variant research design mounting and working of the railways under electrification, on the way of new operational research concepts and heavy duty computer use.

5. Calculus example (annex)

It was planned the electrification of a railway section with a given length on a line with a slope variation between (0 — 15%). The traction type can be simple ($T = 1$) or multiple ($T = 2 - 4$). The energy cost $p_c^e = 0.15$ lei/kWh. The goods traffic $Qk = (5 - 25).10^6$ tons, and the medium tonnage on the train varies between (500 — 2500) tons. The speed on section is $V_s = (40 - 140)$ km/h, and the commercial speed $V_{oc} = (0.8 - 0.95)V_s$. The investments for the locomotive $I_L = (6-8).10^6$ lei ; the other values interferring in the general mathematic model are ;

— wages of the locomotive staff 25 lei/hour and for the car staff 20 lei/hour, tiv = 30 years ; $tiL = 40$ years. Medium wage per year for the technical and administrative staff 20.000 lei/year. $G_L = 120\ t_f$; $I_{pz} = 400.10^6$ lei ; $h_L = (1.3 - 1.5)$.

The investment amortization cotes can be constant or variable. The last are applied to prevent the moral wear of the electric installation inclusively the high duty locomotives.

The numerical data requested in the application of waiting, wear storage and reliability refer to the electric lines of the energetic system in particular to the railway installation on electrification in our country.

The data regarding the mounting of the electrifcation installation are grounded on the experience of the achievement of some sections of electrified railway in our copuntry.

The data regarding the working of the electrifie railway allowed the building of the probability laws which operate on diverse departments and make easier an analysis of the application way of the optimum at different levels.

The compensation of the power factor implies the determination of the active loss specific coeficients in the contact network resistences (Rij) are known at a reactive power circulation (Qij) requested by different receiver sources (lines, stations, locomotives, etc) working at the voltage $U = 25000$ V. In order to determine the optimum solution the reactive power compensation for $\cos \varphi_1 = 0.9$; $\cos \varphi_2 = 0.93$; $\cos \varphi_3 = 0.95$; $\cos \varphi_4 = 0.98$; $\cos \varphi_5 = 0.99$ is effected.

The reactive and apparent powers for these situations are the calculated $Q_c = P_c \operatorname{tg}\varphi$ and $S_c = \sqrt{P_c^2 + Q_c^2}$.

The reactive power (Qc) and the appearance (Sc) are at the consumer.

The power loss at the consumer due to the reactive power (Q_c) circulation is subsequently determined on the contact line and in the system on base of the transfer elements of in the energetic considered chain. The power and energy loss are afterwards added, and the value of the expenses (Z_t) caused by the compensation with the seized in the logic diagram from Fig. 2 is calculated.

It results on base of the effected calculation that for voltages within (6 — 35) kv. the expenses (Zt) present a minimum at a value of the power factor $\cos \varphi = 0.95$.

The study of the contact line influence on the telecommunication neighbouring circuits has a great importance from the theoretic and practic aspect point of view because the electric circuit erection is carried out in the presence of the telecommunication circuit. The selection of the contact line wiring at a convenient distance so that the operation of the weak current circuits be not disturbed. The telecommunication circuit is frequently moved of the distance is to small as to the electric line, which implies a growth in the investments and the expenses regarding the electromagnetic influence attenuation of the circuits in presence.

The establishment of the influence involves the determination of the impedances and admittances for paralle and bevelled approaches with rations of the form ;

a) paralel approach between the neighbouring circuits :

$$Z^{(1)}_{1-I} = \frac{F}{700} \lg \frac{(A^2+10^2\rho)}{F(A^2+H_1^2)} [\Omega/\text{km}]; \quad Z^{(2)}_{1-I-II} = \frac{F\, D_{12}}{200A} \frac{H(H_0+H_1+H_I)}{(A^2+4H_0)} [\Omega/\text{km}]$$

(A—1)

$$y^{(2)}_{1-I} = \frac{0.72.10^{-2}.\omega}{(A^2+100)} [\text{s/km}]; \quad y^{(8)}_{1-I-II} = \frac{0{,}2.10^{-2}.\omega.A}{(N_1+2)(A^2+100)^2} [\text{s/km}]$$

b) bevelled approaches between the neighbouring circuits :

$$Z^{(3)}_{1-I} = \frac{\pi.F.10^{-2}}{2\operatorname{tg}\varphi} \left[A_{max} \ln \frac{A^2_{max}+H_0^2}{A^2_{max}+H_1^2} - A_{min} \ln \frac{A^2_{min}+H_0^2}{A^2_{min}+H_1^2} \right] [\Omega/\text{km}]$$

$$Z^{(4)}_{1-I-II} = \frac{D_{12}.F}{200\cos\alpha} \cdot \frac{1}{(A_{max}-A_{min})} \left[\frac{H_0(H_0+H_1+H_I)}{A^2_{max}+4H_0^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{H_0(H_0+H_1+H_I)}{A^2_{min}-4H_0^2} \right] [\Omega/\text{km}]$$

$$(A-2)$$

$$y_{1-I}^{(5)} = \frac{0{,}72 \cdot 10^{-2} \cdot \omega}{\operatorname{tg}\alpha}\left[\frac{A_{max}}{(A_{max}^{2-}100)} - \frac{A_{min}}{(A_{min}^{2-}100)}\right]\left[\frac{1}{(A_{max}^{-}A_{min})}\right] \text{[s/km]}$$

$$y_{1-I-II}^{(6)} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot \omega}{(N_1+2)\cos\alpha}\left[\frac{A_{max}}{(A_{max}^{2+}100)^2} - \frac{A_{min}}{(A_{min}^{2+}100)^2}\right]\left[\frac{1}{(A_{min}^{-}A_{min})}\right] \text{[s/km]}$$

The exponents in round brackets of the impedances (Z) and of the admittances (Y) refer to the cells in the logic diagram given in Fig .3.

The following magnitudes interfer in these relations F = dangerous or disturbing frequency (50 Hz and 800 Hz) A = distance between the lines = (50 — 200) m ; ρ = resistivity of the soil where the electrified railway is passing ; H_1 = the height of suspension from the ground of the contact line conducts ; D_{12} = the distance between the conduits of the weak current line within induction. Ho = the current penetration through the soil equivalent depth. H_I = the height from the soil of the conductor circuit conductors in induction ; ω = the pulsation of the influence current in the contact line. N_1 = number conductors of the telecommunication line within induction. $\operatorname{tg}\alpha$ = tangent of the angle between the contact and the telecommunication line at bevellec approaches. Amax ; Amin = maximum and minimum distance between the two lines at the oblique neighbouring portion ends.

In the cells (9—11—12) from the diagram of the Figure 3 are calculated the shortcircuit currents interferring on the contact lines with the ratio published in the literature (8). Through the cell (10) are determined the current in normal condition at the maximum load of the contact electric line.

In the cells (13—14—15—17 and 18) are calculated the induced values and namely the dangerous (13—14—15) and disturbing (17—18) induced voltages with the ratio of the form ;

$$V_i^{(13)}(x) = \frac{y_{1-i}}{y_1} U_1 . e^{-x\sqrt{z_i y_i}} + Z_{1-i} J_1 \left[\operatorname{ch} x\sqrt{z_i y_i} - \frac{z_{ci}}{z_i} \operatorname{sh} x \sqrt{z_i y_i}\right] \quad \text{[v]}$$

$$(A-3) \quad V_i^{(14)}(x) = \frac{y_{1-i} U_1}{y_1}\left[e^{-x\sqrt{z_i y_i}} - \operatorname{ch} x \sqrt{z_i y_i} - \operatorname{sh} x \sqrt{z_i y_i}\right] -$$

$$- z_{1-i} I_1 \left[\frac{1}{z_{ci}} + \frac{1}{z_i}\right] \operatorname{sh} x \sqrt{z_i y_i}$$

$$V_i^{(15)}(x) = \frac{y_{1-i} U_1}{y_1} \cdot e^{-x\sqrt{z_i y_i}} + Z_{1-i} I_1 \left[\operatorname{ch} x\sqrt{z_i y_i} + \frac{z_{ci}}{z_i} \operatorname{sh} x \sqrt{z_i y_i}\right] \quad \text{[v]}$$

The index (1) refers to the influencing electric line and (i) refers to the telecommunication circuit thin induction. The disturbing induced values for bifilar telecommunication nonsimetric circuits in comparison with the ground uses the cells (18 a) and for nonsimetric telecommunication circuit as against the contact network is usel the cell (18) in the logic

diagram from the Figure 3. The cell (17) is used when the circuit subject to induction is monofilar. For these three situations can be followed the ratios given in the literature [8], [4].

After the calculation of the values induces as against the ground in the weak current lines the values $Vi^{13} Vi^{14}$; Vi^{15} are compared in the diagram from the Figure 3 with those normalized markes (U). If $(V_I < U)$ the cycling is finished, and if $(VI > U)$ the distance betwee the lines $(A + + \Pi A)$ in the cell $(IL - 34)$ is enlarged until the calculated values are smaller than the normalized ones which are providing the normal operation of the telecommunication circuit in presence of the electric contact lines. The cyclings are effected for all operating conditions of the contact lines and in any situation frequently met in practice.

In the cell (IL — 35) is calculated the voltage induced along the circuit subject to induction through the reduction of the induced voltages as to the ground and after the machine is passing in the STOP position. On the list example basis of the electric contact line influence on the weak current neighbouring circuits is established that for the distance between the circuit in presence larger than 100 metres the influence level verification is necessary only for short circuit regimes of the contact line. As a result of this calculus the electric contat line road is determined and the design of the mechanic part of the network may begin.

In order to establish the optimum variant of achievement of the railway electrification on a given length section are calculated the total probabilist and determinist expenses and the variant with minimum costs is accepted. Through the analyse of the desing — mounting and working data of the railway under electrification in our country, it results that the probabilist mathematic models include and reflect the practic situations and the changes imposed by different probable states of the conditions in which is effected a railway electrification work.

The test of the mathematic models (4) and (26) shows that the electrification is advantageous for the simple lines for $G_v = 1500$ tons and $Q_K = 7.10^6$ we may consider advantageous the solution where interfer $G_v = 1500$ tons and $Q_K = (20 - 24) \cdot 10^6$ tons.

When the medium slope on profile is $15^0/_{00}$ the optimum solution appears for $G_v = 1500$ tons ; $Q_k^{max} = 5.10^6$ tons. If the railway line is double the electrification is advantageous also for the most difficult conditions considered in the calculus, namely ;

$G_v = 2500$ tons; $Q_k = 25.10^6$ tons and $i = 15^0/_{00}$ and besides the transport capacity raises as well as the productivity due to the disparition of the restrictions existent for the simple lines.

The investments time lagging has a favourable influence on the railway electrification if the funds are imparted so as portions of electrified railways be partially set working, and the investment fund locking up period be as short as possible.

The mathematic models which have been presented in the present paper alows the determination of the optimum variant of research — design — mounting and operating of the railway subject to electrification when the operational research concept and the digital computers are used.

Chair of Management
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

REFERENCES

1. *Popa Al.*, Utilizarea calculatoarelor electronice în transporturi Editura Tehnică, Bucureşti, 1971.
2. *Popa Al., Carabulea A.*, Algorithm Concerning the Railway Electrification Optimisation by Means of Operational Research Digital and Electronic Computer's. Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' XXXII nr. 3, (mai — iunie) 1970.
3. *Popa Al., Carabulea A.*, Beitrage zur Untersuchung der Optimalisirung der Electrizierung der Eisenbahnen mit Hilfe der Mathematischen Modellirung , Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' XXXII nr. 5—6. (Oct.—dec.) 1970.
4. *Carabulea A.*, Contribution a l'étude de l'influence des reseaux électrique sur les circuits de telecommunications Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' XXXI nr. 5 (Sept.—oct.) 1969.
5. *Popa Al., Carabulea A.*, Mathematical Model and Logical Scheme for Railway Electrifying and Diesel Drive Optimalization Buletinul Institutului politenic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' XXX nr. 2, (1968).
6. *Popa Al., Carabulea A.*, Contribution a l'étude technique et economique des systéme de traction electrique et Diesel Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' XXIX nr. 2 (1967).
7. *Popa Al.*, Calculul consumului de energie electrică cu ajutorul calculatoarelor electronice analogice În Automatica şi Electronica nr. 4 (1970).
8. *Carabulea A.*, Algoritmul influenţei liniilor electrice trifazate asupra circuitelor învecinate de telecomunicaţie In Energetica CNIT Bucureşti nr. 11 (nov.) 1964.
9. *Carabulea A. Gheorghe A.*, Contribution to the Study of the Designing and Operating of Electric Power Stations by Meaas of Mathematic Modelling In Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Nr. 3—4 1971.
10. *Carabulea A., Anton Gh., Ruşitoru Gh.*, Contributions to the Study of the Premises of Decisional Informatics In Buletinul Institutului politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti Nr. (3—4) 1971.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică ,,Informaţia'' c. 2872

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40 820

19?? DEC 14

F1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV NUMĂRUL 4 ANUL 1973,
IULIE — AUGUST

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquees" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présenté, il refléte en premier lieu l'activité scientifique du cors didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului"

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV — NUMĂRUL 4

IULIE — AUGUST

1 9 7 3

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. ing. *Petru Baltă*; Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*, Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua*; Conf. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific); Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu*; Prof. ing. *Ștefan Mantea*; Prof. dr. ing. *Marius Preda*; Prof. ing. *Mihai Renert*; Conf. dr. ing. *Mircea Soare*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*.

Redactor responsabil

Rector

Prof. dr. docent *Radu Voinea*

membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

C. Drăgușin
Studiul echivalenței multipolilor cu ajutorul ecuațiilor Booleene 21

N. Mirescu
About a Transformation in the Field of a Epure 31

FIZICA

D. Bogdan, Tr. Creţu, Gh. Macarie
Stabilirea formelor factorilor de formă ale tranzițiilor beta între stări descrise de interacțiunea cuasiparticula — fonon 41

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

G. Costeanu, Ortansa Landauer, Cornelia Mateescu
L'influence de la viscosite du milieu de reaction sur la vitesse de l'hydrolyse acide de quelques esters aliphatiques dans les solvants mixtes . . . 51

I. Gh. Constantinescu, Irina Constantinescu
Obținerea unui îngrășământ cu microelemente în suspensie 55

REZISTENȚA MATERIALELOR

V. Bogdan, Oltea Bogdan
Expresii ale tensiunilor și deformațiilor dintr-un disc în mișcare de rotație 61

MECANICA

Al. Marinescu, St. Staicu, Francine Atanasiu
Ecuațiile mișcării relative de apropiere și întîlnire orbitală ținînd seama de nesfericitatea planetei 69

MECANICA FINĂ

Ovidiu I. Popescu
Precision Ball Measurements Using a Mechanical Caliper Coupled with a Laser Interferometer System 87

ENERGETICA

Maria Tudose, M. Eremia, Camelia Marinescu
Calculul stabilității dinamice a unui sistem electric folosind pachetul de subprograme al calculatorului IBM *1130* 97

HIDRAULICA

St. Zarea, N. Vasiliu
Neue Methode fur den Entwurf der Peltonschaufel und ihre Überprüfung mittels Modelversuche 119

AUTOMATICA

V. Găburici
Oscilatoare fluidice noi 129

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

A. Brăgaru, I. Popescu
Considerații asupra conceptului de sistem tehnologic în tehnologia construcției de mașini 135

Al. Dorin
Programarea mașinilor de frezat cu comandă numerică în cazul prelucrării unor suprafețe curbe 145

MANAGEMENT

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru
Contributions to the Study of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions 151

Резюме

Д.К. 517

К. Дрэгушин

Изучение эквивалентности многополюсов при помощи булевых уравнений.

Употребляя булевые уравнения, даются необходимые и достаточные условия для сохранения полной проводимости в отношении с данными классами преобразований контактных и вентильных многополюсов.

Эти результаты обобщают теоремы, автора о вентильных многополюсов и теоремы Серджу Рудяну о безвентильных многополюсов.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 744

Н. Мирескy

К некоторому превращению в поле эпюры

В начертательной геометрии не изучаются превращения, которые могут происходить в поле эпюры. Автор переносит на эпюры Монжа превращение, определяющее рельефную перспективу.

В данном случае в поле эпюры имеет место проективное превращение.

Были найдены инварианты и соотношения между начальным и превращенным предметом.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 539

Д. Богдан, Т. Крецу, Г. Макарие.

Составление формулей для формфактров бета распада между ядерных состояний описанных при помощи взаимодействия квазичастиц с фононом.

Призведены формулы формфакторов для бета переходов между ядерными состояниями описанных при помощи взаимодействия квазичеастиц с фононом. Расчеты основаны на поумикроскопическое описание ядерных взаимодействий.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Summary

D.C. 517

C. Drăguşin

The Study of the Equivalence of the Multipoles by Means of the Boolean Equations

Using boolean equations, o gives necessary and sufficient conditions for the keeping of some total conductibilities in respect of the given classes of transformations of the multipoles with contacts and rectifiers.

These results generalise the theorems obtained by the author for the multipoles with rectifiers and those obtained by Sergiu Rudeanu for multipoles without rectifiers.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 744

N. Mirescu

About a Transformation in the Field of a Epure

Within the Descriptive Geometry, the transformations that can take place in the field of a epure (draught) are not being studied.

The author transfers the transformation defining the draught perspective to a Monge epure.

In this case, a projective transformation occurs in the field of the epure.

The invariants and the relations between the initial and the transformed object have been found.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 539

D. Bogdan, T. Creţu, Gh. Macarie

The Establishment of the Formfactors Formulae for Beta Transitions Bettwen Nuclear States Described by Quasiparticle-Phonon Interaction

The form-factors formulae for the beta transitions between nuclear states described by the quasiparticle — phonon interaction are established. The calculation method is based on the semimicroscopical theory of the nuclear interactions.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 66

Г. Костеану, Ортанса Ландауер,
Корнелиа Матееску

Влияние вязкости реакционной среды на скорость кислого гидролиза некоторых алифатических эфиров в смешанных растворителях

Авторами произведено сравнительное изучение влияния вязкости растворителя при кислом гидролизе формиата и ацетата n — бутила в системе вода — ацетон и кислом гидролизе n— бутила в системе вода — диоксан, на основании отношения Е. А. Моельвейн—Хьюза и А. Оландера.

Установлено, что каждый растворитель ведет себя по разному по сравнению с другим и что влияние вязкости среды на скорость реакции зависит также и от длины гидрокарбонатной цепи эфира.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 631.86

И. Константинеску, Ирина Константинеску

Получение удобрений содержащих микроэлементы в виде суспензий

Авторы изучали средства получения одного комплексного удобрения НРК, которое содержит микроэлементы „Зн" и „Мн", очень полезные агрохимиеским процессам.

Качества этого удобрения дают возможность использовать его с хорошими результатами в процессе питания растений.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 620

В. Богдан, Ольтя Богдан.

Напряжения и деформации во вращающемся диске

Устанавливаются напряженное и деформированное сосояния. равномерно вращающегося диска с бесконечной длительностью

Начало движения описывается потенциальной функцией, полученной ранне в работее (I) Составленные выражения для напряжений и деформаций соответствуют полученным другими способами и являются проверкой потенциальной функции Ф.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 66

G. Costeanu, Ortansa Laudauer, Cornelia Mateescu

The Influence of the Medium Viscosity on the Reaction Velocity in Acide Hydrolyse of Some Aliphatic Esters in Mixed Solvents

The authors deal with a comparative study on the viscosity influence of the solvent on the acid hydrolisis of *n*-butyl formate and acetate in various acetone-water mixtures and on the acid hydrolysis of *n*-butyl acetate in dioxane-water mixtures, depending on E. A. Moelwyn — Hughes and A. Olander's ecuations.

The underlined that every solvent has a different behaviour and the viscosity influence of medium on the reaction velocity depends on the length of the hydrocarbonate chain of the ester.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 631.86

I. Constantinescu, Irina Constantinescu

Obtention of a Fertilizer with Suspension Microelement

The problem of obtaining complex suspension N. P. Zn. Mn and N.P.—K.Zn. Mn fertilizers has been approached.

The complex suspension fertilizers that were obtained have the following advantages: the manufacturing process does not need special installations, uses cheap raw material and the dosage of nourishing elements is in an adequate ratio compared to the soil requirements.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 620

V. Bogdan, Oltea Bogdan

The Expressions of the Stresses and of the Deformations in a Disk in a Rotation Movement

The author determines the expressions of the stresses and of the deformations in a disk in a uniform rotating movement. The shape of the disk is cylindrically with an infinite length (i. e. a plane deformation state). The problem is solved in displacements, using a potential fonction which was determined in a previous paper (1).

The expressions obtained for the stresses and deformations are in concordance with the values determined by other ways. They are a confirmation of the potential fonction Φ.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 533

Ал. Маринеску, Ст. Станку, Фр. Атанасиу

Уравнения относительного движения орбитального приближения и встречи имея в виду несферичность планеты.

В работе устанавлвиаются общие уравнения отосительно движения пространственного вездехода по отношению к другой орбитальной системе, связанной с другим вездеходом движущимся по какой-нибудь космической орбите. В установении уравнений имеется ввиду несферичность планеты.;

Анализируются частные случаи этих уравнений появляющихся чаще всего в применениях.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 621.316.1

М. Тудосе, М, Еремиа, К. Маринеску

Исчисление динамической стадильности электрической системы, пользуясь пакетом с научными подпрограммами SSP вычислительной машины IMB 1130.

Излагается вычислительный метод динамической стадильности электрической системы в случае появления симметричного повреждения, считая и влияние схем амортизации и регулирований напряжения и скорости,

Излагается строгая дедукния математической модели, изучаемого физического явления следован вычислительном альгоритмом.

Альгоритм был представлен программой, написанной в системе программирования основного фортрана, пользуясь пакетом с научными подпрограммами SSP вычислительной машины IMB 1130, принадлежащей вычислительному центру Бухареского политехнического института.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 621.2

Ст. Зареа, Н. Василиу

Новый метод для строения ковша пельтона и экспериментальная проверка на моделе

В работе предлагется новый метод для графоаналитического определения активной поверхности конца Пельтона и представлены конструктивные и функциональные характеристики лабораторной ковщевой турбины выполненной с целю проверки метода проектирования.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 621—52

В. Гэбуричь

Новые жидкостные осцилляторы

В работе кратко указаны принципы осуществления жидкостных осцилляторов, в особенности тех которые используют элементы с присоединением потока воздуха к стенке (эффект Коанда).

Описаны различные типы осцилляторов оригинальной выдумки

Хотя описаны жидкостные осцилляторы и ниже по их реализациям (частота, форма колебаний) чем электронические, они находят себе широкое применение в секвенциальной цепи управления употребляемых при управлении некоторых процессов химической промышленности и конструкторской промышленности станков.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 533

Al. Marinescu, St. Staicu, Fr. Atanasiu

The Equations of the Orbital Approaching and Rabndez-vous Relative Motion Taking into Account the Planet

The vaper establishes the general equations of the relative motion of a space vehicle relative to an orbital system fixed to another vehicle moving on some conical orbit.

For determining the equations, the planet non sphericity is taken into account.

Some particular cases of these equations acuuring moose often in applications are analyzed.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 621.316.1

Maria Tudose, M. Eremia, C. Marinescu

The Calcul of the Dynamic Stability of an Electrical System which Uses the SSR (Scientific Subprogram Package) of the IBM 1130 Computer

The authors present a mathematical treatment of the dynamic stability of an electrical system in case of a symmetrical break down, taking also under consideration the influences of the damping circuits and of the voltage and velocity regulations.

The work includes also a precise deduction of the mathematical model of the physical phenomenon under consideration followed by an algorithm for computation.

This algorithm has been tested using a program written in basic Fortran IV which uses the SSR (Scientific Subprogram Package) of the IBM 1130 computer belonging to the Computer Center of the I.P.B.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 621.2

St. Zarea, N. Vasiliu

New Method for the Construction of the Pelton Bucket and the Experimental Test on a Model

The work suggests a new method for the grapho-analitycal determination of the active surface of the Pelton bucket and presents the constructive and working specific features of a Pelton turbine achieved in order to check the suggested method.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 621—52

V. Gaburici

New Fluidic Oscillators

The papar briefly shows the principles for achieving fluidic oscillators, especially those using elements with air jet wall attachement (Coandă Effect).

Types of oscillators of a new design are described.

The shown fluidic oscillators, although inferior as performance (frequency, oscillation shape) than the electronic ones, find a wide application in sequential control circuits used for controlling some processes in the chemical industry and the machine building industry.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 621

А. Брагару, И. Попеску

Некоторые соображения в связи с понятием об эластичной технологической системе в технологии машиностроения.

На основе критического анализа современного понятия о технологической системе, авторы предлагают для технологической системы синтетическую формулировку С—ПЗ—З—И—ИП (станок-приспособление для прижима заготовки-заготовка-инструмент — приспособление для прижима инструмента) и уточняет некоторые вопросы исследования технологической системы в таком смысле.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 621.9

Алекс. Дорин

Числовое программирование фрезерных станков для обработки профильных поверхностей.

В работе дан алгоритм для определения координат кривой описываемой в относительном движении между инструментом и деталью в случае фрезерования некоторых профильных поверхностей.

Алгоритм разработан из условия обеспечения мереховатости указанной при тихнических требованиях.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 65.012.4

А. Карабулеа, Г. Рущитору, Г. Антон

К вопросу об изучении пограммирования производства в условиях уверенности и неуверенности

Составляются математические определительные и вероятные образцы с целью изучения программирования производств в условиях уверенности и неуверенности.

Составленный алгоритм имеет в основе концепты операционального исследования, облегчающие изменение структуры расчетных расходов, имея в виду теорию стоков, теорию ожидания теорию износа и надежности в эксплуатации, теорию рабочей силы, а также теорию распределения во времени капиталовложений в уверенных или неуверенных условиях праграммирования производства.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Д.К. 621.376.9:535—2

О. И. Попеску

Точное измерение диаметра шара, с использованием механического индикатора часового типа включенного в систему с интерферометрическим лазером.

В статье описывается измертельное устройство с лазерным интерферрометром, используемым при точном контроле диаметра шара.

Примечания были статистически проанализированы, используя метод наименьших квадратов. Использованная схема взаимного сравнения являлась двойным замещением.

В заключении указаны экспериментальные результаты.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 621

A. Brăgaru, I. Popescu

On the Concept of Elastic Technological System in the Technology of Construction of Engines

Based on the critical analysis of the technological system, the authors suggest for the technological system the syntetical formulation Mt—FDSp—Sp—T—FDT (machine tool — fixing device for semi — finished producto — semi — finished product — toel — fixing device for tools) and present the problems of the research work of the technological system according to this conception.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 621.9

Al. Dorin

Programming of the Vertical Numerical Control Milling Machines in the Case of Working Some Curve Surfaces

In the present paper we present the algorithm for determining coordinates of the trajectory described in the relative moving between tool and piece in the case of milling curve surfaces on the vertical N. C. milling machines.

To elaborate the algorithm one has imposed that the effective roughness be smaller than the prescribed surface roughness in the drawing of the workable piece.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D·C. 65.012.4

A. Carabulea, Gh. Ruşitoru, Gh. Anton

Contributions to the Study of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions

The paper shows the way to develop determinist and probabilist mathematical models whose application facilitates the optimitation of production programming in certainty and uncertainty conditions.

The conceived algorithm is based on the operational research concepts for building the mathematical model structure by which such theories as storage, waiting, wear, production order, reliability, and production quality, general time bagged and investments theory are operating. These mathematical models can be applied in certainty and uncertainty conditions of product ion programming.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.C. 621.376.9 :535—2

O. I. Popescu

Precision Ball Measurements Using a Mechanical Caliper Coupled with a Laser Interferometer SÇstem

In this paper it is predented a measurement device with laser interferometer for the high precision control of ball diameter. Observations were analyzed by the statistical method using the high precision control of ball diameter. Observations were analyzed by the statistical method using the least squares theorem. The measurement design was the double substitution method. Finaly, the results obtained by experiment are shown.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Résumé

C.D. 517

C. Drăgușin

L'étude de l'équivalence des multipôles à l'aide des équations booléennes

En utilisant les équations booléennes, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour la conservation de certaines conductibilités totales par rapport à des classes données de transformations de multipôles à contacts et redresseurs.

Ces résultats généralisent les théorèmes obtenus par l'auteur dans le cas des multipôles avec redresseurs et les théorèmes obtenus par Sergiu Rudeanu dans le cas des multipôles sans redresseurs.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 744

N. Mirescu

Sur une transformation dans le champ d'une epure

Dans la géométrie descriptive on n'étudie pas les transformations qui sont engendrées dans le champ d'une épure.

L'auteur transmet à une épure Monge la transformation qui définit la perspective en relief.

Dans le cas présenté, une transformation projective est engendrée dans le champ de l'épure.

On vient de trouver les invariantes et les relations entre l'objet initial et celui transformé.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 539

D. Bogdan, T. Crețu, Gh. Macarie

La déduction des formules pour les facteurs de forme des transitions béta entre les niveaux nucléaires décrites par l'interaction quasiparticle — phonon

On établit les formules pour les facteurs de forme des transitions beta entre des états nucléaires décrits par l'intéraction quasiparticule— phonon. La méthode de calcul utilise la théorie sémimicroscopique des interactions nucléaires.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

Zusammenfassung

D.K. 517

C. Drăguşin

Ein Studium über die Ahnlichkeit Mehrpole mit Hilfe der bool'schen Gleichungen

In der Arbeit geben wir eine genügende und hinreichende Bedingung für die Bewahrung einiger totalen Leitbarkeiten einiger Transformationsklassen Mehrpole mit Kontakten und Redressoren mit Hilfe der bool'schen Gleichungen.

Diese Ergebnisse verallgemeinern einige vom Autor erziehlten Lehrsätze für Mehrpole mit Redressoren wie auch die Lehrsätze von Sergiu Rudeanu für Mehrpole ohne Redressoren.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 744

N. Mirescu

Über eine Umwandlung im Feld einen Epure

In der darstellenden Geometrie werden die Umwandlungen, die Im Feld der Epure stattfinden kőnnen, studiert.

Der Verfasser überträgt einer Monge-Epure die Umwandlung, die Reliefperspektive definiert. In diesem Falle findet im Epurfeld eine Projektions-umwandlung statt.

Es wurden die Invarianten und die Beziehungen zwischen dem ursprünglichen und dem umgewandelten Gegenstand gefunden.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 539

D. Bogdan, T. Creţu, Gh. Macarie

Die Feststellung der Formfaktorsformeln für Beta-Trsaition zwischen Kernniveaus, beschrieben von Quasipartikel — Phonon — Wechselwirkung

Formfaktorsformeln für Beta-Transition zwischen Kernniveaus, beschrieben von Quasipartikel — Phonon-Wechsel-wirkung werden erlangt. Die Rechnung beruht auf der die halbmikroskopischn Theorie der Kernwechselwirkungen.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 66

G. Costeanu, Ortansa Landauer, Cornelia Mateescu

L'influence de la viscosité du millieu de réaction sur la vitesse de l'hydrolyse acide de quelques esters aliphatiques dans les solvants mixtes

En tenant compte des relations de E. A. Moelwyin-Wughes et de A. Olander, les auteurs ont fait une étude comparative sur l'influence de la viscosité des solvants mixtes eau-acétone et eau-dioxanne, sur l'hydrolyse acide du formiate et de l'acétate de n-butyle.

On a constaté que chaque solvant se comporte différemment l'un de l'autre et l'influence de la viscosité du milieu dépend aussi de la chaîne carbonée de l'ester.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 631.86

I. Constantinescu, Irina Constantinescu

Obtention d'un engrais avec les microélémentes en suspension

Les auteurs ont étudié les possibilites d'obtenir un engrais completé N.P.K. qui contient Zn et Mn, microelements très utiles dans les processus agrochimiques.

Les qualités de ce produit permettent d'entrevoir l'utilisation avec des bons rezultats dans la nutrition des plantes.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 620

V. Bogdan, Oltea Bogdan

Les expressions des contraintes et des déformations dans un disque en mouvement de rotation

L'auteur a établi les états de contrainte et de déformation dans un disque cylindrique en mouvement uniforme de rotation ayant la longueur infinite (état plane de déformation), en utilisant une fonction potentielle déterminée dans un travail précédent (1).

Les expressions obtenues pour les contraintes et les déformations sont en correspondance avec les valeurs déterminées par d'autres voies et représente une vérification pour la fonction potentielle Φ.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 533

Al. Marinescu, St. Staicu, Fr. Atanasiu

Les équations du mouvement relatif de rapprochement et de rendez vous considérant la nonsphericité de la planète

L'étude se propose d'établir les équations ginnales du mouvement relatif d'un engin spaţial vis-à-vis d'un systéme orbital lié à un autre engin qui évolue sur une orbite conique quelconque.

Pour établir ces équations, l'étude tient compte de la nonsphéricité de la planète.

On expose une analyse des cas particuliers de ces équations, qui peuvent apparaitre plus fréquemment dans les applications techniques.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 66

G. Costeanu, Ortansa Landauer, Cornelia Mateescu

Einfluss des Viskositätsmediums auf die Reaktionsgeschwindigkeit der sauern Hydrolyse einiger alifatischer Ester in gemischen Lösungsmitteln

In dieser Arbeit wurde ein Vergleichsstudium durchgeführt, dass den Einfluss der Viskosität des Lösungsmittels der sauren Hydrolyse des Formiats und des n-butyl Azetates in Wasser — Aceton, und die saure Hydrolyse des n-butyl Acetates in Wasser — Dioxan betrifft, auf rund der Gleichungen von E. A. Moelwyn — Hughes und A. Olander.

Es wurde festgestellt, dass jedes Lösungsmittel sich anders verhält und dass der Einfluss des Viskositätsmediums auf die Reaktionsgeschwindigkeit von der Länge der Hydrokarbonatkette des Esters abhängt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 631.86

I. Constantinescu, Irina Constantinescu

Die Erhaltung eines Düngemittels mit Microelements in suspension

Es wurde die Frage dei Erhaltung einiger komplexen Düngemittel in N. . Zn. Mn. und P. .K. Zn. Mn suspension erörtert.

Die erhaltenen komplexen Düngemittel in der Schwebe erweisen den Vorteil, dass das technologische Erzeugungsverfahren keine besondern-Anlagen benötigt, billige Rohstoffe verendet und die Dosierung der Ernährungselemente sich in einem annehmbaren Verhältnis gegenüber den Bedürfuissen der Erde befinden.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 620

V. Bogdan, Oltea Bogdan

Die Ausdrücke der Spannungen und Dehnungen in einer rotierenden Schiebe

Es werden die Spannungs und Dehnungszustände für den Fall einer sich gleichförmig drehenden unendlich langen Scheibe (ebener Verformungszustand) auf Grund einer in einer früheren Arbeit (1) abgeleiteten Potentialfunktion angeschrieben. Die für die Spannungen und Dehnungen erhaltenen Ausdrücke stimmer mit der auf anderen Wegen erhaltenen überein und stellen eine Kontrolle der Potential-funktion Φ dar.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 533

Al. Marinescu, St. Staicu, Fr. Atanasiu

Die Gleichungen der relativen Näherungs — und Rendezvousbewegung unter Berücksichtigung der Unsphärizität des Planetrs

In der Arbeit werden die allgemeinen Gleichungen der Relativbewegung eines Raumfahrzeuges gegenüber einem Orbitalsystem festgestellt, der mit einem anderen Raumfahrzeug verbunden ist und das sich auf einer konischen Bahn bewegt.

Die Gleichungen werden festgestellt, indem man die Unsphärizität des Planets berücksichtigt.

Es werden die Sonderfälle dieser Gleichungen analysiert, die man meist in der Praxis antreffen kann.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 621.316.1

Maria Tudose, M. Eremia, C. Marinescu

Le calcul de la stabilité dynamique d'un systeme electrique utilisant le paquet de sous-programmes scientifiques SSP de l'ordinateur IBM 1130

On présente une méthode de calcul de la stabilité dynamique d'un systhème électrique au cas de l'apparition d'un défaut symétrique, considérant aussi l'influence des circuits d'amortissement et des réglages de tension et de vitesse.

On expose aussi la déduction rigoureuse du modèle mathématique du phénomène physique qu'on étudie suivie d'un algorihmme de calcul.

L'algorithme a été testé par un programme écrit en BASIC FORTRAN IV qui utilise le paquet de sous-programmes scientifiques (SSP) de l'ordinateur IBM 1130 appartenant au Centre de calcul de l'I.P.B.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 621.2

St. Zarea, N. Vasiliu

Nouvelle méthode pour la construction de l'auget Pelton et la vérification enpérimentale sur un modèle

Dans ce travail on propose une nouvelle méthode pour la détermination grapho-analytique de la surface active de l'auget Pelton et on présente les caractéristiques constructives et fonctionnelles d'une turbine Pelton de laboratoire réalisée pour la vérification de la méthode proposée.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D.621—52

V. Găburici

Nouveaux oscillateurs fluidiques

On présente succintement, dans cet ouvrage, les principes de réalisation des oscillateurs fluidiques, particulièrement ceux qui utilisent des éléments avec l'attachement du jet d'air à la paroi (l'effet Coandă).

L'ouvrage comprend des descriptions de différents types d'oscillateurs de conception originale.

Les oscillateurs fluidiques présentés, bien qu'ils soient inferieurs à ceux électroniques (par la fréquence et la forme des oscillations), trouvent une large application dans les circuits de commande séquentielle utilisés dans la commande de certains processus de l'industrie chimique et de l'industrie de la construction des machines.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 621.316.1

Maria Tudose, M. Eremia, C. Marinescu

Die Berechnung der dynamischen Stabilität eines elektrische Systems unter der Benützung technischen Unterprogramme des elektronischen Rechners IBM 1130

Man legt eine Berechnengsmethode der dynamischen Stabilität eines elektrischen Systems im Falle der Erscheinung eines symetrischen Fehlers vor mit Berücksichtigung des Einflusses der Dämpfungs-Kreise und der Spannungs — und Geschwindigkeitsregelung.

Der Aufsatz enthält eine Deduktion des mathematischen Modells des untersuchten physikalischen Vorgangs und wird von einem Berechnungsalgorithmus gefolgt.

Der Algorithmus wurde mit einem in Basic FORTRAN IV. Sprache übersetzten Programm geprüft.

Dieses Programm benutzt des SSP (wissenschaftliches Unterprogrammpaket) des dem Rechnungs — Zentrum des Bukarester Politechnischen Institute angehörigen IBM 1130 Rechner.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 621.2.

St. Zarea, N. Vasiliu

Neue Methode für den Entwurf der Peltonschaufel und ihre Überprüfung mittels Modelversuche

In diesem Beitrag wird neue graphoanalytische Methode zur Bestimmung der Arbeitsfläche der Peltonschaufel vorgeschlagen sowie die konstruktiven und funktionellen Eigenschaften einer Pelton-Modellturbine mitgeteilt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 621—52

V. Gaburici

Neue fluidische Oszyllatoren

In der Schrift werden die Herstellungsprinzipien der fluidischen Oszyllatoren insbesondere deren die Elemente mit Wand-Pressluftstrahlanschulls (Coandă-Effeckt) verwenden, kurz behandelt.

Es werden Oszyllatorentype origineller Konzeption beschrieben.

Obwohl die vorgestellten fluidischen Oszyllatoren die Leistungen (Frequenz, Schwingungsgebilde) der elektrischen Oszyllatoren nicht erreichen, finden jedoch die ersten in den Folgesteuerungskreisen, welche zur Steuerung einiger Prozesse in der Chemie- und Maschinenbauindustrie zur Anwendung kommen, ein weites Verwendungsgebiet.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 621

A. Brăgaru, I. Popescu

Considérations sur le concept de systéme technologique élastique dans la technologie des constructions mécaniques

Sur la base de l'analyse critique de l'actuel concept du système technologique, les auteurs proposent pour système technologique une expression synthetique M.O.—D.F.P. — P. — O. — D.F.O. (machine outil-dispositif de fixation de la pièce — pièce — outil — dispositif de fixation d'outil) et precisent les problèmes de la recherche scientifique du système technologique dans cette idee.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 621.9

Al Dorin

La programmation des fraiseuses verticales a commande numerique pour l'usinage des surfaces courbées

Dans l'article se présente l'algorithme de calcul pour la détermination des coordonnées de trajectoire décrite dans le mouvement relatif entre l'outil et la pièce. Ce calcul a été réalisé dans le cas du fraisage des surfaces courbées sur des fraiseuses verticales à commande numérique.

Pour l'établissement d'algorithme on impose que la rugosité éffective soit plus petite que la rugosité prescrite dans le dessin d'exécution.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

C.D. 65.012.4

A. Carabulea, Gh. Ruşitoru, Gh. Anton

Contribution a l'étude de la programmation de la production dans des conditions de certitude et d'incertitude

On construit des modeles mathématiques déterministes et probabilistes pour étudier la programmation de la production dans des condition de certitude et d'incertitude.

L'algorithme conçu est basé sur les concepts de la recherche opérationnelle qui facilitent le changement de la structures des depenses de calcul en tenant compte de la théorie des stoks, la théorie de l'attente, la théorie de l'usure et de la sûreté en fonctionnement, la théorie de la force de travail et la théorie de deploiement en temps des investissements dans des conditions de certitude et d'incertitudes de la programmation de la production.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 621.376.9 :535—2

O.I. Popescu

Mesurage de précision du diamètre de la sphere en utilisant un comparateur mécanique couplé avec un système á laser interférométrique

L'auteur présente dans l'article un dispositif de mesurage à interféromètre à laser utilisé pour le contrôle de précision du diamètre de la sphère. Les observations ont été analysées statistiquement, par la méthode des moindres carrés. Le schéma d'intercomparaison utilisé a été la double substitution. Finalement, l'auteur présente les résultats expérimentaux.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K.621

A. Brăgaru, I. Popescu

Im bezung auf die Konzeption des elastischen technologische Systems in der Technologie des Maschinenbaus

Auf Grund der kritischen Analyse des gegenwärtigen Konzeptes des technologischen Systems schlagen die Autoren eine synthetische Formulierung des technologischen Systems W—S — W W — S (Werkzeugmaschine — Spannvorrichtung — Werkstück — Werkzeug — Spannwerzeugvoriehtung) vor und stellt man Forschungsergebnise im bezug auf das technologischessystem dar, dop auf Grund des neuentweckelten Konzept duchgeführt wurde.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 621.9

Al. Dorin

Die Programmierung der numerisch gesteuerten Fräsmaschinen für das Fräsen von krummen Oberflächen

In dieser Arbeit stellt man den Rechenalgorithmus dar, mit dem die Koordinaten der Trajektorie, die in der relativen Bewegung zwischen Werkzeug und Werkstück beschrieben wird, am Fräsen der krummen Oberflächen auf numerischgesteuerten Fräsmaschinen betimmt werden können.

Um den Algorithmus auszuarbeiten, hat man die effektive Rauheit auferlegt, kleinere als die in der Fertigungszeichnung des Werkstückes vorgeschriebene Rauheit der verarbeiteten Obserfläche zu sein.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 65.01.24

A. Carabulea, Gh. Ruşitoru, Gh. Anton

Beiräge zum Studium der Produktionsprogrammierung unter Sicherheits und Unsicherheits bedingungen

Es werden die mathematischen determinierenden und Modelle zur Untersuchung der Produktionsprogrammierung unter Sicherheits — und Unsicherheitsbedigungen konstruiert.

Der entworfene Algorithmus grundet sich auf die Begriffe der Operationsforschung, die Anderung der Struktur des Rechnungsanfroands unter Berücksichtigung der Vorats-Warte zeit-Abunkungs- Betriebssichurheits-Arbeitskraft-Zeitechelomeren therie der Investitionen unter Sicherheits — und Unsicherheits bedingungen ermöglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

D.K. 621.376.9:535—2

O. I. Popescu

Präzisionsmessung des Kugeldurchmessers unter Verwendung eines mit mechanischen Komparator gekoppelten System von interferometrischem Laser

Im Aufsatz wird eine Messvorrichtung mit Laserinterferometer das bei Präzisionsmessungen des Kugeldurchmessers verwendet wird, dargestellt. Die Beobachtungen wurden unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadraten statisch durchgeprüft. Das verwendete Schema des Intervergleichens war die doppelte Substitution. Zum Schluss sind die experimentellen Ergebnisse vorgestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV, Nr. 4/1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

MATEMATICĂ

C.Z.: 517

STUDIUL ECHIVALENȚEI MULTIPOLILOR CU AJUTORUL ECUAȚIILOR BOOLEENE

CONSTANTIN DRĂGUȘIN

În prezenta lucrare se extind rezultatele din [3], dînd condiții necesare și suficiente de echivalență a multipolilor în punte cu redresori și fără redresori regăsind, în acest ultim caz, rezultatul teoremei 2.2 din [8].

§ 1.

$L_2 = \{0,1\}$ este algebra Boole ale cărei operații se notează prin „$\cup$", „$\cdot$" și „$-$", iar $L_2^m = \overset{m}{\underset{i=1}{\mathbf{X}}} L_{2.i}$ unde $L_{2.i} = L_2$ $i = 1, \ldots, m$.

Fie $f, g : L_2^m \to L_2$. Prin $f \subseteq g$ se înțelege

$$f(x_1, \ldots, x_m) \subseteq g(x_1, \ldots, x_m)$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_m) \in L_2^m$. Analog se definesc operațiile „$\cup$", „$\cdot$" și „$-$".

Prin a_{ij} se notează conductibilitatea directă de la i la j și reprezintă suma conductibilităților tuturor drumurilor elementare posibile ale multipolului $\mathcal{A}$ care pleacă din nodul i și ajung în nodul j fără să treacă prin vreun alt nod. Matricea normală de ordinul n formată cu conductibilitățile $a_{ij}(i, j = 1, \ldots, n)$ se numește matricea conductibilităților directe și se notează $A = (a_{ij})$.

Conductibilitatea totală de la i la j se notează prin $\chi_{ij}(A)$ și reprezintă suma conductibilităților tuturor drumurilor elementare ale multipolului $\mathcal{A}$ care merg de la i la j, iar prin $\chi_{ij}^{(h,k)}(A)$ se notează suma conductibilităților tuturor drumurilor elementare care merg de la i la j și care nu conțin conductibilitățile directe a_{hk} și a_{kh} dintre nodurile h și k.

LEMA 1

Ecuația

$$\tau = \sigma \cup \lambda_1 x \cup \lambda_2 y \tag{1}$$

* Manuscris predat redacției la data de 5 octombrie 1971

are soluţia

$$\begin{cases} \tau\bar{\sigma}(\bar{\lambda}_2 \cup \bar{y}) \subseteq x \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_1 \\ \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1 \subseteq y \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_2 \end{cases} \tag{2}$$

dacă şi numai dacă

$$\bar{\tau}\sigma = 0 \tag{3}$$

$$\tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = 0 \tag{4}$$

Demonstraţie.
Ecuaţia (1) este echivalentă cu

$$\bar{\tau}(\sigma \cup \lambda_1 x \cup \lambda_2 y) \cup \tau\bar{\sigma}(\bar{\lambda}_1 \cup \bar{x})(\bar{\lambda}_2 \cup \bar{y}) = 0$$

sau

$$(\bar{\tau}\sigma \cup \bar{\tau}\lambda_1 \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 \cup \bar{\tau}\lambda_2 y \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{y})x \cup (\bar{\tau}\sigma \cup \bar{\tau}\lambda_2 y \cup \tau\bar{\sigma}\lambda_2 \cup \bar{\sigma}\tau\bar{y})\bar{x} = 0$$

Această ecuaţie admite soluţie în raport cu x dacă şi numai dacă

$$\bar{\tau}\sigma \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 \cup \bar{\tau}\lambda_2 y \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{y} = 0,$$

iar această ultimă ecuaţie este solubilă dacă şi numai dacă

$$\bar{\tau}\sigma \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = 0,$$

care este echivalentă cu

$$\bar{\tau}\sigma = 0 \quad \text{şi} \quad \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = 0$$

Deci, dacă relaţiile (3) şi (4) sînt satisfăcute atunci

$$\tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1 \subseteq y \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_2,$$

iar

$$\tau\bar{\sigma}(\bar{\lambda}_2 \cup \bar{y}) \subseteq x \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_1.$$

LEMA 2.
Sistemul

$$\tau = \sigma \cup \lambda_1 x \cup \lambda_2 y \tag{5}$$

$$y = x$$

are soluţia

$$\tau\bar{\sigma} \subseteq y = x \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 \tag{6}$$

dacă și numai dacă

$$\overline{\tau}\sigma = 0 \tag{7}$$

$$\tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = 0 \tag{8}$$

Demonstrație.

Sistemul (5) este echivalent cu ecuația

$$\overline{\tau}(\sigma \cup \lambda_1 x \cup \lambda_2 y) \cup \tau\bar{\sigma}(\bar{\lambda}_1 \cup \bar{x})(\bar{\lambda}_2 \cup \bar{y}) \cup x\bar{y} \cup \bar{x}y = 0,$$

sau

$$(\overline{\tau}\sigma \cup \overline{\tau}\lambda_1 \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 \cup \overline{\tau}\bar{\lambda}_2 \cup \bar{y})x \cup (\overline{\tau}\sigma \cup \tau\bar{\sigma} \cup y)\bar{x} = 0$$

care are soluție în x dacă și numai dacă

$$\overline{\tau}\sigma \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 \cup \overline{\tau}(\lambda_1 \cup \lambda_2)y \cup \tau\bar{\sigma}\bar{y} = 0$$

iar această ecuație are soluție în y dacă și numai dacă

$$\overline{\tau}\sigma \cup \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = 0$$

care este echivalentă cu

$$\overline{\tau}\sigma = 0 \quad \text{și} \quad \tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = 0$$

adică tocmai relațiile (7) și (8)

Prin urmare dacă relațiile (7) și (8) sînt satisfăcute, atunci y satisface inegalitățile

$$\tau\bar{\sigma} \subseteq y \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2$$

Ținînd acum seama de relațiile (7) și (8) și de faptul că $\bar{x}y = x\bar{y}$ obținem că x satisface inegalitățile

$$\tau\bar{\sigma} \subseteq x \subseteq \tau \cup \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2$$

Observația 1. Același rezultat se obține și în cazul cînd se rezolvă ecuația $\tau = \sigma \cup (\lambda_1 \cup \lambda_2)x$

LEMA 3

Fie $\mathcal{A}$ un multipol cu redresori cu n noduri și A matricea conductibilităților directe asociată.

Dacă h și k sînt două noduri fixe ale lui $\mathcal{A}$ atunci oricare ar fi perechea de noduri (i, j) a multipoplului $\mathcal{A}$ avem

$$\chi_{ij}(A) = \chi_{ij}^{(h,k)}(A) \cup \chi_{ih}^{(h,k)}(A) a_{hk} \chi_{kj}^{(h,k)}(A) \cup \chi_{ik}^{(h,k)}(A) a_{kh} \chi_{hj}^{(h,k)}(A)$$

Demonstrația este dată în [3] în cadrul teoremei 1.

TEOREMA 1.

Fie $\mathcal{A}$ un multipol cu redresori cu n noduri, iar h și k două noduri fixe ale sale. Fie $\mathcal{B}$ un multipol cu redresori obținut din $\mathcal{A}$ înlocuind conductibilitățile directe a_{hk} prin b_{hk} și a_{kh} prin b_{kh}, celelalte conductibilități directe rămînînd neschimbate ($b_{ij} = a_{ij}$ pentru $h \neq i$, $j \neq k$).

În aceste condiții avem :

1). Dacă (i, j) este o pereche de noduri oarecare dar fixată, atunci relația

$$\chi_{ij}(A) = \chi_{ij}(B) \tag{9}$$

este echivalentă cu relațiile

$$\overline{\chi_{ij}^{(h,k)}(A)}[a_{hk}\chi_{ih}^{(h,k)}(A)\chi_{kj}^{(h,k)}(A)(\overline{b_{kh}\chi_{ik}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A)}) \cup \chi_{k}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A)\,a_{kh}\bar{b}_{kh}] \subseteq$$

$$\subseteq b_{hk} \subseteq a_{hk} \cup \chi_{ij}^{(h,k)}(A) \cup a_{kh}\chi_{ik}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A) \cup \overline{\chi_{ih}^{(h,k)}(A)\chi_{kj}^{(h,k)}(A)} \tag{10}$$

$$a_{kh}\overline{\chi_{ij}^{(h,k)}(A)}\;\overline{\chi_{ih}^{(h,k)}(A)\chi_{kj}^{(h,k)}(A)}\chi_{ik}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A) \subseteq b_{kh} \subseteq$$

$$\subseteq a_{kh} \cup \chi_{ij}^{(h,k)}(A) \cup a_{hk}\chi_{ih}^{(h,k)}(A)\chi_{kj}^{(h,k)}(A) \cup \overline{\chi_{ik}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A)} \tag{11}$$

2) Conductibilitățile totale între nodurile multipolului $\mathcal{A}$ se păstrează și la multipolul $\mathcal{B}$ dacă și numai dacă

$$a_{hk}\overline{\chi_{hk}^{(h,k)}(A)} \cup a_{kh}\bar{b}_{kh}G_2(A) \subseteq b_{hk} \subseteq a_{hk} \cup \chi_{hk}^{(h,k)}(A) \tag{12}$$

$$a_{kh}\overline{\chi_{kh}^{(h,k)}(A)} \subseteq b_{kh} \subseteq a_{kh} \cup \chi_{kh}^{(h,k)}(A) \tag{13}$$

unde

$$G_2(A) = \bigcup_{i,j}^{n} \overline{\chi_{ij}^{(h,k)}(A)}\chi_{ik}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A)$$

Demonstrație.

1). Din lema 3 avem

$$\chi_{ij}(A) = \chi_{ij}^{(h,k)}(A) \cup a_{hk}\chi_{ih}^{(h,k)}(A)\chi_{kj}^{(h,k)}(A) \cup a_{kh}\chi_{ik}^{(h,k)}(A)\chi_{hj}^{(h,k)}(A)$$

și

$$\chi_{ij}(B) = \chi_{ij}^{(hk)}(B) \cup b_{hk}\chi_{ih}^{(hk)}(B)\chi_{kj}^{(hk)}(B) \cup b_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(B)\chi_{hj}^{(hk)}(B)$$

Ținînd acum seama că

$$\chi_{ij}^{(hk)}(B) = \chi_{ij}^{(hk)}(A);\ \chi_{ih}^{(hk)}(B) = \chi_{ih}^{(kh)}(A);\ \chi_{kj}^{(hk)}(B) = \chi_{kj}^{(hk)}(A);$$

$$\chi_{ik}^{(hk)}(B) = \chi_{ik}^{(hk)}(A);\ \chi_{hj}^{(hk)}(B) = \chi_{hj}^{(hk)}(A),\ \text{atunci}$$

$$\chi_{ij}(B) = \chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup b_{hk}\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A) \cup b_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A).$$

Notînd

$$\begin{aligned}
\tau &= \chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup a_{hk}\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A) \cup a_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A) \\
\sigma &= \chi_{ij}^{(hk)}(A) \\
\lambda_1 &= \chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A) \qquad (14) \\
\lambda_2 &= \chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A) \\
x &= b_{hk} \\
y &= b_{kh}
\end{aligned}$$

relația (9) devine

$$\tau = \sigma \cup \lambda_1 \chi \cup \lambda_2 y$$

adică ecuația (1) care are soluția dată de (2) pentru că relațiile (3) și (4) sînt satisfăcute. Într-adevăr

$$\sigma\bar{\tau} = \chi_{ij}^{(h,k)}(A)\overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)} \cdot \overline{a_{hk}\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A)} \cdot \overline{a_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)} = 0$$

$$\tau\bar{\sigma}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 = \overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)} \cdot \overline{\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(uk)}(A)} \cdot \overline{\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)} \cdot [\chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup a_{hk}\chi_{ij}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A) \cup$$

$$\cup a_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)] = 0$$

Ținînd apoi seama de notațiile (14), soluția ecuației (1) se reduce la (10) și (11).

2). Pentru ca conductibilitățile totale între toate nodurile multipolului $\mathfrak{B}$ să fie egale cu cele din multipolul $\mathfrak{A}$ trebuie ca relațiile (10) și (11) să fie satisfăcute pentru orice i și j. Prin urmare trebuie să avem

$$a_{hk}G_1(A) \cup a_{kh}\bar{b}_{kh}G_2(A) \subseteq b_{hk} \subseteq a_{hk} \cup G_3(A) \qquad (15)$$

$$a_{kh}G_4(A) \subseteq b_{kh} \subseteq a_{kh} \cup G_5(A) \qquad (16)$$

unde

$$G_1(A) = \bigcup_{ij} \overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)} \cdot \chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A) \cdot \overline{b_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)},$$

$$G_2(A) = \bigcup_{ij} \overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)}\,\chi_{ij}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A),$$

$$G_3(A) = \bigcap_{ij} [\chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup a_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A) \cup \overline{\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A)}],$$

$$G_4(A) = \bigcup_{ij} \overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)} \cdot \overline{\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A)} \cdot \chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)$$

$$G_5(A) = \bigcap_{ij} [\chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup a_{hk}\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A) \cup \overline{\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)}].$$

Să demonstrăm acum că

$$G_1(A) = \overline{\chi_{hk}^{(hk)}(A)}, \quad G_3(A) = \chi_{hk}^{(hk)}(A), \quad G_4(A) = \overline{\chi_{kh}^{(hk)}(A)}, \text{ și}$$

$G_5(A) = \chi_{kh}^{(hk)}(A)$ de unde urmează afirmația 2).

Evident

$$\overline{\chi_{hk}^{(hk)}(A)} \subseteq G_1(A) \tag{17}$$

deci urmează să demonstrăm numai inegalitatea

$$\overline{\chi_{hk}^{(hk)}(A)} \supseteq G_1(A) \tag{18}$$

Fie o poziție arbitrară a contatelor, dar fixată în timpul demonstrației.
Dacă $G_1(A) = 0$ atunci inegalitatea (18) este adevărată.
Dacă $G_1(A) = 1$, atunci există măcar un i și un j astfel ca

$$\overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)}\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A).\overline{b_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A)} = 1$$

care este echivalntă cu

$$\overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)} = 1 \Leftrightarrow \chi_{ij}^{(hk)}(A) = 0 \tag{19}$$

$$\chi_{ih}^{(hk)}(A) = 1 \tag{20}$$

$$\chi_{kj}^{(hk)}(A) = 1 \tag{21}$$

și

$$b_{kh} = 0 \text{ sau } \chi_{ik}^{(hk)}(A) = 0 \text{ sau } \chi_{hj}^{(hk)}(A) = 0 \tag{22}$$

Să presupunem că

$$\overline{\chi_{hk}^{(hk)}(A)} = 0 \Leftrightarrow \chi_{hk}^{(hk)}(A) = 1 \tag{23}$$

Din (20) urmează că există un drum d_1 de la i la h care nu conține conductibilitățile directe a_{hk} și a_{kh} compus din conductibilități egale cu 1, din (21) înseamnă că există un drum d_2 de la k la j care nu conține conductibilitățile directe a_{hk} și a_{kh} compus din conductibilități egale cu 1 iar din (23) urmează că există un drum d_3 între h și k care nu conține conductibilitățile directe a_{hk} și a_{kh} compus din conductibilități egale cu 1. Compunînd drumurile d_1, d_3 și d_2 prin juxtapunere, obținem un drum d între i și j care nu conține conductibilitățile directe a_{hk} și a_{kh}, compus din conductibilități egale cu 1 și deci

$$\chi_{ij}^{(hk)}(A) = 1$$

ceea ce contrazice (19).

Prin urmare ipoteza (23) conduce la contradicție, deci

$$\overline{\chi_{hk}^{(hk)}(A)}=1$$

de unde rezultă că

$$G_1(A) \subseteq \overline{\chi_{hk}^{(hk)}(A)}$$

care împreună cu (17) dă egalitatea.

Să demonstrăm că

$$G_3(A) = \chi_{hk}^{(hk)}(A) \tag{24}$$

Evident avem

$$G_3(A) \subseteq \chi_{hk}^{(hk)}(A) \tag{25}$$

Să demonstrăm inegalitatea

$$G_3(A) \supseteq \chi_{hk}^{(hk)}(A) \tag{26}$$

Fie, ca mai sus, o poziție arbitrară a contactelor, dar fixată în timpul demonstrației.

Dacă $G_3(A) = 1$ atunci (26) este adevărată.

Dacă $G_3(A) = 0$ atunci există două noduri i și j astfel ca

$$\chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup a_{kh}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\chi_{hj}^{(hk)}(A) \cup \overline{\chi_{ih}^{(hk)}(A)\chi_{kj}^{(hk)}(A)} = 0,$$

care este echivalentă cu

$$\chi_{ij}^{(hk)}(A) = 0 \tag{27}$$

$$a_{hk}\chi_{ik}^{(hk)}(A)\,\chi_{hj}^{(hk)}(A) = 0 \tag{28}$$

$$\chi_{ih}^{(hk)}(A)\,\chi_{kj}^{(hk)}(A) = 1 \Leftrightarrow \chi_{ih}^{(hk)}(A) = 1 \quad \text{și} \quad \chi_{kj}^{(hk)}(A) = 1 \tag{29}$$

Dacă presupunem că

$$\chi_{hk}^{(hk)}(A) = 1 \tag{30}$$

atunci din (29) și (30) rezultă că există un drum între i și j care nu conține conductibilitățile directe a_{hk} și a_{kh} compus din conductibilități directe egale cu 1 ceea ce contrazice (27). Prin urmare $\chi_{hk}^{(hk)}(A)=0$ și deci inegalitatea (26) este verificată.

Analog se demonstrează egalitățile:

$$G_4(A) = \overline{\chi_{kh}^{(hk)}(A)}$$

și

$$G_5(A) = \chi_{kh}^{(hk)}(A)$$

Observația 2.

Teoremele 1 și 2 din [3] se obțin din teorema 1, relațiile (10) și (12) punînd

$$b_{hk} = b_{\mu\nu} \cup b_{\mu,n+1} b_{n+1,\nu}$$

$$b_{kh} = a_{\nu\mu}$$

$$a_{hk} = a_{\mu\nu}$$

și respectiv

$$b_{hk} = b_{\mu\nu}$$

$$b_{kh} = a_{\nu\mu}$$

$$a_{hk} = a_{\mu\nu}$$

TEOREMA 2

Fie $\mathcal{A}$ un multipol fără redresori cu n noduri, iar h și k două noduri fixe ale sale. Fie $\mathfrak{B}$ un multipol fără redresori obținut din $\mathcal{A}$ înlocuind conductibilitatea directă $a_{hk} = a_{kh}$ prin $b_{hk} = b_{kh}$, celelalte conductibilități directe rămînînd neschimbate ($b_{ij} = a_{ij}$ pentru $h \neq i$, $j \neq k$).

În aceste condiții avem :

1). Dacă (i, j) este o pereche de noduri oarecare, dar fixată, atunci relația

$$\chi_{ij}(A) = \chi_{ij}(D) \tag{31}$$

este echivalentă cu inegalitățile

$$a_{hk} \overline{\chi_{ij}^{(hk)}(A)} [\chi_{ih}^{(hk)}(A) \chi_{kj}^{(hk)}(A) \cup \chi_{ik}^{(hk)}(A) \chi_{hj}^{(hk)}(A)] \subseteq b_{hk} = b_{kh} \subseteq$$
$$\subseteq a_{hk} \cup \chi_{ij}^{(hk)}(A) \cup \overline{\chi_{ih}^{(hk)}(A) \chi_{kj}^{(hk)}(A)} . \overline{\chi_{ik}^{(hk)}(A) \chi_{hj}^{(hk)}(A)} \tag{32}$$

2). Conductibilitățile totale între nodurile multipolului $\mathcal{A}$ se păstrează și la multipolul B dacă și numai dacă

$$a_{hk} \overline{\chi_{hk}^{hk)}(A)} \subseteq b_{hk} = b_{kh} \subseteq a_{hk} \cup \chi_{hk}^{(hk)}(A) \tag{33}$$

Demonstrația teoremei se bazează pe lema 2 și se face analog ca la teorema 1.

Observația 3.

Rezultatul obținut este identic cu cel al teoremei 2.2 din [8].

Observația 4.

Pentru a putea aplica rezultatele teoremelor 1 și 2 este necesar să se calculeze $\chi_{hk}^{(hk)}(A)$. Acest calcul se poate face fie prin metoda descrisă de A. G. Lunț în [5] sau Masao Iri în [4] sau prin metoda operatorilor descrisă de Ion Tomescu în [10].

Catedra de matematici I
Institutul politehnic, Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Constantinescu P.* Ob analize i sinteze releino-contactnîh mnogopoliusnicov s ventilnîmi elementami, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phis. de la RPR 1959, 3 (51) I.
2. *Constantinescu P.* Ob analize i sinteze releino-contactnîh mnogopoliusnicov s ventilnîmi elementami, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phis. de la RPR 1959, 3 (51) II.
3. *Drăgușin C.* Aplicațiile ecuațiilor booeleene la studiul multipolilor cu redresori (În curs de apariție la Studii și cercetări matematice).
4. *Iri M.* Algebraic and Topological Foundations of the Analysis and Synthesis of Oriented Circuits, RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry Vol. II Division G, pp 469—518, 1958.
5. *Lunț A.G.* Algebraiceskie metodî analiza i sinteza contactnîh shem. Izv. Acad. Nauc. SSSR, Seria Mat., 16 (1952).
6. *Lunț A.G.* Metod sinteza (1,k) poliusnica, Docladî Acad. Nauc SSSR, 112, 1 (1957).
7. *Moisil Gr.* Scheme cu comandă directă cu contacte și relee. Ed. Acad. RPR Buc. 1959.
8. *Rudeanu S.* Boolean Equations and Their Applications to the Study of Bridge-circzuits. I, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la RPR, Tome 3 (51) nr. 4, 1959.
9. *Rudeanu S.* Ecuațiile booleene și aplicațiile lor la studiul schemelor în punte. II. Comunicările Acad. RPR Tom XI, 6 (1961).
10. *Tomescu I.* Metoda pentru determinarea conductibilităților totale ale unui multipol, Studii și cercetări matematice, Tom 17, 7(1965).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

C.Z.: 744

ABOUT A TRANSFORMATION IN THE FIELD OF A EPURE*

NICOLAE MIRESCU

1. The geometrical transformation is a method of investigation which leads to the discovery of new curves and surfaces, starting from known curves and surfaces.

As, in general, the formulae, establishing the correspondence between a given figure and its transform are not easily transferred to the descriptive geometry, only those transformations in the field of a epure have been studied which regard rotation (revolving).

Following a suggestion of Prof. M. Șt. Botez, we intend to transfer to a Monge epure a particular transformation upon which rests the base of the relief perspective, establishing the necesary graphic constructions as well as the relations between a figure given by its image in the Monge epure and its transform.

To this end we consider the Monge reference point directly oriented and provided with its first bisector $[B_1]$.

A fixed point which is the center of projection and a fixed direction are given in space. We refer these data to the Monge epure.

Let M be any point in space, also referred to the Monge epure. The transform of point M is obtained as follows:

We project M from Ω and also from Ω we draw a parallel to Δ, which intersects $[V]$ in α', and the parallel to Δ draw through M intersects $[B_1]$ în β. The line $\alpha'\beta$ is co-planar with ΩM and their intersection is transform M_* of poit M which is singular. We term this transform τ_p and we will call it *perspective relief*.

Reciprocally, we know $\tau_p M = M_*$ and also know direction Δ and center Ω. Point M in space, the transform of which is M singularly determined.

Indeed, if we join α' with M_* and construct:

$$(\beta,\beta') = \alpha' M_* \cap [B_1],$$

* Work presented at the Scientific Session of Communications at the University of Craiova, 8 — 10 May 1970.

then :

$$M = \beta' M \cap \Omega M_*$$

where

$$\beta M || \alpha' \Omega || \Delta$$

The correspondence thus established between points in space S_3 is biunivocal, excepting : $M \equiv \Omega$ or $M \in \alpha'$ and $\Delta || [B_1]$, when $\beta\beta_1$ is thrown to ∞.

2 Transformation of the point

a) Let M (m,m') be any point in space, $\Omega(\omega, \omega')$ the projection centre and $\Delta(\delta, \delta')$ the fixed direction (fig. 1).

The necessary constructions lead to the images :

$$\omega\alpha || \delta \,; \omega'\alpha' || \delta' \text{ with } (\alpha,\alpha') = (\omega\alpha,\ \omega\alpha') \cap [V].$$

$$m\beta || \delta \,;\ m'\beta' || \delta' \text{ with } (\beta,\beta') = (m\beta',\ m'\beta') \cap [B_1].$$

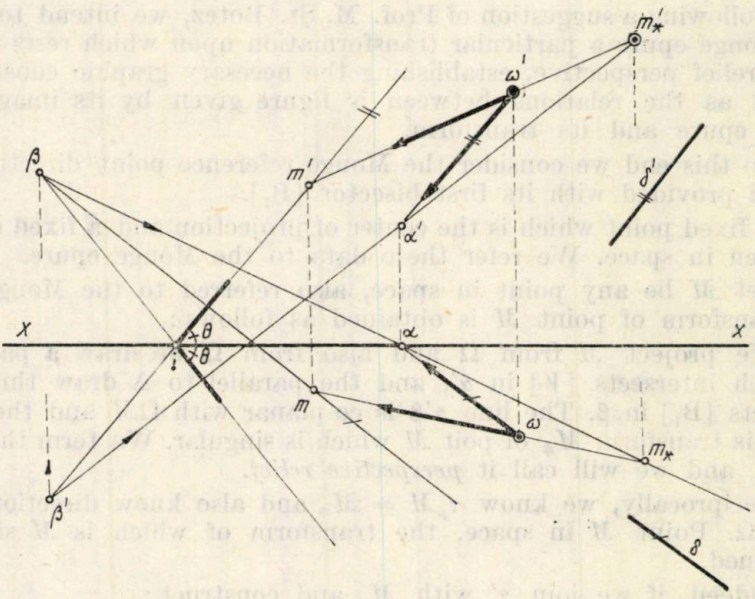


Fig. 1

The construction of image (β,β') is obtained through the conventional process of descriptive geometry [2], using the property according to which points belonging to $[B_1]$ have projections symmetrical in respect to XX.

The image of the transform of point M is obtained as shown:

$$(\omega m,\ \omega' m') \cap (\alpha\beta,\ \alpha'\beta') = (m_*, m'_*)$$

namely:

$$\tau_p M(m,m') = M_*(m_*, m'_*).$$

b). *Supposed* $M \in \Omega\ \omega$ with $\Omega \perp \omega\ H$(Fig. 2). The image $(m,m') \in \Omega\omega$ with $m \equiv \omega$.

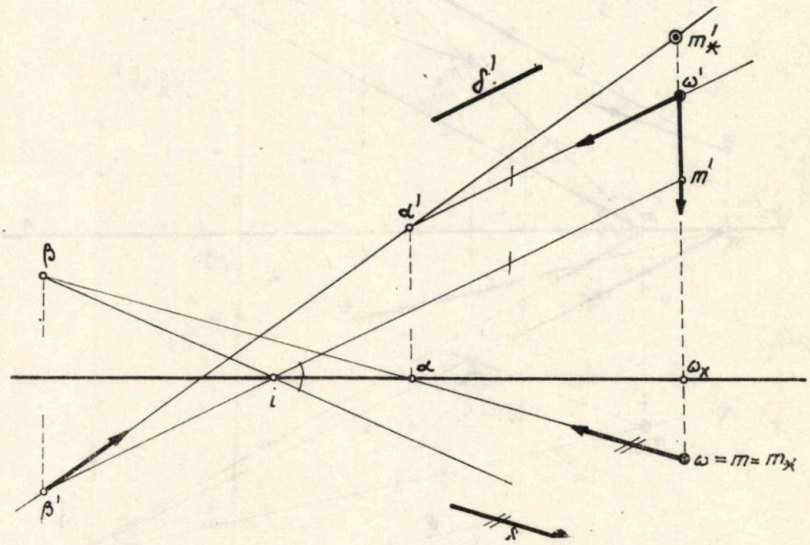


Fig. 2

A simple reasoning shows that:

$$\tau_p M = M_* \in \Omega\omega$$

as its transform has the horizontal projection $m_* \equiv m \equiv \Omega$.

In order to obtain projection m'_* we find the intersection between the parallel in Δ, drawn through M:

$$(\omega\beta, \omega'\beta') \cap [B_1] = (\beta, \beta')$$

The straight line $\alpha'\beta'$ intersects $\omega\omega'$ in m'_*, so that:

$$\tau_p(m,m') = (m_*, m'_*)$$

It results therefore that: *The vertical straight line which passes through* Ω *is its own transform.*

c) *If*: $M \in [H]$ and $M \neq \Omega \Rightarrow M \equiv m$ and $m' \in X$, (fig. 3). We build $(\omega\alpha,\ \omega'\alpha') \| |(\delta\delta')$, and from (m,m') we lead $(m\beta,\ m'\beta') \| | (\delta,\delta')$ with $(\beta,\ \beta') = (m\ \beta,\ m'\beta') \cap [B_1]$.

Whence results:

$$(m\omega,m'\omega') \cap (\alpha\beta,\alpha'\beta') = (m_*,m'_*)$$

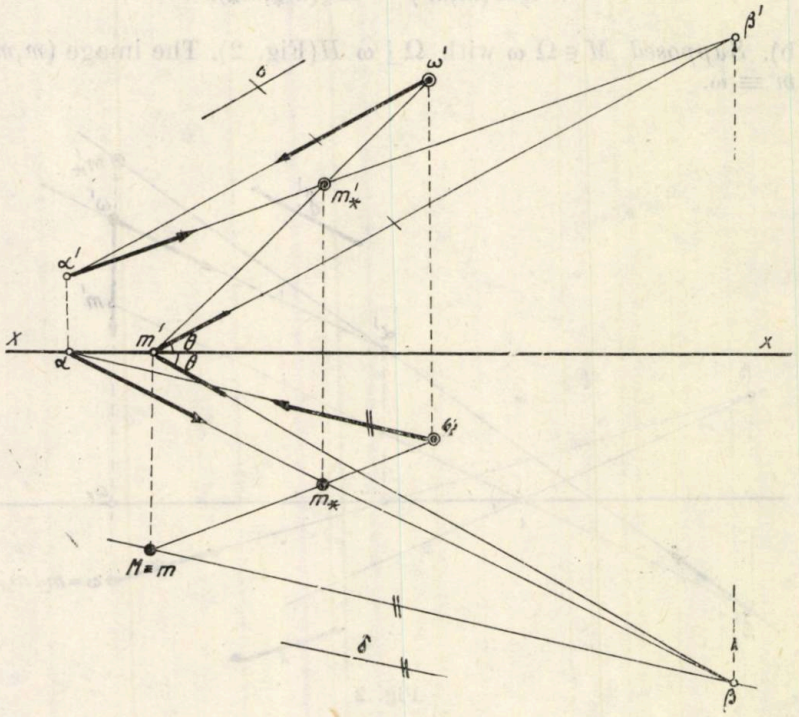


Fig. 3

namely:

$$\tau_p(m,m') = (m_*,m'_*)$$

d). *Suppose* $M \in [V]$, with $M \equiv m'$ and $m \in X$. The image of the fixed directions is $(\delta\delta')$. The image of the projecting ΩM is $(\omega m,\ \omega' m')$, and the parallel to Δ led from Ω has the image $(\omega\alpha,\ \omega'\alpha')$, with $(\alpha,\alpha') \in [V]$, (Fig. 4).

As:

$$(\omega\, m,\ \omega' m') \cap [B_1] = (\beta\beta')$$

it results that:

$$\tau_p(m,m') = (m_*,\ m'_*) = (\omega m,\ \omega' m') \cap (\alpha\beta,\alpha'\beta')$$

e). Finally, let us draw $M \in [B_1]$. (Fig. 5). In this case:

$$mm_* = m'm_* \Rightarrow \Omega M \cap [B_1] = M$$

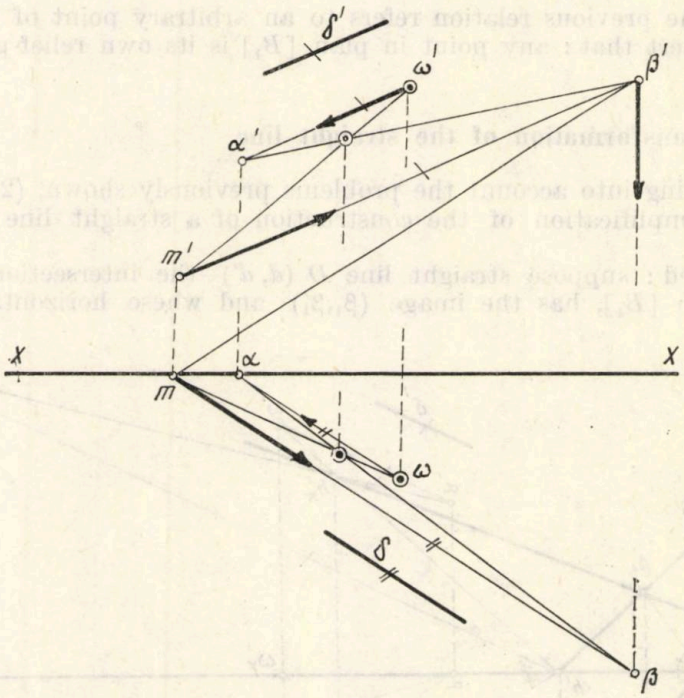


Fig. 4

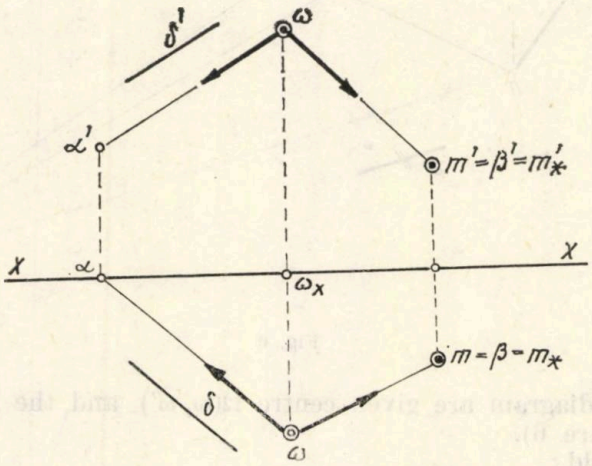


Fig. 5

and the straight line which passes through M and is parallel to Δ intersects $[B_1]$ in (β, β') with $\beta \equiv m$ and $\beta' \equiv m'$. Consequently, if:

$$M \in [B_1] \Leftrightarrow \tau_p M = M$$

As the previous relation refers to an arbitrary point of plan $[B_1]$, we can assert that: any point in plan $[B_1]$ is its own relief-perspective transform.

3. Transformation of the straight line

Keeping into account the problems previously shown, (2.e), a substantial simplification of the construction of a straight line transform results.

Indeed: suppose straight line D (d, d') the intersection point of which with $[B_1]$, has the image (β_1, β_1') and whese horizontal trace is (h, h').

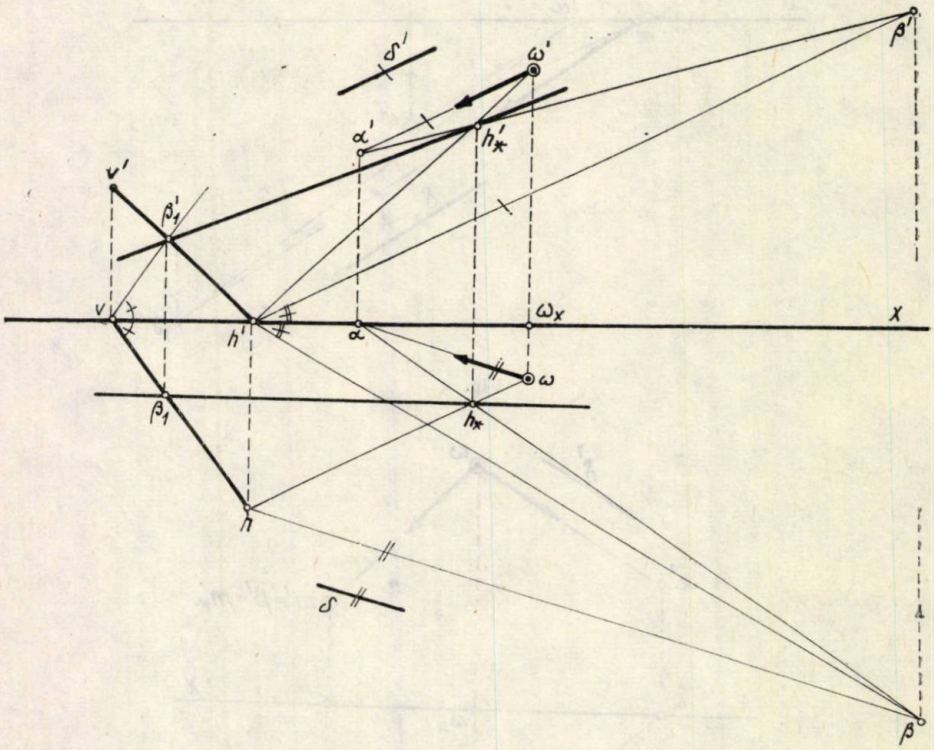


Fig. 6

In the diagram are given centre $\Omega(\omega, \omega')$ and the fixed direction $\Delta(\delta, \delta')$ (Figure 6).

We build:

$$(\omega\alpha, \omega\alpha') \,||\, (\delta, \delta') \text{ with } (\alpha, \alpha') = \omega\alpha, \ \omega\alpha' \cap [V].$$

As $(\beta\text{-},\beta_1') \in [B_1]$), according to (2.e), it is its own transform. In order to obtain the transform of a straight line, it is enough to transform (h, h'), which is in H and to use its intersection point with $[B_1]$ which is its own transform.

By repeating the constructions from (2.b.), we obtain point (β,β'), which is the intersection of the parallel to Δ drawn from M with $[B_1]$, whence it results that :

$$\tau_p(h, h') = (h_*,k'_*) = (\alpha\beta,\alpha'\beta') \cap (\omega h,\ \omega'\ h')$$

and

$$\tau_p D(d, d') = (\beta_1 h_*,\ \beta_1\ h'_*)$$

As whichever the straight line D may be, there is the relation :

$$D \cap \tau_p D = (\beta_1\beta_1') \mid (\beta_1,\beta_1') \in [B_1]$$

We can state :

Theorem 1 — Any straight line and its relief-perspective are always concurrent in the point of intersection of the straight line the with first bisector.

Theorem 2 — Whichever the straight line $D \in [B_1]$, may be, it is invariant when transform τ_p is applied to it.

If we follow diagram 5, we immediately observe that if point M_* passes through the projecting from centre Ω, ist transform M_* passes through the same projecting.

Whence results :

Theorem 3 — All straight lines which pass through the projection centre are their own transforms.

Observation : The transforms of two concurrent straight lines arealao two concurrent straight lines, as the concurrence point of the transforms coincides to their concurrence point.

If two straight lines are concurrent in a point situated in $[B_1]$, then the concurence point of the transforms concides with the concurrenc point of given straight lines.

4. Transformation of a plan

In what follows, we will consider the transformation τ_p applied to any plan, to a frontal plan and to a level plan.

a) Suppose any plan P, P' given by its traces and image $(\omega\alpha,\ \omega'\alpha')$, of the straight line parallel to Δ drawn through Ω.

We previously construct the straight line :
$(P_x,a,\ P_x a') = [P] \cap [B_1]$, which is its own transform and we use an arbitrary point of the plan, which in the case of the diagram in figure

7 is (b, b') belonging to its horizontal trace (by applying the constructions from 2.c)

The transform of point (b, b'), is :

$$(b_*, b'_*) = (\omega b, \omega' b') \cap (\alpha\beta, \alpha'\beta').$$

so that :

$$\tau_p[P, P'] = (P_x a, \ P_x a') \cup (ab, \ a'b').$$

In general, the transforms τ_p of the plans of a hundle, the support of which is a straight line contained in $[B_1]$, is a bundle with the same support. *Therefore, the transform τ_p of any plan is a plan concurrent with*

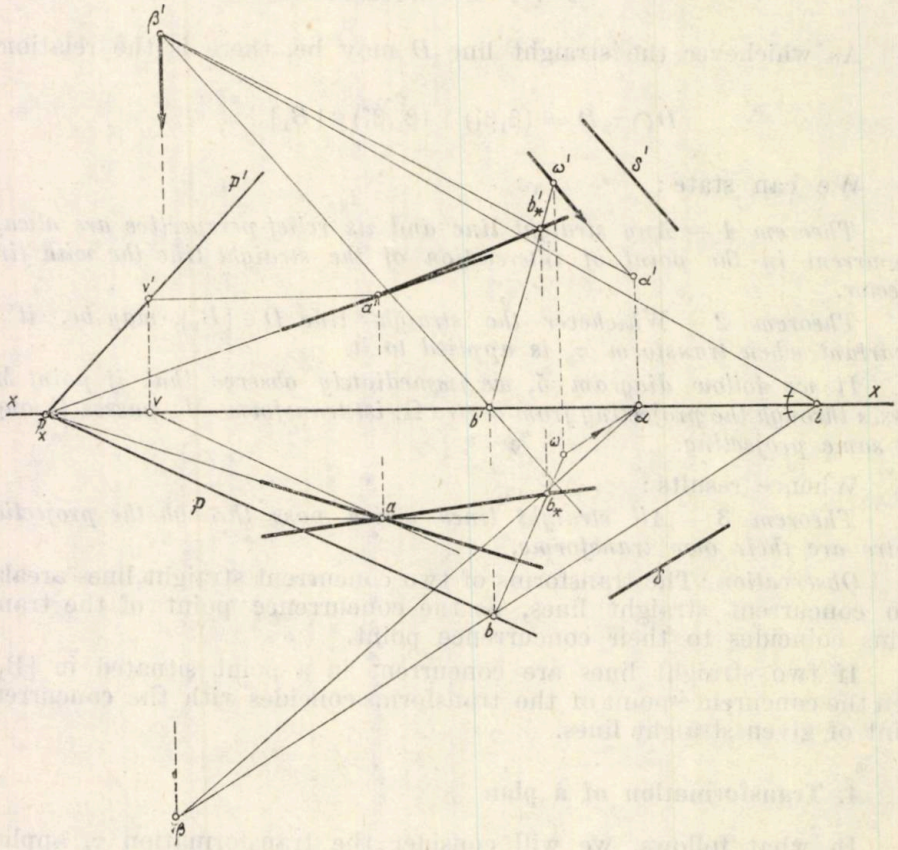


Fig. 7

the given plan, according to its straight line of intersection with the first bisector.

b) If we suppose plan $[F] \| [V]$, we will obtain its transform by means of its straight line of intersection with $[B_1]$ which is a frontal-

horizontal straight line remaining unchanged in this transformation, and by means of point $A(a, a') \in [F]$.

If we carry out the constructions from (2.a), we obtain : $\tau_p A\ (a,a') = A\ (a, a')$, and $[F] \cap [B_1] = (\lambda,\lambda')$ with $\lambda \equiv [F]$ and λ' the symmetric of straight line λ' in respect to XX. (F is the horizontal trace of plan $[F]$).

As : $\tau_p(\lambda,\lambda') = (\lambda,\lambda') \Rightarrow \tau_p[F] || XX$.

If the plan considered is $[N] || [H]$, we apply the foregoing process and we obtain : $\tau_p[N] || XX$. Whence results :

Theorem 4 — The transform of any plan parallel to one of the reference points is a plan parallel to the straight line of intersection XX of the reference point plan.

c) Suppose plan $[P]$ passing through XX, incident with both reference point plans, wo that $\sphericalangle [P]\ [V] \neq [P]\ [H]$. The intersection of this plan with $[B_1]$ is precisely XX, also a frontal-horizontal whose transform is itself.

The transform of a point $A(a, a') \in [P]$, is $A_*\ (a_*, a'_*)$ and we have at the same time :

$$[P] \cap [B_1] = XX \text{ and } \tau_p XX = XX$$

Consequently, $\tau_p[P]$ is a plan $[P_*]$ which also passes through XX

We can therefore state :

Theorem 5 — Whiechever is the plan which passes through XX, its transform also passes through XX, and $[B_1]$ is its own transform.

d) Let us consider the profile plan $[P]$ with $PP' \perp XX$ and the line $(P_x a,\ P_x a') \in [B_1]$, with $P_x a = P_x'$, and $B(b, b') \in [P]$. In this case, if we reason as in (2.a.), we obtain :

$$\tau_p P_x = P_x, \tau_p\ A(a, a') = A(a,a\,) \text{ and } \tau_p B(b,b') = (\beta_*,\beta'_*).$$

Therefore, the transformed plan is determined by the line ($P_x a$, $P_x a'$) and point (b, b'), and the traces of the transformed plan are Q and Q' whose concurrence point is $P_x \in XX$.

Observation : We find that, given some line D, to which a product $\tau_p \times \tau_p \times \tau_p \ldots$ of transformations is applied we obtain a bundle $D + \lambda D_p = 0$ of lines the support of which is the intersection point between D and $[B_1]$.

Likewise, if to some plan Q we apply a transformation product τ_p, the plans obtained $Q + \mu Q = 0$, form a bundle of plans which have as support the intersection line between $[Q]$ and $[B_1]$.

Finally, we point out *that this transformation, being of a biunivocal character, has the interesting practical importance of permiting to pass from one image obtained in the Monge system to its relief perspective*, thus obtaining an intuitive image.

Moreover, the transformation which we have studied here allows us to determine some spatial mechanism which we will discuss in the following study.

Chair of Descriptive Geometry and Drawing (I)
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest.

BIBLIOGRAFIE

1 *Béla Kerékjártó* Les fondaments de la géométrie-Tom 2 Budapesta, Edit- Acad, Ungare.
2 *Botez Şt. Mihail* Geometrie descriptivă-Editura Didactică, Bucureşti, 1968.
3 *Mirescu N. Nicoară Gh.* Geometrie Descriptivă Editura Didactică, Bucureşti, 1963
4 *M. St. Botez N. P. Mirescu* Axonometria Editura Tehnică, Bucureşti, 1970

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

FIZICĂ

C.Z.: 539

STABILIREA FACTORILOR DE FORMA ALE TRANZIȚIILOR BETA ÎNTRE STĂRI DESCRISE DE INTERACȚIUNEA CUASIPARTICULĂ FONON*

D. BOGDAN, TR. CREȚU, GH. MACARIE

1. Considerații teoretice preliminare

Caracterul fenomenologic al teoriei nucleului atomic a fost trăsătura specifică cea mai importantă a concepțiilor relative la constituția nucleului la începuturile sale. De exemplu în cazul nucleelor deformate, mișcările rotaționale și neorotaționale (vibrație și intrinseci) erau descrise de niște parametri globali, coordonatele colective $\alpha_{\lambda\mu}$, iar rotația nucleului era descrisă de rotația nucleului ca un singur tot iar vibrația era legată de oscilațiile suprafeței nucleului global. În cadrul unei asemenea teorii fenomenologice fiecare nucleu e caracterizat de cîțiva parametrii. Energiile de excitație, momentele multipolare, probabilitățile de tranziție se exprimă toate în funcție de acești parametri. Valorile acestor parametri se determină din datele experimentale corespunzătoare fiecărui nucleu.

Descrierea fenomenologică s-a lovit încă de la început de serioase dificultăți. Înainte de toate trebuia îndeplinită condiția de adiabaticitate. Totuși experiența arată că această condiție nu este îndeplinită niciodată riguros pentru nucleele impare și impar-impare. Teoria fenomenologică nu poate explica și cu atît mai puțin prevedea schimbarea proprietăților nucleare de la nucleu la nucleu.

Dar unul din defectele cele mai serioase ale teoriei fenomenologice este că nu e capabilă să trateze stările de vibrație ca rezultatul unei interacții coerente a nucleonilor. Din această cauză fenomenologic nu se poate interpreta cantitatea impresionantă de date experimentale care dă informații relative la structura stărilor de vibrație.

Unele din direcțiile de cercetare strict microscopică a structuri nucleului sînt metoda Hartree — Fock și teoria materiei nucleare dezvoltată de Brückner, Bethe și Goldstone [1—3]. Ideia de bază a acestor metode teoretice constă în folosirea datelor experimentale ale difuziei

* Manuscris predat redacției la data de 15 ianuarie 1972

nucleon pe nucleon pentru calculul unor proprietăți nucleare fundamentale ca densitatea materiei nucleare și energia de legătură pe nucleon. Dar și aceste tratări riguros microscopice întîmpină anumite neajunsuri. De exemplu datele experimentale disponibile pentru difuzia nucleon pe nucleon nu sînt suficiente pentru determinarea în mod unic a potențialului nucleon — nucleon. De asemenea nu e clarificată problema diferenței dintre interacția a doi nucleoni liberi și aceiași interacție cînd nucleonii sînt legați în nucleu. De exemplu trebuie să se aibe în vedere că din difuzia nucleon — nucleon se pot obține numai valorile amplitudinei de difuzie numai pe pătura energetică (adică cînd impulsurile celor două particule inițiale și finale sînt legate de legile de conservare aenergiei și impulsului) Dar pentru calculul caracteristicilor nucleare de bază se pare că este necesar să se cunoască comportarea acestei amplitudini în afara păturii energetice (așa numitele „offshell matrix elements'' cum se numesc în literatura de specialitate).

În ceea ce privește teoria materiei nucleare cu toate succesele obținute în rezolvarea problemei mai multor corpuri, ea nu a reușit să obțină simultan rezultate satisfăcătoare pentru densitatea nucleară și energia de legătură pe nucleon. Calculele după metoda Hartree — Fock au căpătat o largă răspîndire dar folosirea ei la nucleele deformate întîmpină mari dificultăți matematice.

În afară de direcțiile riguros microscopice, în teoria nucleului au apărut niște direcții hibride, așa numitele teorii semimicroscopice. Acestea au ca trăsătură comună alegerea unei interacții (sau cîmp) efectiv. În mod natural la alegerea acestei interacții efective există foarte mult arbitrar și singurul criteriu al justeței alegerii este experiența. Așa de exemplu în teoria sistemelor fermi finite dezvoltată de A. B. Migdal [4] se postulează drept interacție efectivă interacția de contact (sub forma funcției delta) care depinde de constante care iau diverse valori înăuntru și în afara nucleului. Folosind această interacție și o anumită formă a potențialului cîmpului self-consistent nuclear se calculează celelalte mărimi nucleare.

O mare răspîndire au căpătat-o în ultimul timp acele teorii semi-microscopice bazate pe alegerea cîtorva hamiltoniene nucleare de model- Pentru fiecare fenomen nuclear mai important se găsește partea cea mai semnificativă a forțelor nucleare care-l determină și care se introduce în hamiltonianul nuclear. Acest mod de tratare pare a fi o fază de tranziție naturală, firească, de la tratarea pur fenomenologică la tratarea riguros microscopică. Succesul metodei se bazează pe aceea că problema mai multor corpuri se reduce la problema unui mic număr de grade de libertate. Metoda a fost foarte pe larg dezvoltată în cazul nucleelor deformate de grupul de teoreticieni din Dubna condus de V. G. Soloviov [5]. Ea s-a dezvoltat în special pe baza teoriei corelațiilor de perechi de nucleoni de tip suprafluid. În acest caz se poate distinge în hamiltonianul nuclear un cîmp mediu (self-consistent) nuclear, o interacție care conduce la corelațiile de nucleoni de tip suprafluid cît și o interacție reziduală. Ideia de bază constă în dezvoltarea după multipoli a interacției reziduale. Hamiltonianul nuclear se scrie în acest caz sub forma

$$H_N = \sum_{s\sigma} [E_0(s) - \lambda_n] a^+_{s\sigma} a_{s\sigma} - G_n \sum_{ss} a^+_{s+} + a^+_{s-} - a'_{s-} a^+_{r\sigma} - a_{s'-} a_{s'+} +$$

$$+ \sum_{\sigma r} [E_0(r) - \lambda_p] a^+_{r\sigma} a_{s\sigma} - G_p \sum_{\gamma r'} a^+_{r+} a^+_{r-} a_{r'-} - a_{r'+} +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geqslant 2} \{\chi^\lambda_n Q^+_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} + \chi^\lambda_p Q^+_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} + \chi^\lambda_{np} [Q^+_{\lambda\mu}(n) Q_{\lambda\mu}(p) +$$

$$+ Q^+_{\lambda\mu}(p) Q_{\lambda\mu}(n)]\} + \frac{1}{2J} [J(J+1) - K] - \frac{1}{2J} [J_+ + J_-] \times$$

$$\times \{ \sum_{\substack{ss' \\ \sigma\sigma'}} < s\sigma | j_+ + j_- | s'\sigma' > a^+_{s\sigma} a_{s'\sigma'} + \sum_{\substack{rr' \\ \sigma\sigma'}} < r\sigma | j_+ + j_- | r'\sigma' > a^+_{r\sigma} a_{r'\sigma'} \}$$

unde (1

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

iar operatorul multipolar $Q^+_{\lambda\mu}$ este de forma :

$$Q^+_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{qq' \\ \sigma\sigma'}} < q\sigma | r^\lambda (Y_{\lambda\mu} + (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu}) | q'\sigma' > v^+_{q\sigma} a_{q'\sigma'}$$

Din hamiltonianul de mai sus se vede că în această teorie semimicroscopică mişcarea de rotaţie este tratată în continuare fenomenologic şi se folosesc o serie de constante care se determină din compararea teoriei cu experienţa. Totuşi stările de vibraţie sînt tratate microscopic, adică ca rezultat al interacţiunii coerente a multor nucleoni. Energia şi structura stărilor de vibraţie sînt legate nemijlocit de comportarea nivelelor uniparticulă ale cîmpului self-consistent. Stările de vibraţie se descriu în mod unic, fără a se face apel la condiţia de adiabaticitate ($\omega_{vib} \ll \omega_{intr}$).

Dacă în hamiltonianul nuclear de mai sus se înlocuiesc operatorii de particulă a^+ şi a cu operatorii de cuasiparticulă corespunzători α^+ şi α (lucru care se realizează efectuînd transformarea canonică Bogolinbov — Valatin), interacţia multipol — multipol din hamiltonian se descompune în nişte sume de trei tipuri de termeni :

$$Q^+_i Q_i,\ B^+(q, q')\ B(q,q') \text{ şi } Q^+_i\ B(q,q')$$

şi complexele lor conjugate. În aceşti termeni Q^+_i şi Q_i sînt operatori de creare şi absorbţie ale cuantelor de vibraţie (sau fononii) şi au forma

$$Q^+_i = \frac{1}{2} \sum_{qq'} [\psi^i_{qq'} A^+(q,q') - \varphi^i_{qq'} A(q,q',)]$$

unde

$$A^+_{(q,q')} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{qq' \\ \sigma}} , \sigma\ \alpha^+_{q-\sigma}\ \alpha^+_{q'\sigma};\ A(q,q') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{qq' \\ \sigma}} \sigma \alpha_{q'\sigma}\ \alpha_{q-\sigma}$$

iar

$$[Q_i,\ Q_i^+] = \delta_{ii'};\ [Q_i^+, Q_{i'}^+] = [Q_i, Q_i] = 0$$

Operatorii $B^+(q,q')$ şi $B(q,q')$ sînt operatori de tip uniquasiparticulă mai precis sume de aceşti operatori:

$$B^+(q,q') = \sum_{\substack{qq'\\ \sigma}} \alpha_{q'\sigma}\alpha_{q\sigma} B(q,q') = \sum_{\substack{qq'\\ \sigma}} \alpha^+_{q\sigma}\alpha_{q'\sigma}$$

Din această cauză termenii de interacţie din hamiltonian de tipul $Q_i^+ B(q,q'')$, $Q_i B^+(q,q')$, $Q_i B(q,q')$ şi $Q_i^+ B^+(q,q')$ sînt termenii de interacţie quasi-particulăfonon. Scopul lucrării de faţă este de a calcula factorii de formă (elementele de matrice), beta în cazul cînd tranziţiile au loc între stări care sînt funcţii proprii ale unui hamiltonian în care există termenii de interacţie quasiparticulă — fonon. Se consideră numai nucleele deformate.

2. Funcţiile de undă şi elementele de matrice

Dacă, pentru mai multă claritate, în hamiltonianul (1) se neglijează termenii de interacţie Coriolis cît şi energia de rotaţie şi deasemenea se consideră un singur tip de particule, după efectuarea transformării canonice Bogoliubov — Valatin, hamiltonianul capătă forma

$$H_N = \sum_q \varepsilon(q) B(q,q) - \frac{1}{4}\sum_{\lambda\mu ii'} \frac{1}{2\chi^\lambda} \frac{1}{\sqrt{Y^i_{(\lambda\mu)}\ Y^{i'}_{(\lambda\mu)}}} [Q_i^+(\lambda\mu)\, Q'_i(\lambda\mu) +$$

$$+ Q_{i'}^+(\lambda\mu)\, Q_i(\lambda\mu) + Q_i^+(\lambda\mu)\, Q_{i'}^+(\lambda\mu) + Q_i(\sigma\mu)\, Q_i(\lambda\mu) -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{\lambda\mu i} \frac{1}{\sqrt{Y^i_{(\lambda\mu)}}} \times \sum_{qq'} V_{q'q} \{[Q_i^+(\lambda\mu) + Q_i(\lambda\mu)][f^{\lambda\mu}(qq')B(q,q') +$$

$$+ \bar{f}^{\lambda\mu}(\lambda\mu)B^+(q,q')] + [f^{\lambda\mu}(q,q')B(q,q') + \bar{f}^{\lambda\mu}(q,q')B^+(q,q')][Q_i^+(\lambda\mu) + Q_i(\lambda\mu)]$$

Această expresie a fost obţinută de Soloviov [5]. Tot el a propus şi următoarele expresii pentru funcţiile de undă care descriu stările nucleare cu valori determinate $k\pi$

$$\psi_p(k\pi;\rho) = C^n_\rho \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\sigma \{\alpha^+_{\sigma\rho} + \sum_{\lambda\mu ic} D^{\lambda\mu in}_{\rho s\sigma}\ \alpha^+_{s\sigma}\ Q_i^+(\lambda\mu)\}\psi$$

în cazul unui nucleu cu un număr impar de neutroni. În cazul unui nucleu cu un număr impar de protoni

$$\psi_p(k\pi;\rho) = C^p_\nu \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\sigma \{\alpha^+_{\nu\sigma} + \sum_{\lambda\mu ir} D^{\lambda\mu ip}_{\nu r\sigma}\ \alpha^+_{r\sigma}\ Q_i^+(\lambda\mu)\}\psi$$

In expresiile de mai sus $[Y(\lambda\mu)]^{-1/2}$ este o funcție care depinde de energia fononului, $\omega_i^{\lambda\mu}$, și în același timp e direct proporțională cu constanta de cuplaj $\chi^{(\lambda)}$. Energiile $\varepsilon(q)$ depind de parametrii de suprafluiditate Δ și λ astfel:

$$\varepsilon(q) = \sqrt{\Delta + [E_0(q) - \lambda]^2}$$

Prin $f^{\lambda\mu}(q,q')$ și $\bar{f}^{\lambda\mu}(q,q')$ s-au notat elementele de matrice ale operatorilor multipolari $r^\lambda Y_{\lambda 0}$ și $r^\lambda(Y_{\lambda\mu} + (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu})$ și ele au proprietățile

$$f^{\lambda\mu}(q,q') = f^{\lambda\mu}(q',q)\, f^{\lambda\mu}(q,q') = -\bar{f}^{\lambda\mu}(q',q)$$

În expresiile funcțiilor de undă, ψ descrie starea fundamentală a unui nucleu par — par care de obicei se consideră ca stare de vid pentru quasiparticule, ρ și ν sînt numerele cuantice (fără semne) ale stărilor de un cuasi-neutron și respectiv un causi-proton care se amestecă cu stările de cuasiparticulă fonon $\alpha_{s\sigma}^+ Q_i^+(\lambda\mu)$ și respectiv $\alpha_{r\sigma}^+ Q_i^+(\lambda\mu)$. Condiția de normare este

$$(C_\rho^u)^2 \left\{1 + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu i s\sigma} (D_{\rho s\sigma}^{\lambda\mu i n})^2\right\} = 1$$

Prin n s-a notat numărul rădăcinii ecuației seculare care se obține din valoarea medie a hamiltonianului nuclear H_N cu ajutorul următorului principiu variațional

$$\delta\{<\psi_n^*(k\pi;\rho)|\, H_N\,|\,\psi(k\pi;\rho)> - \eta_n\,[(C_\rho^n)^2\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu i s\sigma}(D_{\rho s\sigma}^{\lambda\mu i n})^2 - 1\right)\} = 0$$

În principiul variațional de mai sus multiplicatorul lui Lagrange η_N capătă semnificația de energie a stărilor nerotaționale.

Din ecuația seculară care rezultă și din condiția de normare se determină valorile coeficienților de amestec

$$(C_\rho^n)^{-2} = 1 + \sum_{\lambda\mu i s} \frac{1}{4} \frac{V_{\rho s}^2}{Y^i(\lambda\mu)} \times \frac{[f^{\lambda\mu}(\rho\nu)]^2}{[\varepsilon(s) + \omega_i^{\lambda\mu} - \eta_n]^2}$$

$$D_{\rho s\sigma}^{\lambda\mu i n} = \frac{1}{2} \frac{V_{\rho s}}{\sqrt{Y^i(\lambda\mu)}} \times \frac{f^{\lambda\mu}(\rho s)}{\varepsilon(s) + \omega_i^{\lambda\mu} - \eta_n}$$

Dacă η_n, adică energia stării nucleare, tinde către valoarea $\varepsilon(\rho)$ atunci funcția de undă a stării nucleare tinde către cea a unei stări de tip unicuasiparticulă, pentru care $(C_\rho^n)^2 = 1$. Dacă rădăcina ecuației seculare η_n tinde către $\varepsilon(s) + \omega_{i_0}^{\lambda_0\mu_0}$ atunci starea nucleară se reduce la o funcție de undă de tipul unei componente cuasiparticulă — fonon:

$$\psi_n(k\pi;\rho)\big|_{\varepsilon(s)+\omega_{i_0}^{\lambda_0\mu_0} - \eta_n \to 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\sigma \alpha_{s\sigma}^+ Q_{i_0}^+(\lambda_0\mu_0)\,\psi$$

Această din urmă stare este tocmai o stare de vibraţie a nucleului impar deformat. Dacă $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = 2$ atunci starea se numeşte γ-vibraţională, cînd $\lambda_0 = 3$ atunci starea se numeşte de vibraţie octupolară.

Pentru rezolvarea unor probleme concrete de dezintegrare beta prezintă interes expresiile funcţiilor de undă care descriu stări în care sînt două cuasiparticule amestecate cu stări de cuasiparticulă — fonon. Avem în acest caz

$$\psi_n(k\pi;\rho_1,\rho_2) = \frac{N_n(\rho_1,\rho_2)}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \{C'^n_{\rho_1}\, \alpha^+_{\rho_1\sigma} + C'^n_{\rho_2}\, \alpha^+_{\rho_2\sigma} + \sum_{\lambda\mu is} D^{\lambda\mu in}_{\rho_1\rho_2 s\sigma}\, \alpha^+_{s\sigma}\, Q^+_i(\lambda\mu)\}\psi$$

unde $N_n\ (\rho_1\rho_2)$ este o constantă de normare care se determină din condiţia

$$N^2_n(\rho_1\rho_2)\{(C'^n_{\rho_1})^2 + (C'^n_{\rho_2})^2 + \frac{1}{2}\sum_{s\sigma}(D^{\lambda\mu in}_{\rho_1\rho_2 s\sigma})^2\} = 1$$

valorile $C'^n_{\rho_1}$, $C'^n_{\rho_2}$ şi $D^{\lambda\mu in}_{\rho_1\rho_2 s\sigma}$ se determină ca mai sus cu ajutorul unui principiu variaţional din care rezultă ecuaţia seculară.

În cele ce urmează vom prezenta rezultatele calculului elementelor de matrice beta în cazul unor stări descrise de funcţiile de undă de acest din urmă tip.

Aşadar problema de calculat este următoarea: să se găsească expresia elementului de matrice

$$M = <\psi_f^*|O_\beta|\psi>$$

în care conform formalismului obişnuit al cuantificării a doua:

$$O_\beta = \sum_{\substack{pn \\ \sigma_p\sigma_n}} <p\,\sigma p|T_{K\lambda\gamma}|n\,\sigma n>\, a^+_{p\sigma p}\, a_{n\sigma n}$$

Stările iniţială şi finală sînt descrise de următoarele funcţii de undă:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\sigma}\{C_{\rho 1}\,\alpha^+_{\rho_1\sigma} + C_{\rho 2}\,\alpha^+_{\rho_2\sigma} + \sum_{\lambda\mu is} D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s\sigma}\,\alpha^+_{s\sigma}\,Q^+_i\,(\lambda\mu)\}\psi$$

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\sigma}\{C_{\nu 1}\,\alpha^+_{\nu_1\sigma'} + C_{\nu_2}\,\alpha^+_{\nu_2\sigma'} + \sum_{\lambda'\mu'i'r} D^{\lambda'\mu'i'}_{\nu_1\nu_2 r\sigma' i}\,\alpha^+_{r\sigma'}\,Q^+_{i'}\,(\lambda\mu)\}\psi$$

Constanta de normare este cuprinsă în expresiile de mai sus. Atunci putem reprezenta M sub forma unei sume de patru termeni cu caracteristici bine precizate, şi anume

$$M_I = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} <(C_{\nu_1}\alpha_{\nu_1\sigma'} + C_{\nu_2}\,\alpha_{\nu_2\sigma'})||O_\beta||(C_{\rho_1}\,\alpha^+_{\rho_1\sigma} + C_{\rho_2}\,\alpha^+_{\rho_2\sigma})>$$

$$M_{II} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} < (C_{\nu_1} \alpha_{\nu_1\sigma'} + C_{\nu_2} \alpha_{\nu_2\sigma'}) || O_\beta || \sum_{\gamma\mu i s} D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s\sigma} \alpha^+_{s\sigma} Q^+_i(\lambda\mu) >$$

$$M_{III} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} < \sum_{\lambda'\mu' i' r} D^{\lambda'\mu' i'}_{\nu_1\nu_2 s\sigma} \alpha_{r\sigma'} Q_i(\lambda'\mu') || O_\beta || D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s\sigma} \alpha^+_{s\sigma} Q^+_i \lambda(\mu) >$$

$$M_{IV} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} < \sum_{\lambda'\mu' i' r} D^{\lambda'\mu' i'}_{\nu_1\nu_2 r\rho'} \alpha_{r\sigma'} Q'_i(\lambda'\mu') || O_\beta || \sum_{\lambda\mu i s} D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s\sigma} \alpha^+_{s\sigma} Q^+_i(\lambda\mu))$$

Acești termeni se transformă la început acționînd numai asupra operatorului O_β și anume transformînd operatorii de particulă din acesta, în operatori de cuasiparticulă

$$a^+_{p\sigma p} = U_p \alpha^+_{p\sigma p} - \sigma_p V_p \alpha_{p-\sigma p}$$

$$a_{n\sigma n} = U_n \alpha_{n\sigma n} - \sigma_n V_n \alpha^+_{n-\sigma n}$$

Atunci elementele de matrice de mai sus devin produse numai de operatori de creare și absorbție de cuasiparticule care în continuare sînt transformate după regulele de comutare cunoscute. Utilizînd regulile de selecție obținute astfel în elementele de matrice uniparticulă din O_β, obținem în cele din urmă expresiile

$$M_I = C_{\nu_1\rho_1} < \nu_1 + |T_{K\lambda\gamma}| \rho_1 + > [U_{\nu_1} V_{\rho_1} - (-1)^{\rho_1-\nu_1+K} V_{\rho_1} V_{\nu_1}] +$$

$$+ C_{\rho_2} C_{\nu_1} < \nu_1 |T_{\lambda K\gamma}| \rho_2 + > [U_{\nu_1} U_{\rho_2} - (-1)^{\rho_2-\nu_1+K} V_{\nu_1} V_{\rho_2}] + C_{\nu_2} C_{\rho_1} <$$

$$< \nu_2 + |T_{K\lambda\gamma}| \rho_1 + > [U_{\nu_2} U_{\rho_1} - (-1)^{\rho_1-\nu_2+K} V_{\nu_2} V_{\rho_1}] + C_{\nu_2} C_{\rho_2} < \nu_2 +$$

$$+ | T_{K\lambda\gamma}| \rho_2 + > [U_{\nu_2} V_{\rho_2} - (-1)^{\rho_2-\nu+K} V_{\nu_2} V_{\rho_2}] + \sum_{\substack{p\sigma_p \\ \sigma\sigma'}} V^2_p <$$

$$< p\,\sigma\,p |I_{K\lambda\gamma}| p\,\sigma\,p > [\delta_{\nu_1\rho_2} \delta_{\sigma\sigma'} + \delta_{\nu_1\rho_1} \delta_{\sigma\sigma'} + \delta_{\nu_2\rho_1} \delta_{\sigma\sigma'} + \delta_{\nu_2\rho_2} \delta_{\sigma\sigma'}]$$

$$M_{II} = \sum_{\substack{qq's \\ \lambda\mu i}} (C_{\nu_1} \delta_{\nu_1 s} + C_{\nu_2} \delta_{\nu_2 s}) \frac{1}{\sqrt{2}} < q' + |T_{K\lambda\gamma}| q' + > V_{q'} U_{q'} \psi^i_{qq'} D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s+} -$$

$$- \sum_{\substack{qq's \\ \lambda\mu i}} \frac{1}{2\sqrt{2}} < q + |T_{K\lambda\gamma}| s + > U_s V_q (C_{\nu_1} \delta_{\nu_1 q'} + C_{\nu_2} \delta_{\nu_2 q'}) \psi^i D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s+} -$$

$$- \sum_{\substack{qq's \\ \mu\lambda i}} < q' + | T_{K\lambda\gamma} | s + > \left[\left(\frac{1}{2} U_s V_{q'} \delta_{\nu q_1} + \right. \right.$$

$$+(-1)^{s-q'+K}\,\delta_{\nu_1 q'}\,U_{q'}\,V_s\Big)\,C_{\nu_1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s+}+\Big(\frac{1}{2}\,V_s\,V_{q'}\,\delta_{\nu_2 q}+$$

$$+(-1)^{s-q'+K}\,\delta_{\nu_2 q'}\,U_{q'}\,V_s\Big)\,C_{\nu_2}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big]\,\psi^{i}_{qq'}\,D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s+}$$

$$M_{\mathrm{III}}=\sum_{\substack{q''q'''r\\ \lambda\mu i}}\Big[\frac{1}{2\sqrt{2}}<q''+|T_{K\lambda\gamma}|q'''+>(U_{q''}\,V_{q'''}+$$

$$+(-1)^{q'''-q''+K}\,U_{q'''}\,V_{q''})(C_{\rho_1}\,\delta_{r\rho_1}+C_{\rho_2}\,\delta_{r\rho_2})+\frac{1}{2\sqrt{2}}<q'''+|T_{K\lambda\gamma}|r+.$$

$$+>(V_r U_{q'''}+(-1)^{r-q'''+K}\,U_r\,V_{q'''})\,(C_{\rho_1}\,\delta_{\rho_1 q''}+C_{\rho_2}\,\delta_{\rho_2 q''})-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}<q''+|T_{K\lambda\gamma}|r+>(V_r U_{q''}-(-1)^{r-q''+K}\,U_r\,V_{q''})\,(C_{\rho_1}\,\delta_{\rho_1 q'''}+$$

$$+C_{\rho_2}\,\delta_{\rho_2 q'''})]\;\psi^{i'}_{q''q'''}\,D^{\lambda'\mu'i'}_{\nu_1\nu_2 r+}$$

$$M_{\mathrm{IV}}=\frac{1}{8}\sum_{\substack{qq'q''q'''\\ rs\lambda\mu i\\ \lambda'\mu'i'}}\{2<r+|T_{K\lambda\gamma}|s+>(\delta_{qq''}\,\delta_{q'q'''}+\delta_{qq'}\,\delta_{qq'''})\,(U_r\,U_s-$$

$$-(-1)^{s-r-K}V_r V_s)-<q''+|T_{K\lambda\gamma}|q+>[(\delta_{rq'}\,\delta_{sq'''}+2\delta_{rs}\,\delta_{q'q'''})\,U_{q''}\,U_q-$$

$$-(-1)^{q-q''-K}\,(\delta_{rq'}\,\delta_{sq'''}-2\delta_{rs}\,\delta_{q'q'''})\,V_q\,V_{q''}]+<q'''+|T_{K\lambda\gamma}|\,q'+$$

$$+>(2\delta_{rs}\,\delta_{qq''}-\delta_{rq}\,\delta_{sq''})(U_{q'''}\,U_{q'}+(-1)^{q'-q'''-K}\,V_{q'}\,V_{q'''})-$$

$$-<q''+|T_{K\lambda\gamma}|s+>(\delta_{rq'}\,\delta_{qq'''}+\delta_{rq}\,\delta_{q'q'''})\,(U_{q''}\,U_s-(-1)^{s-q''-K}V_c V_{q''})-$$

$$-<q'''+|T_{K\lambda\gamma}|s+>(\delta_{qq'}\,\delta_{r2'}+\delta_{rq}\delta_{q'q'''})\,(U_{q'''}U_s-(-1)^{s-q'''-K}V_s V_{q'''})+$$

$$+<q'''+|T_{K\lambda\gamma}|q+>(2\delta_{rs}\,\delta_{q'q''}-\delta_{rq'}\,\delta_{sq''})(U_{q'''}\,U_q+(-1)^{q-q'''-K}V_q V_{q'''})-$$

$$-<q''+|T_{K\lambda\gamma}|\,q'+>[(\delta_{sq'''}\,\delta_{rq}+2\delta_{rs}\delta_{qq'''})(U_{q''}U_{q'}-$$

$$-(-1)^{q'-q''-K}\,(\delta_{rq}\,\delta_{q'''s}-2\delta_{rs}\,\delta_{qq'''})\,V_{q'}\,V_{q''}]-<r+|T_{K\lambda\gamma}|q+$$

$$+>(\delta_{sq''}\,\delta_{q'q'''}+\delta_{q'q''}\,\delta_{sq'''})\,(U_r\,U_q+(-1)^{q-r-K}\,V_r\,V_q)-$$

$$-<r+|T_{K\lambda\gamma}|q'+>(\delta_{sq''}\,\delta_{qq'''}+\delta_{sq'''}\,\delta_{qq''})(U_r\,U_{q'}+$$

$$+(-1)^{q'-r-K}\,V_{q'}\,V_r)-2V_p^2<p+|T_{K\lambda\gamma}|p+>(\delta_{sq''}\,\delta_{rq'}\,\delta_{qq'''}+$$

$$+ \delta_{sq''} \delta_{rq} \delta_{q'q'''} + \delta_{sq'''} \delta_{qq''} \delta_{rq'} + \delta_{sq'''} \delta_{rq} \delta_{q'q''} - \delta_{rs} \delta_{qq''} \delta_{q'q'''} -$$

$$- \delta_{rs} \delta_{qq'''} \delta_{q'q''})\} \psi^{i}_{qq'} \psi^{i'}_{q''q'''} D^{\lambda'\mu'\nu'}_{\nu_1\nu r+} D^{\lambda\mu i}_{\rho_1\rho_2 s+}$$

3. Concluzii

În lucrare s-au calculat elementele de matrice beta în cazul cînd tranziţiile se produc între stări nucleare în care interacţia cuasiparticulă — fonon joacă un rol important. De asemenea s-a calculat cazul cînd stările nucleare sînt alcătuite de două cuasiparticule care se amestecă cu componente cuasiparticulă — fonon. Simplificarea acestor formule la cazurile mai simple cînd o stare are două cuasiparticule iar alta una singură, sau la cazurile cînd există numai cîte o singură cuasiparticulă este evidentă.

Calculele efectuate la Dubna arată că majoritatea stărilor nucleare nerotaţionale sînt de tipul celor presupuse de noi în calculul de mai sus sau de tipurile mai simple menţionate.

Un calcul concret al valorilor *ft* intenţionăm să-l efectuăm pentru tranziţiile $^{237}U\left(\frac{1}{2}+\right)^{237}Np\left(\frac{1}{2}-;\frac{1}{2}+\right)$. Starea $^{237}U\left(\frac{1}{2}+\right)$ este alcătuită 92% de cuasineutronul $\frac{1}{2}+[631]$ 0,075% de cuasineutronul $\frac{1}{2}+[620]$ şi aproximativ 4% de un amestec de cuasiparticule şi fononi. Starea $\frac{1}{2}+a\ ^{237}Np$ este 40% alcătuită de cuasiprotonul $\frac{1}{2}+[660]$ şi 20% de cuasiprotonul $\frac{1}{2}+[400]$ şi peste 30% de un amestec de cuasiprotoni şi fononi. Este una din stările cele mai amestecate cunoscute Deasemenea intenţionăm să mai studiem şi alte cazuri în viitor.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti
Institutul de Fizică Atomică,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *K. A. Brueckner*, A. M. Lockett, M. Rotenberg, Phys, Rev. *121*, 255 (1961)
2. *H. A. Bethe*, Proc. Inter. Conf. Nuclear Structure p. 56 ed. by J. Sanada, Tokyo, 1967
3. *J. Goldstone* Proc. Roy. Soc. *A* 239, 267 (1957)
4. *A. B. Migdal*, Teoria conecinâh fermi — sistem i svoistva atomnîh iader Nauka, 1965
5. *V. G. Soloviov*, Teoria slojnîh iader, Nauka, 1971.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 66

L'INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ DU MILIEU DE RÉACTION SUR LA VITESSE DE L'HYDROLYSE ACIDE DE QUELQUES ESTERS ALIPHATIQUES DANS LES SOLVANTS MIXTES *

G. COSTEANU, ORTANSA LANDAUER, CORNELIA MATEESCU.

On sait que la constante de vitesse d'une réaction est une fonction de plusieurs variables, $k = f(D, \mu, \eta)$, caractéristiques du solvant. D'autre part, la structure des molécules du solvant et leurs interactions avec les molécules du réactif ont aussi une grande influence sur la vitesse de réaction. Pour mieux comprendre le comportement du solvant nous avons choisi des solvants mixtes, dont on peut faire varier constamment les propriétés phyisiques.

Dans cet article nous allons faire une étude comparative de l'influence de la viscosité du solvant sur l'hydrolyse acide du formiate et de l'acétate de *n*-butyle dans l'eau-acétone et aussi sur l'hydrolyse acide de l'acétate de *n*-butyle dans l'eau-acétone et eau-dioxanne.

L'influence de la viscosité sur la constante de vitesse s'exprime, soit par la relation de E. A. Moelwyn-Hughes [1]

$$k = \frac{3\pi r\eta}{m} \cdot e^{-\frac{E}{RT}} = \text{const.}\ \eta \qquad (1)$$

où η est la viscosité du solvant, en admettant que la vitesse de réaction est déterminée par la diffusion des espèces réactantes à travers le milieu de réaction ; soit par la relation de A. Olander [2]

$$k = \frac{1}{6}\,\pi\,\frac{kT}{\eta}\,\frac{(r_A + r_B)^2}{r_A r_B} \cdot e^{-\frac{E}{RT}} = \frac{\text{const}}{\eta} \qquad (2)$$

Cette relation admet que la vitesse de réaction depend surtout de la vitesse d'activation des molécules du réactif.

En tenant compte de ces relations on doit s'attendre que, dans certaines conditions le rapport $\frac{k}{\eta}$ ainsi que le produit $k\eta$ aient des valeurs constantes.

* Ouvrage reçu à la rédaction le 13 December 1971

Tout d'abord, nous avons considéré les courbes, viscosité-concentration, des solvants mixtes eau-acétone [3] et eau-dioxanne[4], dont l'allure présente un maximum, d'autant plus marqué que la température est plus basse. Nous avons calculé ensuite les dispersions relatives, en pour cent, εk ; $\varepsilon \frac{k}{\eta}$ *et* $\varepsilon k\eta$. pour la partie montante et la partie descendante de la courbe et aussi pour l'ensemble de la courbe des viscosités.

Le premier tableau rassemble les valeurs des constantes de vitesse, en min^{-1}, de l'hydrolyse acide du formiate de *n*-butyle dans l'eau-acétone à 30, 40, 50, et 60° C.

Tableau 1

Valeurs des constantes de vitesse en min^{-1}, à 30°, 40°, 50°, 60°

%g acétone	$10^3 k_{30}$	$10^3 k_{40}$	$10^3 k_{50}$	$10^3 k_{60}$
15,95	13,53	24,93	48,36	89,13
24,18	10,05	19,35	41,50	77,98
32,61	9,21	16,81	36,23	69,35
41,36	6,91	13,43	29,42	60,60
50,38	6,00	9,79	24,00	46,81
60,00	5,94	8,41	20,73	44,16
70,36	4,14	8,98	19,05	39,81
81,53	5,04	11,51	23,78	50,13
85,60	6,82	14,05	30,38	63,54

Le deuxième tableau donne les dispersions relatives, en pour cent, εk ; $\varepsilon k\eta$ et $\varepsilon \frac{k}{\eta}$ de l'hydrolyse acide du formiate de *n*-butyle dans l'eau-acétone.

On sait que la dispersion relative en pour cent, est donnée par la relation $\varepsilon = \frac{\sigma}{k} 100$ où $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(k_i - \bar{k})^2}{n-1}}$, k_i est la constante de vitesse initiale, $\bar{k}_i$ est la constante de vitesse moyenne et n représente le nombre de déterminations.

Tableau 2

Valeurs des dispersions relatives εk ; $\varepsilon k\eta$ et $\varepsilon \frac{k}{\eta}$

	15—41 % g acétone			50—85 % g acétone			15—85 % g acétone		
	I			II			toute la courbe		
t°c	εk	$\varepsilon k\eta$	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$	εk	εky	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$	εk	εky	$\varepsilon \frac{k}{y}$
30	27,72	22,32	32,50	25,05	20,50	46,80	43,90	63,62	34,98
40	21,04	20,24	31,39	12,61	14,30	45,27	39,70	49,29	38,01
50	20,67	15,48	26,31	20,12	18,44	37,53	30,17	42,55	32,57
60	16,42	11,48	21,87	18,45	16,35	25,60	27,28	33,60	29,27

Les tableaux 3 et 4 rassemblent les valeurs de dispersions relatives, en pour cent, εk ; $\varepsilon k\eta$ et $\varepsilon \frac{k}{\eta}$ de l'hydrolyse acide de l'acétate de *n*-butyle dans l'eau-acétone et eau-dioxanne, dont les constantes de vitesse ont été publiées dans un article antérieur[3,5].

Tableau 3

Valeurs des dispersions relatives εk ; $\varepsilon k\eta$ et $\varepsilon \frac{k}{\eta}$

	12—49 % g acétone			57—92 % g acétone			12—92 % g acétone		
	I			II			toute la courbe		
t°c	εk	$\varepsilon k\eta$	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$	εk	$\varepsilon k\eta$	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$	εk	$\varepsilon k\eta$	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$
30	18,80	12,40	29,46	34,35	26,00	63,29	49,01	61,12	47,39
40	20,04	15,13	26,14	26,80	16,50	57,57	40,50	52,00	38,80
50	16,50	10,63	23,26	36,36	22,54	60,89	35,16	44,50	39,13
60	13,89	6,75	21,27	21,21	15,91	37,86	29,13	38,05	28,44

Tableau 4

Valeurs des dispersions relatives εk ; εky et $\varepsilon \frac{k}{\eta}$

	15—54 % g dioxanne			65—94 %g dioxanne			15—94 %g dioxanne		
	I			II			toute la courbe		
t°c	εk	εky	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$	εk	$\varepsilon k\eta$	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$	εk	$\varepsilon k\eta$	$\varepsilon \frac{k}{\eta}$
40	19,66	9,13	42,19	14,21	30,93	10,60	40,50	30,93	58,70
50	18,46	9,71	39,07	15,02	25,61	7,50	30,35	26,61	52,22
60	18,25	5,88	19,55	5,08	9,11	1,56	25,39	26,20	34,29

En considérant les résultats rassemblés dans les tableaux 2,3 et 4, on voit que les dispersions relatives εk et $\varepsilon k\eta$, calculées pour l'hydrolyse acide du formiate et de l'acétate de *n*-butyle dans le solvant mixte eau-acétone, ont, pour les deux parties de la courbe des viscosités, des valeurs plus petites que pour l'ensemble de la courbe. Les dispersions relatives pour les deux esters décroissent dans l'ordre $\varepsilon k\eta < \varepsilon k < \varepsilon \frac{k}{\eta}$, toujours pour les deux branches de la courbe des viscosités, alors que pour l'ensemble de la courbe elles se situent dans un ordre tout à fait différent $\varepsilon \frac{k}{\eta} < \varepsilon k < \varepsilon k\eta$.

D'autre part, les dispersions relatives $\varepsilon k\eta$ de l'hydrolyse acide de l'acétate de *n*-butyle dans l'eau-acétone étant plus petites que celles de l'hydrolyse acide du formiate de *n*-butyle, toujours dans le même solvant, dans la partie montante de la courbe des viscosités, on doit supposer que l'influence de la viscosité depend aussi de la structure du

milieu de réaction ; elle ne doit pas être la même pour les solutions des deux esters.

On sait que la présence d'un soluté dans l'eau a souvent pour effet de renforcer les liaisons hydrogène entre les molécules d'eau situées au voisinage du soluté.

En comparant les dispersions relatives trouvées pour l'hydrolyse acide de l'acétate de *n*-butyle dans l'eau-acétone et dans l'eau-dioxanne, on constate que dans ce dernier solvant elles se situent dans l'ordree $\varepsilon k\eta < \varepsilon k < \varepsilon \frac{k}{\eta}$, seulement dans les solutions de la partie montante de la courbe des viscosités, alors que pour la partie descendante et pour l'ensemble de la courbe elles se situent autrement. Les deux solvants se comportent donc différemment dans l'nydrolyse acide de l'acétate de *n*-butyle, toute au moins pour les grandes concentrations du constituant organique du solvant mixte.

On voit que les dispersions relatives $\varepsilon k\eta$ ont des valeurs plus petites que les dispersions relatives εk, sauf dans le système eau-dioxanne, concentré en dioxanne. Il faut donc admettre que, la viscosité du milieu a une grande influence sur la vitesse de reactionn, phénomène déjà observé dans d'autres cas[6].

On remarque aussi que les dispersions relatives $\varepsilon k\eta$, ont, dans le système eau-acétone, des valeurs sensiblement plus élvées que dans les solutions de la partie montante de la courbe des viscosités du système eau-dioxanne ; il faut croîre que dans ce cas la viscosité a une influence plus grande sur la constante de vitesse.

Puisque dans les solutions de la partie descendante de la courbe des viscosités on ne trouve pas la même régularité des résultats, il faut donc admettre que d'autres effets du solvant (facteur électrostatique, solvatation, etc) font diminuer l'influence de la viscosité sur la vitesse de réaction.

Chaire de chimie-physique et electrochimie
Institut Polytehnique„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *E. A. Moelwyn-Hughes*, The Kinetics of Reactions in Solution, Pergamon Press, Oxford (1950), p. *1240*.
2. *A. Olander*, Z. Phys. Chem, *144*, 118, (1929).
3. *G. Costeanu, O. Landauer et C. Mateescu*, Rev. Roumaine chim. 14, *845* (1969).
4. *H. S. Harned et B. B. Owen*, The Physical Chemistry of Electrolitic Solution III-e Ed. (1958), p. 713.
5. *G. Costeanu, O. Landauer et C. Mateescu*, Rev. Roumaine Chim. 13, *155* (1968).
6. *Tatiana Oncescu*, Studii şi cercetări de chimie, 2, *257* (1960).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

C.Z.: 631.86

OBȚINEREA UNUI ÎNGRĂȘĂMÎNT CU MICROELEMENTE ÎN SUSPENSIE

I. GH. CONSTANTINESCU, IRINA CONSTANTINESCU

În condițiile în care creșterea populației are loc într-un ritm foarte rapid, cerințele agroalimentare sporesc și ele neîntrerupt.

Unul din mijloacele de mărire a producției agricole se referă la aplicarea pe scară tot mai largă a îngrășămintelor chimice.

Pentru stabilirea celor mai adecvate forme de administrare și elaborarea de noi tehnologii de fabricație, se desfășoară o largă activitate de cercetare în vederea lămuririi rolului diferitelor elemente nutritive, participante în procesele de importanță vitală pentru organismele vegetale.

Dacă elementelor considerate pînă nu de mult principale: azot, fosfor, potasiu, calciu, magneziu, li s-a acordat importanța cuvenită, sortimentele actuale de îngrășăminte acoperind în general necesitățile agriculturii, altora ca fierul, manganul, zincul, molibdenul, borul, etc, numai în ultimile decenii li s-a dat o atenție sporită. Acestea din urmă denumite și microelemente sînt considerate astăzi, tot atît de importante pentru dezvoltarea, creșterea și *fructificarea* plantelor ca și azotul, fosforul, potasiul.

Actuala împărțire în macro și micro reflectă ponderea în viața și structura plantelor și nici decum importanța relativă a fiecăruia dintre ele [9].

Prin participarea în cadrul unor procese biologice, contribuind la formarea țesuturilor vegetale, microelementele au un rol deosebit în desvoltarea normală a plantelor. Cantități foarte mici din aceste elemente sînt suficiente pentru a produce o desvoltare optimă a plantelor. Dar microelementele au și influențe negative în sensul că administrate în exces, în cantități chiar foarte mici, pot deveni toxice, fapt întîlnit mai rar la macroelemente. Plantele au posibilități multiple de adsorbție selectivă a elementelor nutritive, dar ele nu dispun de un mecanism special pentru preîntîmpinarea excesului [14].

Din multitudinea de elemente nutritive, obiectul studiului de față îl constituie magnanul și zincul.

---

* Manuscris predat redacției la data de 6 decembrie 1971.

Manganul ia parte în procesele oxidative şi respiratorii; contribuie la mărirea rezistenţei la secetă şi frig; influenţează metabolismul hidraţilor de carbon.

Insuficienţa manganului provoacă încetinirea creşterii frunzelor şi contribuie la desvoltarea slabă a sistemului radicular [2].

Zincul participă în procesul de fructificare şi oxido-reducere. Intrînd în compoziţia carbohidrazei intervine în procesele respiratorii; activează fermentul enolaza care participă în metabolismul hidraţilor de carbon; ia parte la diferite procese care contribuie la formarea clorofilei. Lipsa sau insuficienţa zincului influenţează direct procesul de fructificare precum şi procesul de formare a rădăcinilor [4].

Administrarea microelementelor în sol se poate face în diferite forme:

1. *In îngrăşăminte solide* — Într-o primă etapă microelementele erau introduse prin amestecare cu îngrăşămintele solide, fie că era vorba de o simplă amestecare mecanică [10], fie că erau introduse într-una din fazele de obţinerea îngrăşămîntului [8]. În ultimul timp metodele de introducere a microelementelor în îngrăşămintele solide, au fost îmbunătăţite prin practicarea unor acoperiri cu microelemente a granulelor de îngrăşămînt [12]. De asemenea introducerea lor se face ca atare, utilizînd diferiţi compuşi (substanţe simple, complecşi, chelaţi) sau reziduri industriale care conţin aceste microelemente [6]. Astfel pentru administrarea manganului se utilizează sulfat de mangan ($SO_5Mn._4H_2O$), 20—50 kg/ha, zgură de feromangan cu 10% mangan şi nămoluri reziduale din instalaţiile de îmbogăţirea minereurilor cu 14% mangan. Zincul se introduce sub formă de sulfat de zinc ($SO_4Zn-{}_7H_2O$) sau sub forma unui complex organic de tipul polyflavoxidului [5].

2. *In îngrăşăminte fluide.* Dintre acestea s-au folosit cu succes soluţiile lichide, conţinînd uree şi microelemente [1] soluţii de săruri anorganice în diferite concentraşii ($SO_4MNn_7H_2O$ — 0,25%; $SO_4Zn._7H_2O$ — 0,2% pentru vară, 2,5% pentru iarnă). De asemenea s-au folosit agenţi de sechestrare care permit obţinerea unor complecşi nutritivi de tipul polifosfaţilor de amoniu lichizi 10—34—0, cu zinc şi mangan [7].

O grupă aparte este constituită de *îngrăşămintele fluide în suspensie.* Acestea conţin elementele nutritive atît dizolvate cît şi în suspensie. Unele calităţi ale acestor îngrăşăminte le reliefează utilitatea. Aceste îngrăşăminte pot asigura concentraţii mari a principalelor elemente nutritive, concomitent cu posibilitatea de vehiculare şi a microelementelor. La distribuţia lor în sol asigură o repartizare uniformă a elementelor nutritive, evitîndu-se formarea centrilor de nutriţie. Şi din punct de vedere tehnologic, îngrăşămintele în suspensie cu microelemente se remarcă printr-un proces de fabricaţie simplificat în care lipsesc *fazele de evaporare, concentrare* şi *granulare.* Totuşi acestea prezintă şi unele dezavantaje ca: posibilitatea redusă de depozitare, necesitatea de a recircula din cînd în cînd suspensia pentru a se evita sedimentarea, creşterea cristalelor în timpul depozitării, ncesitatea de a se utiliza pompe de noroi antiacide, dificultăţi legate de aplicarea lor în sol.

Ţinînd cont de materiile prime utilizate, îngrăşămintele în suspensie pot clasifica în [13]:

1. *Îngrășăminte pe bază de acid ortofosforic.* 2. *Îngrășăminte pe bază de superfosfat.* 3. *Îngrășăminte pe bază de acid fosforic.* 4. *Îngrășăminte pe bază de uree și azotat de amoniu. Îngrășăminte pe bază de acid azotic și fosfat brut.*

În experimentări s-a urmărit obținerea unor îngrășăminte cu microelemente prin atacul nitric al rocii fosfatice.

Studiul s-a axat pe stabilirea parametrilor optimi în cadrul diferitelor faze ale procesului.

În prima fază de *atac a rocii fosfatice* (fosforită de vietnam cu 34 % P_2O_5) cu acid azotic, pentru un timp de reacție considerat optim de două ore [11], s-a stabilit că randamentul maxim de descompunere se realizează la o temperatură de 60°C, utilizînd un acid azotic de 60% și un raport lichid — solid de 8/1 (fig. 1) [3].

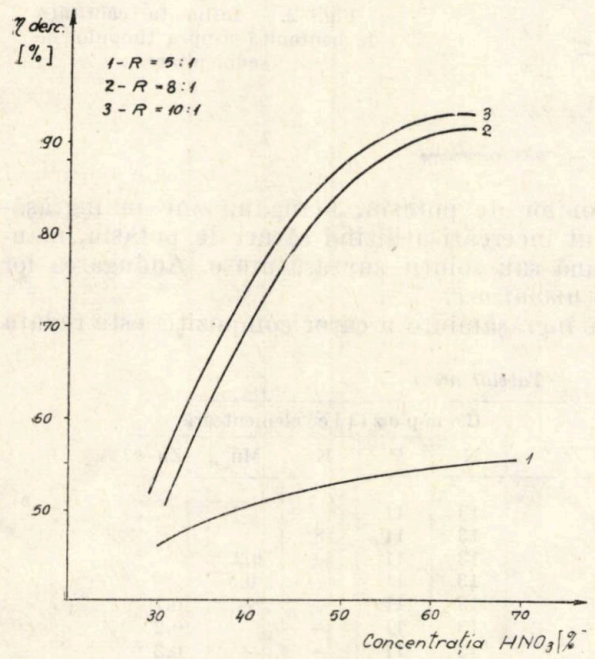


Fig. 1. Variația randamentului de descompunere a rocii fosforice la temperatura de 60°C.

În cea de a doua fază *soluția decantată*, se amonizează pînă la atingerea unui pH de 7—7,5. Această necesitate este impusă pe de o parte de faptul că în majoritatea lor solurile românești sînt slab acide, iar pe de altă parte la un pH mai mare de 8 începe să apară ca produs nedorit fosfatul tricalcic. Pentru preîntîmpinarea formării unor macrocristale, se poate proceda la preamonizarea suspensiei pînă la apariția unui precipitat, după care urmează adăugarea agentului de suspendare și ulterior definitivarea amonizării.

Cea de a treia fază prevede *stabilizarea suspensiei.* Ca agent de suspendare s-a folosit bentonită de Valea Chioarului de compoziție : SiO_2 = 77 %, Al_2O_3 = 14 %, Fe_2O_3 = 1,6 %, CaO = 1,1 %, MgO = 2,4%. Starea de agregare a bentonitei folosită ca material de suspendare pre-

zintă o importanţă deosebită. Astfel adăugarea bentonitei în stare uscată conduce la formarea rapidă a unor macrocristale care îngroaşă suspensia şi în loc să-i asigure suspensivitatea, accelerează depunerea acesteia. Pentru evitarea acestui inconvenient s-a utilizat bentonită tratată în prealabil cu apă în raport de 1 :10 bentonită-apă. În contact cu apa, bentonita se hidratează mărindu-şi considerabil volumul, fapt care contribuie la îmbunătăţirea evidentă a calităţilor de suspendant. Studiindu-se cantitatea de suspendant care trebuie adăugată îngrăşămîntului în suspensie, s-a constatat că un adaus de 3% agent de suspendare, asigură rămînerea în suspensie a îngrăşămîntului peste 6 zile (fig. 2), timp suficient pentru transportul şi distribuire pe sol.

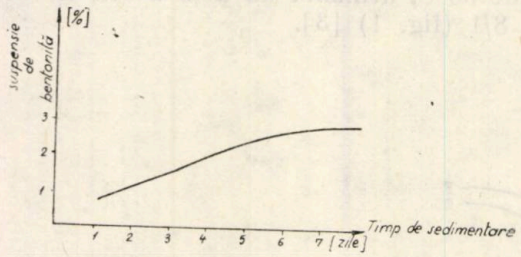


Fig. 2. — Influenţa cantităţii de bentonită asupra timpului de sedimentare

Pentru introducerea ionilor de potasiu, mangan, zinc în îngrăşămîntul în suspensie s-au făcut încercări utilizînd săruri de potasiu, mangan şi zinc în formă cristalină sau soluţii suprasaturate. Adăugarea lor s-a făcut în timpul *fazei de amonizare.*

S-a obţinut o gamă de îngrăşăminte a căror compoziţie este redată în tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 1

Nr. crt.	Tipul îngrăşăintului	Compoziţie elementeară				
		N	P	K	Mn	Zn
1	N :P	13	11			
2	N : P : K	13	11	8		
3	NP : Mn	13	11	—	0,2	
4	N : P : Mn	13	11	—	0,5	
5	N : P : Zn	13	11	—	—	0,1
6	N : P : Zn	13	11	—	—	0,2
7	N : P : Zn	13	11	—	—	0,3
8	N : P : K : Mn	13	11	8	0,2	—
9	N : P : K : Zn	13	11	8	—	0,2
10	N : P : Mn : Zn	13	11	—	0,2	0,2
11	N : P : K : Mn : Zn	13	11	8	0,2	0,2

Concentraţia ionilor de mangan şi zinc în îngrăşămintele în suspensie a fost asigurată în concordanţă cu necesităţile biologice şi agrochimice.

Pentru a putea aprecia stabilitatea acestor suspensii *s-a făcut un studiu al procesului de sedimentare.* Curbele din figurile 3, 4 şi 5 indică vitezele cu care are loc depunerea fazei solide din îngrăşămintele în suspensie, prin delimitarea pentru o înălţime convenţională a zonei de lichid clar, de zona în suspensie.

S-a constatat că introducerea potasiului îmbunătăţeşte în mod substanţial proprietăţile suspensiei de la două zile, timp în care 70%

din faza solidă a îngrășămîntului N.P. se depune, la peste 6 zile la îngrășămîntul N.P.K. (fig. 3).

Aceasta se datorește faptului că cristale fine de clorură de potasiu formează o serie de centri de dispersie, în jurul cărora bentonita formează o rețea strînsă care menține îngrășămîntul, în suspensie, o perioadă de timp mai îndelungată.

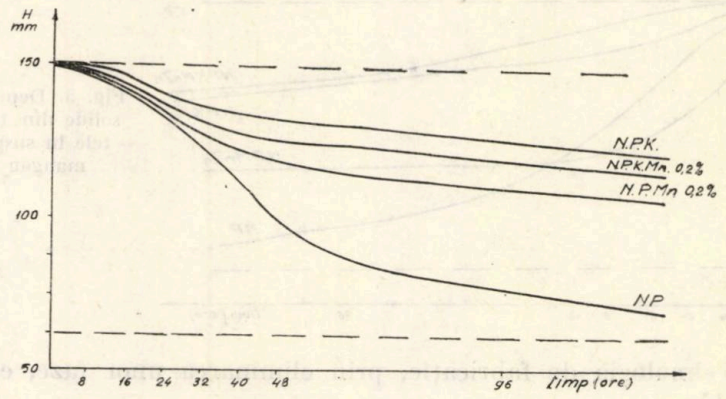


Fig. 3. Depunerea fazei solide din îngrășămintele în suspensie cu mangan

Introducerea manganului în îngrășămîntul în suspensie trebuie să asigure o concentrație a acestuia, cuprinsă între 0,2 —0,5%. Calitățile îngrășămintelor în suspensie nu sînt afectate (fig. 3), deoarece manganul formează un complex de tipul $[Mn(NH_3)_6]^{2+}$ în soluție.

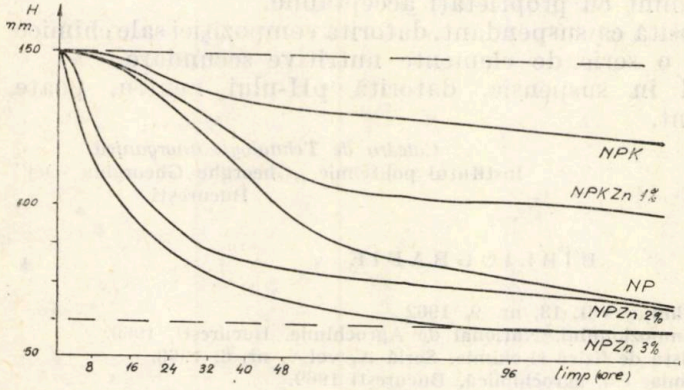


Fig. 4. Depunerea fazei solide din îngrășămintele în suspensie cu zinc

Introducerea zincului în îngrășămîntul în suspensie (concentrația acestuia trebuind să fie de 2—3%) pune însă probleme deosebite. În prezența ionilor de amoniu și a ionului fosfat, la pH-ul existent, zincul formează un complex fosfoamoniacal insolubil, care contribuie la depunerea mai rapidă a suspensiei (fig. 4). Adăugarea în soluție a hexametafosfatului de sodiu, poate îmbunătăți calitățile suspensiei, contribuind la trecerea în soluție a complexului fosfoamoniacal de zinc.

Astfel un îngrăşământ N.P.K. : Mn : Zn are asigurat un timp de sedimentare suficient (fig. 5).

Lucrările experimentale au permis desprinderea unor concluzii şi anume :

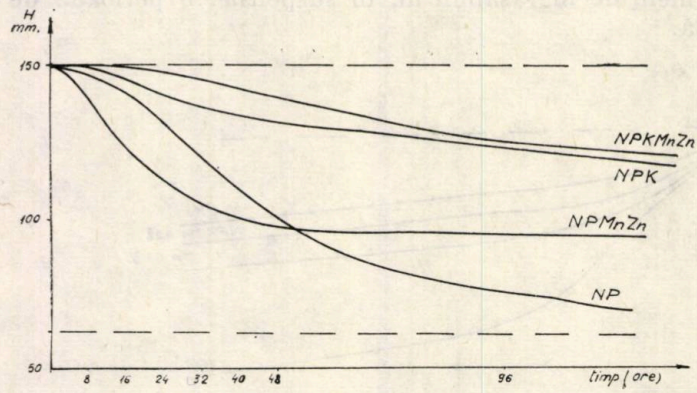


Fig. 5. Depunerea fazei solide din îngrăşămintele în suspensie cu mangan şi zinc

1. Tehnologia de fabricaţie, prin eliminarea unor faze, este mult simplificată.

2. Se pot asigura concentraţii mari ale elementelor nutritive principale, comparabile cu a îngrăşămintelor solide.

3. Potasiul conferă îngrăşământului proprietăţi de a rămîne în suspensie pe o durată mai mare de timp.

4. Zincul nu poate fi încorporat singur într-un îngrăşământ în suspensie, grăbind sedimentarea acestuia.

Incorporat alături de potasiu şi mangan, în prezenţă de metafosfat, se obţine un îngrăşământ cu proprietăţi acceptabile.

5. Bentonita folosită ca suspendant, datorită compoziţiei sale chimice aduce în îngrăşământ o serie de elemente nutritive secundare.

6. Îngrăşământul în suspensie, datorită pH-ului neutru, poate servi şi ca amendament.

Catedra de Tehnologie anorganică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu -Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Benari S.* Revista de Chimie Vol. 13, nr. 9, 1962
2. *Boeriu I.* — Lucrările simpozionului. Naţional de Agrochimie, Bucureşti, 1969.
3. *Constantinescu I.* — Revista de fizică şi chimie, Seria A, vol 6, nr. 6, 1969.
4. *Davidescu D.* — Agrochimia, Ed. agrochimică, Bucureşti 1969.
5. *Elwoo d W.* — Pat. U.S. 3.436. 204, iulie 1969.
6. *Groce W. R.* — Pat. U.S. 6.414, 487, Dec. 1963.
7. *Homer A. S.* — Pat. U.S. 3. 234 004 Febr. 1964
8. *Kohn K. G.* — Pat. U.S. 3.130, 039 April 1964
9. *Nabieu M. N.* — Uzbechist. Kim. zh. 7, nr. 1, 1963
10. *Sawyer E. W.* — Minerals chemicals carp. of Am., nr. 1, 1960.
11. *Slack A.V.* — Pat. U.S. 3. 109. 729 iunie 1968
12. *Thomson H.* — Pat. U.S. 3. 155. 489 noeb. 1964
13. *Tairs P. H.* — : Farm. Chem. 130, nr. 9, 1965
14. *Wilbanks S. A.* — : Agricultural Chemicals 22, nr. 9 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973 Numărul 4

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z.: 620

EXPRESII ALE TENSIUNILOR ȘI DEFORMAȚIILOR DINTR-UN DISC ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE

V. BOGDAN, OLTEA BOGDAN

Stările de eforturi unitare și de deformații pot fi deduse dintr-o funcție potențial Φ care a fost stabilită în lucrarea [2], deplasările radială $-u$ și axială $-w$ obținîndu-se din funcția Φ cu ajutorul expresiilor

$$u = \frac{a}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]$$

$$w = -\frac{a}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] \tag{1}$$

stabilite în lucrarea [1].

Starea plană de deformație se poate obține considerînd că discul are o lungime infinită (fig. 1). In acest caz, condițiile la limită se pot scrie sub forma,

$$w \equiv 0 \tag{2}$$

$$u = u(r) \tag{3}$$

$$r = R_i \Rightarrow \sigma_r = 0 \tag{4}$$

$$r = R_e \Rightarrow \sigma_r = 0 \tag{5}$$

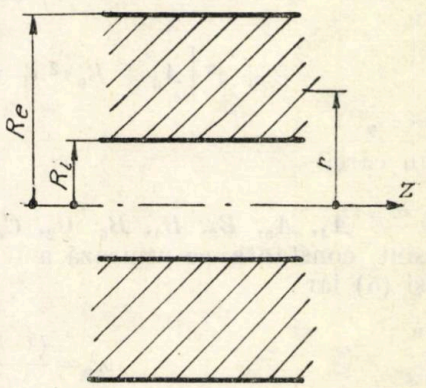


Fig. 1

În funcția potențial Φ stabilită în lucrarea [2], coeficienții cu indici impari au valori diferite de zero pentru discurile care nu au un plan transversal de simetrie a formei și a stărilor de tensiuni și de-

* Manuscris predat redacției la data de 3 decembrie 1971

formații. Pentru cazul analizat acești coeficienți sînt nuli și funcția potențial Φ, va avea expresia:

$$\Phi(r,z) = D_0 r^2 \ln r - \frac{1}{8}(2B_2 - D_2)r^4 - \frac{3}{16}(2A_4 - 3C_4)r^4 +$$

$$+ \frac{K_0}{64} r^4 - \frac{1}{8}(2D_2 + 3C_4) r^4 \ln r + \frac{1}{48}(6B_4 - 5D_4) r^6 +$$

$$+ \frac{5}{48}(6A_6 - 11C_6) r^6 - \frac{K_2}{576} r^6 - \frac{\alpha^2}{576} r^6 + \frac{1}{8}(D_4 + 5C_6) r^6 \ln r -$$

$$- \frac{5}{768}(12\,B_6 - 13\,D_6) r^8 + \frac{K_4}{2048} r^8 - \frac{5}{64} D_6 r^8 \ln r - \frac{K_6}{5120} r^{10} +$$

$$+ z^2 \left[B_2 r^2 + C_2 \ln r + D_2 r^2 \ln r - \frac{3}{4}(2\,B_4 - D_4) r^4 - \frac{45}{16}(2A_6 - 3C_6) r^4 + \right.$$

$$+ \frac{K_2}{64} r^4 - \frac{3}{2}\left(D_4 + \frac{15}{4} C_6\right) r^4 \ln r + \frac{5}{16}(6\,B_6 - 5\,D_6) r^6 - \frac{K_4}{96} r^6 +$$

$$\left. + \frac{15}{8} D_6 r^6 \ln r + \frac{15}{2048} K_6 r^8 \right] + z^4 \left[A_4 + B_4 r^2 + C_4 \ln r + D_4 r^2 \ln r - \right.$$

$$\left. - \frac{15}{8}(2\,B_6 - D_6) r^4 + \frac{K_4}{64} r^4 - \frac{15}{4} D_6 r^4 \ln r - \frac{5}{192} K_4 r^6 \right] +$$

$$+ z^6 \left[A_6 + B_6 r^2 + C_6 \ln r + D_6 r^2 \ln r + \frac{K_6}{64} r^4 \right] \qquad (6)$$

în care,

A_4, A_6, B_2, B_4, B_6, C_2, C_4, C_6, D_0, D_2, D_4, D_6, K_0, K_2, K_4, K_6 sînt constante ce urmează a fi determinate din condițiiele (2), (3), (4) și (5) iar

$$\alpha^2 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)\,Ea} \rho\omega^2 \qquad (7)$$

este o constantă care depinde de caracteristicile materialului (modul de elasticitate E, coeficientul lui Poisson μ și densitatea materialului ρ) și de viteza unghiulară ω. Factorul $1/a$, în care a este o constantă arbitrară, a rezultat odată cu stabilirea expresiilor (1).

Din această funcție potențial și luînd în considerare condițiile (1), se deduc următoarele expresii pentru deplasările u și w și pentru tensiunile σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz}:

$$u = \frac{ar}{1-2\mu}\left\{4\left[(1-2\mu)D_0 + (1-\mu)C_2\right]\frac{1}{r^2} + 8\mu B_2 + 4\mu D_2 - \right.$$

$$- 12(1-2\mu)A_4 + 6(1-2\mu)C_4 + \frac{1}{2}(1-2\mu)K_0 + 8\mu D_2 \ln r -$$

$$- 12(1-2\mu)C_4 \ln r - 6(1+2\mu)B_4 r^2 + \frac{3}{2}(1+2\mu)D_4 r^2 - 90\mu A_6 r^2 +$$

$$+ \frac{225}{2} C_6 r^2 + \frac{1}{4}\mu K_2 r^2 - \frac{1}{4}(1-2\mu)\alpha^2 r^2 - 6(1+2\mu)D_4 r^2 \ln r -$$

$$- 90\mu C_6 r^2 \ln r - \frac{1}{16}(1+2\mu)K_4 r^4 + 15(1+\mu)B_6 r^4 - 10(1+\mu)D_6 r^4 +$$

$$+ 15(1+\mu)D_6 r^4 \ln r + \frac{5}{64}(1+\mu)K_6 r^6 + z^2\left[4(1-2\mu)\frac{D_2}{r^2} + \right. \qquad (8)$$

$$+ 24(1-\mu)\frac{C_4}{r^2} + 48\mu B_4 + 24\mu D_4 + \frac{1}{2}(1-2\mu)K_2 - 180(1-2\mu)A_6 +$$

$$+ 90(1-2\mu)C_6 - 180(1-2\mu)C_6 \ln r + \frac{3}{2}\mu K_4 r^2 + 48\mu D_4 \ln r -$$

$$- 90(1+2\mu)B_6 r^2 + \frac{45}{2}(1+2\mu)D_6 r^2 - 90(1+2\mu)D_6 r^2 \ln r -$$

$$\left. - \frac{15}{16}(1+2\mu)K_6 r^4\right] + z^4\left[4(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2} + 60(1-\mu)\frac{C_6}{r^2} + 120\mu B_6 + \right.$$

$$+ 60\mu D_6 + \frac{1}{2}(1-2\mu)K_4 + 120\mu D_6 \ln r + \frac{15}{4}\mu K_6 r^2\Big] +$$

$$\left. + z^6\left[4(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2} + \frac{1}{2}(1-2\mu)K_6\right]\right\}$$

$$w = -\frac{az}{1-2\mu}\left\{8B_2 + 8D_2 \ln r - 48B_4 r^2 - 180A_6 r^2 + 180C_6 r^2 + 8D_2 + \right.$$

$$+\frac{1}{2}K_2 r^2 - 48\,D_4 r^2 \ln r - 180\,C_6 r^2 \ln r + 135\,B_6 r^4 - \frac{135}{2}D_6 r^4 -$$

$$-\frac{3}{4}K_4 r^4 + 135\,D_6 r^4 \ln r + \frac{15}{16}K_6 r^6 + z^2\Big[16\,B_4 + 16\,D_4 \ln r +$$

$$+ 16\,D_4 - 240\,B_6 r^2 + K_4 r^2 - 240\,D_6 r^2 \ln r - \frac{15}{4}K_6 r^4\Big] + \qquad (9)$$

$$+ z^4\Big[24\,B_6 + 24\,D_6 + 24\,D_6 \ln r + \frac{3}{2}K_6 r^2\Big]\Big\}$$

$$\sigma_r = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Big\{\frac{1}{2}K_0 + 4\mu D_2 - 12A_4 - 6(1-2\mu)C_4 -$$

$$-4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} - 4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} - 12\,C_4 \ln r - 6(3+2\mu)B_4 r^2 -$$

$$-\frac{3}{2}(1+2\mu)D_4 r^2 - 90\mu A_6 r^2 + \frac{135}{2}\mu C_6 r^2 + \frac{1}{4}\mu K_2 r^2 -$$

$$-\frac{1}{4}(3-2\mu)\alpha^2 r^2 - 6(3+2\mu)D_4 r^2 \ln r - 90\,\mu\,C_6 r^2 \ln r +$$

$$+ 15(5+2\mu)B_6 r^4 - \frac{5}{2}(14+5\mu)D_6 r^4 - \frac{1}{16}(5+4\mu)K_4 r^4 +$$

$$+ 15(5+2\mu)D_6 r^4 \ln r + \frac{5}{64}(7+3\mu)K_6 r^6 + z^2\Big[\frac{1}{2}K_2 + 24\,\mu\,D_4 -$$

$$-180\,A_6 - 90(1-2\mu)C_6 - 4(1-2\mu)\frac{D_2}{r^2} - 24(1-\mu)\frac{C_4}{r^2} -$$

$$-180\,C_6 \ln r - 90(3+2\mu)B_6 r^2 - \frac{45}{2}(1+2\mu)D_6 r^2 + \frac{3}{2}\mu K_4 r^2 -$$

$$-90(3+2\mu)D_6 r^2 \ln r - \frac{15}{16}(5+4\mu)K_6 r^4\Big] + z^4\Big[\frac{1}{2}K_4 + 60\mu D_6 -$$

$$-4(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2} - 60(1-\mu)\frac{C_6}{r^2} + \frac{15}{4}\mu K_6 r^2\Big] +$$

$$+ z^6\Big[\frac{1}{2}K_6 - 4(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2}\Big]\Big\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\frac{1}{2}K_0 - 4\mu D_2 - 12A_4 + 6(1-2\mu)C_4 + \right.$$

$$+ 4(1-2\mu)\frac{D_0}{r^2} + 4(1-\mu)\frac{C_2}{r^2} - 12C_4 \ln r - 6(1-2\mu)B_4 r^2 +$$

$$+ \frac{3}{2}(1+2\mu)D_4 r^2 + 90\mu A_6 r^2 - \frac{135}{2}\mu C_6 r^2 - \frac{1}{4}\mu K_2 r^2 -$$

$$- \frac{1}{4}(1+2\mu)\alpha^2 r^2 - 6(1-2\mu)D_4 r^2 \ln r + 90\mu C_6 r^2 \ln r + \qquad (11)$$

$$+ 15(1-2\mu)B_6 r^4 - \frac{5}{2}(4-5\mu)D_6 r^4 - \frac{1}{16}(1-4\mu)K_4 r^4 +$$

$$+ 15(1-2\mu)D_6 r^4 \ln r + \frac{5}{64}(1-3\mu)K_6 r^6 + z^2\left[\frac{1}{2}K_2 - 24\mu D_4 - \right.$$

$$- 180A_6 + 90(1-2\mu)C_6 + 4(1-2\mu)\frac{D_2}{r^2} + 24(1-\mu)\frac{C_4}{r^2} -$$

$$- 180C_6 \ln r - 90(1-2\mu)B_6 r^2 + \frac{45}{2}(1+2\mu)D_6 r^2 - \frac{3}{2}\mu K_4 r^2 -$$

$$\left. - 90(1-2\mu)D_6 r^2 \ln r - \frac{15}{16}(1-4\mu)K_6 r^4\right] + z^4\left[\frac{1}{2}K_4 - 60\mu D_6 + \right.$$

$$+ 4(1-2\mu)\frac{D_4}{r^2} + 60(1-\mu)\frac{C_6}{r^2} - \frac{15}{4}\mu K_6 r^2\Big] +$$

$$\left. + z^6\left[\frac{1}{2}K_6 + 4(1-2\mu)\frac{D_6}{r^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_z = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{ - 8(1+\mu)B_2 - 8(1+\mu)D_2 - 24\mu A_4 + \mu K_0 - \right.$$

$$- 8(1+\mu)D_2 \ln r + 24(2+\mu)B_4 r^2 - 24\mu C_4 \ln r + 180(1+\mu)A_6 r^2 -$$

$$- 180(1+\mu)C_6 r^2 - \frac{1}{2}(1+\mu)K_2 r^2 - \mu\alpha^2 r^2 + 24(2+\mu)D_4 r^2 \ln r +$$

$$+ 180(1+\mu)C_6 r^2 \ln r - 45(3+\mu)B_6 r^4 + \frac{45}{2}(3+\mu)D_6 r^4 + \qquad (12)$$

$$+ \frac{3}{8}(2+\mu)K_4 r^4 - 45(3+\mu)D_6 r^4 \ln r - \frac{5}{16}(3+\mu)K_6 r^6 +$$

$$+ z^2 \left[- 48(1+\mu)(B_4 + D_4 + D_4 \ln r) + 360(2+\mu)(B_6 + D_6 \ln r) r^2 - \right.$$

$$\left. - 360\,\mu(A_6 + C_6 \ln r) + \mu K_2 - 3(1+\mu) K_4 r^2 + \frac{45}{8}(2+\mu) K_6 r^4 \right] +$$

$$+ z^4 \left[- 120(1+\mu)(B_6 + D_6 + D_6 \ln r) + \mu K_4 - \right.$$

$$\left. - \frac{15}{2}(1+\mu) K_6 r^2 \right] + \mu K_6 z^6 \Bigg\}$$

$$\tau_{rz} = \frac{Ea\,r\,z}{(1+\mu)(1-2\mu)} \Bigg\{ - 8\mu \frac{D_2}{r^2} + 24(1-\mu)\frac{C_4}{r^2} + 48(1+\mu) B_4 +$$

$$24(1+\mu) D_4 + 360\,\mu A_6 + 360\,\mu C_6 \ln r - 180\,\mu C_6 - \mu K_2 +$$

$$+ 48(1+\mu) D_4 \ln r - 180(2+\mu)(B_6 + D_6 \ln r) r^2 + 45(2+\mu) D_6 r^2 +$$

$$+ \frac{3}{2}(1+\mu) K_4 r^2 - \frac{15}{8}(2+\mu) K_6 r^4 + z^2 \left[- 16\,\mu \frac{D_4}{r^2} + \right. \qquad (13)$$

$$+ 120(1-\mu)\frac{C_6}{r^2} + 120(1+\mu)(2B_6 + D_6) - 2\mu K_4 + 240(1+\mu) D_6 \ln r +$$

$$\left. + \frac{15}{2}(1+\mu) K_6 r^2 \right] + z^4 \left[- 24\,\mu \frac{D_6}{r^2} - 3\mu K_6 \right] \Bigg\}$$

Dacă se pune condiţia (2) în relaţia (9), se obţin următoarele relaţii :

— din condiţia ca factorul termenului z^5 să fie identic nul se obţin pe rînd condiţiile :

$$K_6 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^2 \text{ să fie nul)} \qquad (14)$$

$$D_6 = 0 \text{ (coeficientul termenului } \ln r \text{ să fie nul)} \qquad (15)$$

$$B_6 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^0 \text{ să fie nul)} \qquad (16)$$

— din condiţia ca factorul termenului z^3 să fie identic nul se obţin condiţiile :

$$K_4 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^2 \text{ să fie nul)} \qquad (17)$$

$$D_4 = 0 \text{ (coeficientul termenului } \ln r \text{ să fie nul)} \qquad (18)$$

$$B_4 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^0 \text{ să fie nul)} \qquad (19)$$

— din condiţia ca factorul termenului z^1 să fie identic nul se obţin condiţiile,

$$C_6 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^2 \ln r \text{ să fie nul)} \qquad (20)$$

$$\frac{1}{2} K_2 - 180\, A_6 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^2 \text{ să fie nul)} \qquad (21)$$

$$D_2 = 0 \text{ (coeficientul termenului } \ln r \text{ să fie nul)} \quad (22)$$

$$B_2 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^0 \text{ să fie nul)} \quad (23)$$

Dacă se introduce condiţia (3) în relaţia (8) se obţin condiţiile:

$$C_4 = 0 \text{ (coeficientul termenului } r^2 z^2 \text{ să fie nul)} \quad (24)$$

Introducînd condiţiile (14), (15),....,(25) în expresiile deplasărilor şi tensiunilor relaţiile (8), (9),....,(13) capătă forma,

$$u = \frac{ar}{1-2\mu}\left\{4\left[(1-2\mu)D_0 + (1-\mu)C_2\right]\frac{1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1-2\mu)(K_0 - 24A_4) - \frac{1}{4}(1-2\mu)\alpha^2 r^2\right\} \quad (25)$$

$$w = 0 \quad (26)$$

$$\sigma_r = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{-4\left[(1-2\mu)D_0 + (1-\mu)C_2\right]\frac{1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(K_0 - 24A_4) - \frac{1}{4}(3-2\mu)\alpha^2 r^2\right\} \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{4\left[(1-2\mu)D_0 + (1-\mu)C_2\right]\frac{1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(K_0 - 24A_4) - \frac{1}{4}(1-2\mu)\alpha^2 r^2\right\} \quad (28)$$

$$\sigma_z = \frac{Ea}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\mu(K_0 - 24A_4) - \mu\alpha^2 r^2\right\} \quad (29)$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (30)$$

Este necesar acum să se introducă condiţiile (4) şi (5) în relaţia (9) din care rezultă sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} &-4\left[(1-2\mu)D_0 + (1-\mu)C_2\right]\frac{1}{R_e^2} + \frac{1}{2}(K_0 - 24A_4) - \\ &-\frac{1}{4}(3-2\mu)\alpha^2 R_e^2 = 0 \\ &-4\left[(1-2\mu)D_0 + (1-\mu)C_2\right]\frac{1}{R_i^2} + \frac{1}{2}(K_0 - 24A_4) - \\ &-\frac{1}{4}(3-2\mu)\alpha^2 R_i^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ale cărui rădăcini sînt,

$$\left.\begin{aligned} K_0 - 24 A_4 &= \frac{1}{2}(3-2\mu)\,\alpha^2 (R_e^2 + R_i^2) \\ 4\,[(1-2\mu) D_0 + (1-\mu) C_2] &= \frac{1}{4}(3-2\mu)\alpha^2 R_e^2 R_i^2 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Înlocuind aceste rădăcini în expresiile (25), (26),..., (30) şi punînd în locul termenului α^2 valoarea din relaţia (7) se obţin următoarele expresii ale tensiunilor şi deplasărilor,

$$u = \frac{(1+\mu)(3-2\mu)\,\rho\,\omega^2}{8(1-\mu)E}\left[\frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} + (1-2\mu)(R_i^2 + R_e^2) - \frac{1-2\mu}{3-2\mu} r^2\right] r \tag{33}$$

$$w = 0 \tag{34}$$

$$\sigma_r = \frac{3-2\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\rho\omega^2}{8}\left[-\frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} + R_e^2 + R_i^2 - r^2\right] \tag{35}$$

$$\sigma_\theta = \frac{3-2\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\rho\omega^2}{8}\left[\frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} + R_e^2 + R_i^2 - \frac{1-2\mu}{3-2\mu} r^2\right] \tag{36}$$

$$\sigma_z = \frac{3-2\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\rho\omega^2}{8}\cdot 2\mu\left[R_e^2 + R_i^2 - \frac{2}{3-2\mu} r^2\right] \tag{37}$$

Aceste relaţii au fost deduse şi pe altă cale în lucrările [3] sau [5] şi obţinerea lor din funcţia potenţial Φ exprimată prin relaţia (6) constituie o verificare a valabilităţii funcţiei Φ determinată în lucrarea [2].

Catedra de rezistenţa materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Bogdan*, Asupra stărilor de eforturi unitare şi deformaţii dintr-un disc axial simetric în mişcare de rotaţie, Studii şi cercet. mec. apl. 30.4, Bucureşti (1971)
2. *V. Bogdan*, Tensiuni şi deformaţii într-un disc în mişcare de rotaţie, Studii şi cerc. mec. apl. Bucureşti 3—32—1973
3. *V. Bogdan*, Eforturi unitare şi deformaţii într-un disc în mişcare de rotaţie, Bul. Instit. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, XXX, 2, 1968
4. *S. Timoshenko, J. N. Goodier*, Théorie de l'elasticité, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1961
5. *V. G. Rekaci*, Rukovodstvo k reşeniiu zadaci po teorii uprugosti, Izdatelstvo „Vîşşaia şcola", Moskva, 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

MECANICĂ

C.Z.: 533

ECUAȚIILE MIȘCĂRII RELATIVE DE APROPIERE ȘI ÎNTÎLNIRE ORBITALĂ ȚINÎND SEAMA DE NESFERICITATEA PLANETEI

AL. MARINESCU, ȘT. STAICU, FRANCINE ATANASIU

1. Introducere

Problema apropierii și întîlnirii vehiculelor spațiale pe orbite, deosebit de actuală și importantă face obiectul a numeroase cercetări.

Calculele obișnuite ale manevrei de apropiere și întîlnire, dar mai ales problemele de optimizare a manevrelor de întîlnire apelează la ecuațiile mișcării relative dintre vehiculul urmăritor (de regulă prevăzut cu instalație de propulsie) și vehiculul urmărit. Vehiculul urmărit prevăzut sau nu cu instalație de propulsie se mișcă pe orbită în jurul planetei avînd rigid legat de el un sistem de axe numit orbital față de care trebuie stabilite ecuațiile mișcării relative ale urmăritorului.

Vom căuta să stabilim aceste ecuații de mișcare față de un sistem orbital ținînd seama de perturbația introdusă de nesfericitatea planetei și apoi să analizăm cazurile particulare care survin mai des în aplicații.

Perturbațiile care influențează mișcarea vehiculelor spațiale sunt numeroase dar din fericire nu în toate cazurile ele au o acțiune concomitentă.

Pentru evoluții în imediata apropiere a planetelor dar în afara atmosferei acestora (dacă au) perturbațiile datorită rezistenței aerodinamice, atracției altor planete și altele, devin extrem de mici astfel că pot fi neglijate.

Nu același lucru se poate afirma însă despre perturbația datorită distrosiunii cîmpului atractiv provocată de nesfericitatea planetei.

Această perturbație trebuie privită ca cea mai importantă pentru manevrele orbitale din apropierea planetelor. De aceea în lucrarea de față vom căuta să stabilim ecuațiile generale ale mișcării relative a vehiculelor spațiale în procesul de apropiere și întîlnire pe orbite ținînd seama de nesfericitatea planetei.

Obișnuit cînd se vorbește de efectul nesfericității se înțelege atît efectul turtirii cît și al distribuției neomogene a masei în interiorul planetei. În ipoteza că planeta este asimilată cu un sferoid turtit (elipsoid de revoluție) cum este cazul Pămîntului, se admite la orice longitudine că în puncte simetrice față de planul ecuatorial, densitatea este una și aceeași.

* Manuscris predat redacției la data de 3 noiembrie 1971

Factorul perturbator dominant în acest caz este turtirea şi de aceea în literatură deseori noţiunea de nesfericitate şi turtire capătă una şi aceiaşi semnificaţie.

În sistemul solar aflat în atenţia zborurilor spaţiale actuale şi de viitor, se ştie că toate planetele cu excepţia lui Venus şi Mercur, au o turtire bine determinată controlabilă prin măsurători şi mult mai accentuată ca a Pământului.

Înainte de a trece la stabilirea propriu zisă a ecuaţiilor de mişcare vom face unele consideraţii privind mai întîi potenţialul cîmpului gravitaţional al planetei perfect sferice şi apoi turtite, cu ajutorul căruia vom deduce apoi componentele acceleraţiei gravitaţiei perturbate.

2. Notaţii

$OXZY$	— sistem de axe de coordonate inerţiale, planetocentric
A_{xyz}	— sistem de axe de coordonate legat de vehiculul urmărit (ţinta)
x,z,y	— coordonate ale vehiculului urmăritor în sistemul A_{xzy}
$r_0(t)$	— raza vectoare a ţintei
r_{0p}	— raza vectoare la perigeu
p	— parametrul focal al orbitei ţintei
μ	— parametrul gravitaţional
Φ	— latitudinea
λ	— longitudinea
$\varphi(t)$	— anomalia adevărată a ţintei
t	— timpul
v_x,v_z,v_y	— componente ale vitezei relative a vehiculului urmăritor în sistemul A_{xzy}
$a_x,a_z,a_y,$	— componente ale acceleraţiei datorită tracţiunii în sistemul A_{xzy}
g_x,g_y,g_z	— componente ale acceleraţiei gravitaţiei în sistemul A_{xzy}.
U	— potenţialul gravitaţional
ΔU	— perturbaţia potenţialului introdusă de nesfericitatea planetei
f	— constantă gravitaţională
M	— masa planetei
m	— masa vehiculului spaţial

3. Consideraţii asupra potenţialului gravitaţional

Acceleraţia gravitaţiei

Să considerăm două corpuri C_1 şi C_2 care pot fi o planetă şi un satelit al său sau o planetă şi un vehicul spaţial de mase M şi m concentrate în punctele O şi B, (fig. 1).

Pentru simplificare să admitem că punctul material O în care se presupune concentrată masa M se află în origina sistemului inerţial XZY, care poate fi privit în general ca sistem planetocentric.

Punctul B în care se presupune concentrată masa m își are poziția definită de vectorul $\vec{r}$. Forța cu care punctul material O atrage punctul material B are conform legii gravitației mărimea:

$$G = f\frac{Mm}{r^2} \qquad (1)$$

și deoarece vectorul său are sensul invers vectorului $\vec{r}$ vom scrie:

$$\vec{G} = f\frac{Mm}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad (2)$$

sau, deoarece parametrul gravitațional $\mu = fM$:

$$\vec{G} = -\frac{\mu m}{r^3}\vec{r} \qquad (3)$$

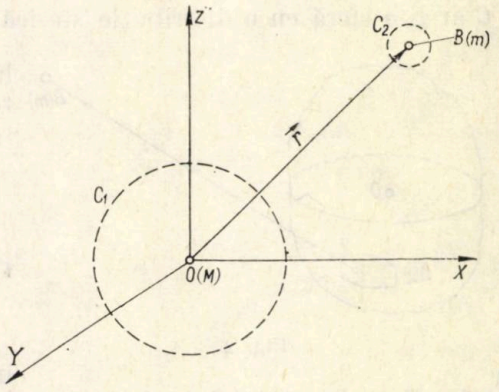


Fig. 1

de unde accelerația gravitației:

$$\vec{g} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}. \qquad (4)$$

Forța atractivă (gravitațională) $\vec{G}$ depinde de poziția punctului B în spațiu. Corespunzător tuturor pozițiilor punctului B, forțele gravitaționale respective alcătuiesc un cîmp numit cîmp central Newtonian. Acest cîmp derivă dintr-un potențial U, astfel că:

$$\vec{G} = m \text{ grad } U \qquad (5)$$

și corespunzător accelerația gravitației:

$$\vec{g} = \text{grad } U. \qquad (6)$$

Din expresiile (3) și (5) se poate remarca ușor că în cazul corpului atractiv a cărei masă este concentrată într-un punct material, potențialul este de forma:

$$U = \frac{\mu}{r}. \qquad (7)$$

Să stabilim acum potențialul U pentru corpul atractiv sferic și turtit.

Fie un corp C de volum Q și de masă M precum și punctul material B de masă m, (fig. 2). Corpul C atrage evident punctul material B

cu o forță $\vec{G}$. Dacă întreaga masă a corpului C ar fi concentrată în centrul său de greutate O, atunci ar rezulta o altă forță de atracție $\vec{G}_1$ diferită de $\vec{G}$.

Ele coincid după cum se va vedea numai în cazul cînd corpul C ar fi o sferă cu o distribuție sferică a densității.

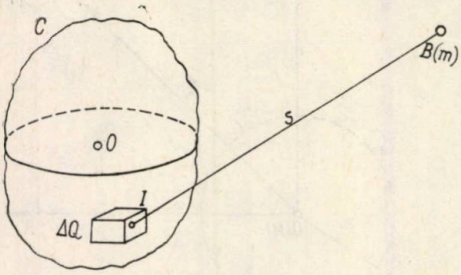


Fig. 2

Notînd cu ΔM masa volumului elementar ΔQ, (fig. 2), densitatea în punctul I se definește prin relația

$$\rho(I) = \lim_{\Delta Q \to e} \frac{\Delta M}{\Delta Q}. \tag{8}$$

Cum

$$\Delta M = \rho \Delta Q, \tag{9}$$

însemnînd cu s distanța între punctele B și I potențialul elementar datorită volumului ΔQ se scrie

$$\Delta U = f \frac{\rho \Delta Q}{s} \tag{10}$$

astfel că pentru întreg corpul

$$U = f \iiint_Q \frac{\rho dQ}{s}. \tag{11}$$

Să considerăm mai întîi cazul corpului sferic cu distribuție sferică a densității, prin distribuție sferică a densității înțelegînd că în toate punctele egal depărtate de centru densitățile sînt egale. Fie, R — raza sferei, M — masa sa și $\rho(\zeta)$ — densitatea într-un punct I de coordonate sferice ζ, λ, Φ situat în interiorul sferei, (fig. 3).

Pornind de la acest punct volumul elementar cuprins între sferele de raze ζ și $\zeta + d\zeta$ și planele meridiane definite de unghiurile $\lambda + d\lambda$ față de axa Y, fig. 3, se poate exprima sub forma

$$dQ = \zeta^2 \cos \Phi \, d\zeta \, d\Phi \, d\lambda \tag{12}$$

masa acestui volum elementar fiind :

$$dM = \rho(\zeta) dQ = \rho(\zeta) \zeta^2 \cos \Phi \, d\zeta \, d\Phi \, d\lambda. \tag{13}$$

Să presupunem fără a micșora generalitatea că punctul material B atras de corpul sferic se află chiar pe axa Z. Distanța sa față de punctul I se exprimă prin relația (vezi fig. 4)

$$s = \sqrt{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \sin\Phi}, \tag{14}$$

astfel că potențialul întregii sfere în punctul B se poate scrie ținînd seama de (11):

$$U=f\iiint_{Q}\frac{\rho(\zeta)\zeta^2\cos\Phi\,d\zeta\,d\Phi\,d\lambda}{s} \tag{15}$$

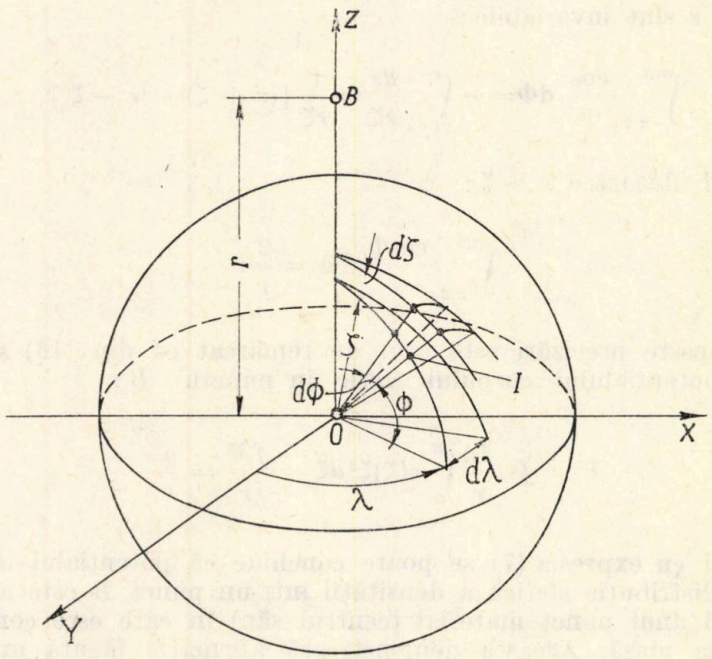


Fig. 3

sau încă

$$U=f\int_0^R\rho(\zeta)\zeta^2d\zeta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\Phi}{s}d\Phi\int_{-\pi}^{\pi}d\lambda. \tag{16}$$

Pentru efectuarea integralei (16) trebuie observat mai întîi că ținînd seama de (13), masa întregii sfere este

$$M=\iiint_{Q}\rho(\zeta)\zeta^2\cos\Phi\,d\zeta\,d\Phi\,d\lambda=$$

$$=\int_0^R\rho(\zeta)\zeta^2d\zeta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\Phi\,d\Phi\int_{-\pi}^{\pi}d\lambda=$$

$$=4\pi\int_0^R\rho(\zeta)\zeta^2d\zeta.$$

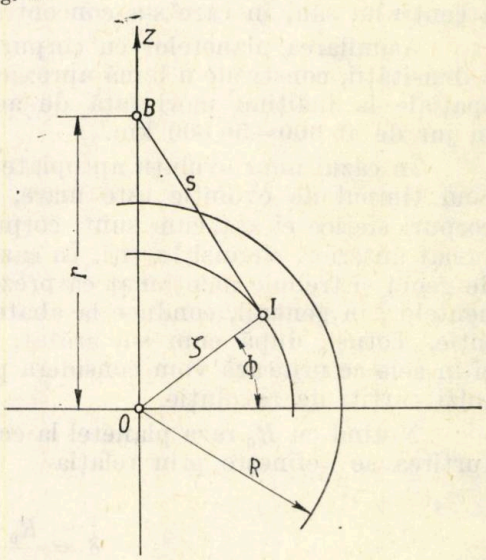


Fig. 4

Apoi din (14) ridicînd la pătrat şi diferenţiind se obţine:

$$\frac{\cos\Phi\, d\Phi}{s} = -\frac{ds}{r\zeta}. \tag{18}$$

Cum ζ şi r sînt invariabile:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos}{\Phi}\, d\Phi = -\int_{r+\zeta}^{r-\zeta} \frac{ds}{r\zeta} = \frac{1}{r\zeta}\left[(r+\zeta) - |r-\zeta|\right] \tag{19}$$

şi, în final, deoarece $r > \zeta$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\Phi}{s}\, d\Phi = \frac{2}{r}, \tag{20}$$

Cu aceste precizări este uşor de remarcat că din (16) se obţine expresia potenţialului corpului sferic în punctul B:

$$U = f \cdot \frac{4\pi}{r}\int_0^R \rho(\zeta)\zeta^2 d\zeta = \frac{fM}{r} = \frac{\mu}{r}. \tag{7'}$$

Comparînd cu expresia (7) se poate conchide că potenţialul unui corp sferic cu distribuţie sferică a densităţii într-un punct B este acelaşi cu potenţialul unui punct material (centrul său) în care este concentrată întreaga sa masă. Aceasta demonstrează afirmaţia făcută anterior şi anume că forţa de atracţie a corpului sferic este identică cu forţa de atracţie a centrului său, în care s-a concentrat întreaga masă a corpului.

Asimilarea planetelor cu corpuri sferice avînd o distribuţie sferică a densităţii, constituie o bună aproximaţie pentru evoluţii ale vehiculelor spaţiale la înălţimi mari faţă de acestea, de exemplu pentru Pămînt, în jur de 40 000—50 000 km.

În cazul unor evoluţii apropiate de suprafaţa planetelor şi mai ales cînd timpul de evoluţie este mare, acestea nu mai pot fi considerate corpuri sferice ci aşa cum sunt, corpuri turtite sau după cum am menţionat anterior, sferoizi turtiţi. În cazul Pămîntului se foloseşte termenul de geoid şi trebuie menţionat că prezenţa oceanelor şi a reliefului continentelor, în general, conduce la abateri faţă de sferoidul turtit de revoluţie. Totuşi, după cum s-a arătat, turtirea rămîne factorul dominant şi în cele ce urmează vom considera planetele (inclusiv Pămîntul) ca sferoizi turtiţi de revoluţie.

Notînd cu R_0 raza planetei la ecuator şi cu R raza acesteia la poli turtirea se defineşte prin relaţia

$$\delta = \frac{R_0 - R_p}{R_0} \tag{21}$$

Ca valori uzuale menționăm pentru Pămînt $\delta = \frac{1}{300}$, pentru Marte $\delta = \frac{1}{150}$, pentru Jupiter $\delta = \frac{1}{60}$, de unde se vede că Pămîntul este mai puțin turtit.

Turtirea planetelor se traduce printr-o distorsiune a cîmpului gravitațional central, astfel încît vectorul forței gravitaționale, respectiv al accelerației gravitației nu se mai află pe o direcție, trecînd prin centrul planetei, ci pe o direcție deviată, fig. 5.

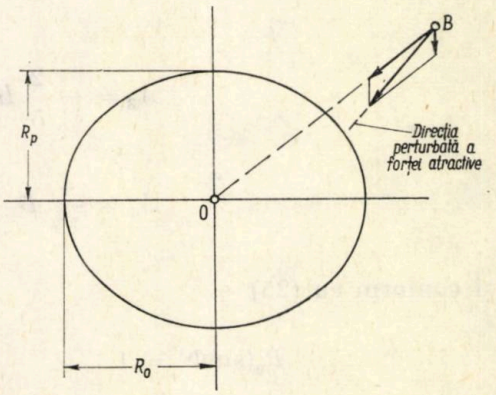


Fig. 5

Potențialul gravitațional va fi definit atunci de relația

$$U = \frac{\mu}{r}(1 + \Delta U) \qquad (22)$$

ΔU fiind potențialul perturbator datorită turtirii.

Cu suficientă exactitate pentru cerințele practicii, considerînd planeta ca un sferoid turtit, potențialul gravitațional se poate lua sub forma

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n P_n(\sin\Phi)}{Mr^n} \qquad (23)$$

unde coeficienții A_n depinzînd de distribuția internă a masei au expresia

$$A_n = \int_0^n \varsigma^n P_n(\sin\Phi)\, dM, \qquad (24)$$

ς fiind distanța de la centrul planetei la un element de masă dM al acesteia, iar $P_n(\sin\Phi)$ polinoame Legendre, care notînd $\sin\Phi = q$ se pot pune mai simplu sub forma

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dq^n}(q^2 - 1)^n \cdot \qquad (25)$$

Cu aceste precizări, potențialul (123) se scrie

$$U = \frac{\mu}{r}\left[\frac{A_0}{M} P_0(\sin\Phi) + \frac{A_1}{M \cdot r} P_1(\sin\Phi) + \frac{A_2}{M \cdot r^2} P_2(\sin\Phi) + \right.$$
$$\left. + \frac{A_3}{M \cdot r^3} P_3(\sin\Phi) + \frac{A_4}{M \cdot r^4} P_4(\sin\Phi) + \ldots\right] \qquad (26)$$

unde, folosind sistemul de referinţă planetocentric

$$A_0 = M$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = -Mr^2 \cdot \frac{2}{3} J \frac{R_0}{r}$$

$$A_3 = -\frac{2}{5} H \frac{R_0^3}{r^3}$$

$$A_4 = \frac{4}{15} D \frac{R_0^4}{r^4} \cong D \frac{R_0^4}{r^4}$$

şi conform cu (25)

$$P_0(\sin\Phi) = 1$$

$$P_1(\sin\Phi) = \sin\Phi$$

$$P_2(\sin\Phi) = \frac{1}{2}(3\sin\Phi - 1)$$

$$P_3(\sin\Phi) = \frac{1}{2}(5\sin^2\Phi - 3\sin\Phi)$$

$$P_4(\sin\Phi) = \frac{1}{8}(3 - 30\sin^2\Phi + 35\sin\Phi).$$

Pentru Pămînt pe baza determinărilor cu Vanguard 1 se poate lua

$$J = (1623{,}4 \pm 4).10^{-6}$$

$$H = (6{,}04 \pm 0{,}73).10^{-6}$$

$$D = (6{,}37 \pm 0{,}23).10^{-6}.$$

În ce privesc armonicele de ordin mai mare ca patru din dezvoltarea (26) acestea n-au fost determinate cu suficientă precizie, dar oricum este ştiut că sînt foarte mici şi ca atare nu sînt luate în consideraţie.

Neglijînd de asemenea, armonica a treia din motive de simetrie față de planul ecuatorial, neglijare frecvent utilizată pentru Pămînt, vom putea scrie în final potențialul gravitațional sub forma

$$U = \frac{\mu}{\gamma}\left[1 + \frac{J}{3}\cdot\frac{R_0^2}{r^2}(1-3\sin^2\Phi) + \frac{D}{36}\cdot\frac{R_0^4}{r^4}(3-30\sin^2\Phi+35\sin^4\Phi)\right] \quad (27)$$

sau notînd cu

$$\frac{J}{3}R_0^2 = J_2$$

$$\frac{D}{16}R_0^4 = J_4,$$

obținem în final

$$U = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{J_2}{r^2}(1-3\sin^2\Phi) + \frac{J_4}{r^4}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\right] \quad (28)$$

4. Ecuațiile mișcării relative

Fie sistemul fix de axe $OXZY$ deobicei considerat ca sistem planetocentric și sistemul de axe mobil O_{xyz}, care efectuează o mișcare cunoscută față de sistemul fix, fig. 6. În origina O' a sistemului mobil se află vehiculul urmărit (ținta).

Aparatul cosmic de masă M este prevăzut cu instalație de propulsie (aparatul urmăritor) și este definit ca poziție față de sistemul mobil prin vectorul $\vec{r}(_{x,y,z})$, iar față de sistemul fix prin vectorul $\vec{r}(X,Z,Y)$, vectorul de poziție al originii sistemului mobil O' fiind $\vec{r}_0(X_0,Z_0,Y_0)$.

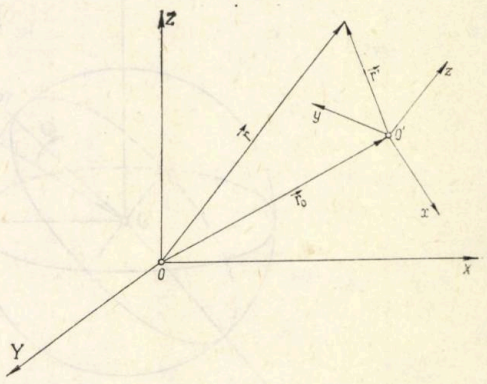


Fig. 6

Viteza absolută a vehiculului urmăritor este definită de

$$\vec{V}_{abs} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \frac{\partial\vec{r}'}{\partial t}, \quad (29)$$

unde $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară a sistemului mobil, iar $\frac{\partial\vec{r}'}{\partial t}$ —viteza relativă a aparatului, semnul derivatei parțiale fiind utilizat spre a marca derivata în sistemul mobil (derivata locală).

Accelerația absolută va fi:

$$\vec{a}_{abs} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}'}{\partial t}\right). \quad (30)$$

Deoarece :

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r'}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r'} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r'} + \vec{\omega}\times\left(\frac{\partial\vec{r'}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{r'}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r'}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2\vec{r'}}{\partial t^2} + \vec{\omega}\times\frac{\partial r'}{\partial t},$$

notînd viteza relativă $\frac{\partial\vec{r'}}{\partial t^2} = \vec{V}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, accelerația unghiulară $\frac{\partial^2\vec{r'}}{\partial t^2} = \vec{a}_r\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$, accelerația originii sistemului mobil $\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{a}_0(a_{x0}, a_{z0}, a_{y0})$, expresia (30) a accelerației absolute devine

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}) + 2\vec{\omega}\times\vec{V} + \vec{a}_r. \qquad (31)$$

După cum am menționat în punctul O' (origina sistemului mobil) se află vehiculul cosmic urmărit care se mișcă pe o orbită în jurul Pământului sau altei planete și constituie ținta pe care trebuie s-o ajungă vehiculul urmăritor aflat în punctul B, fig. 7. În procesul de apropiere

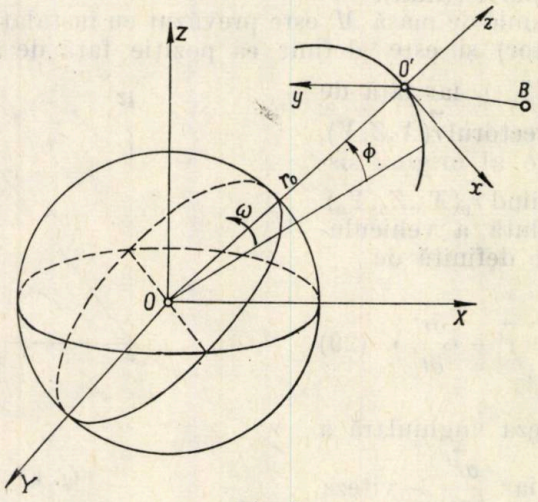


Fig. 7

și întîlnire vehiculul urmăritor B va descrie o mișcare pe care o urmărim față de sistemul mobil și în acest sens vom folosi ecuațiile mișcării relative ale acestuia față de sistemul mobil.

Notînd cu $\vec{F}$ rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra aparatului cosmic urmăritor, atunci ecuația vectorială a mișcării relative

a vehiculului cosmic urmăritor de masă m față de sistemul mobil se va scrie sub forma

$$m\vec{a}_r = -m[\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\omega}\times\vec{V}] + \vec{F} \qquad (32)$$

Trebuie remarcat că, deoarece vehiculele cosmice (urmăritor și urmărit) se află în afara atmosferei, forțele aerodinamice se neglijează, deci :

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{G}$$

$\vec{T}$ fiind vectorul tracțiunii vehiculului urmăritor, iar $\vec{G}$-greutatea acestuia.

Pentru studiul întîlnirii, sistemul orbital $O'xzy$ se consideră ca în figura 7, unde axa $O'z$ este în direcția razei vectoare r_0, axa $O'x$—inversă rotirii, iar $O'y$—perpendiculară pe ele. Unghiul φ definește poziția unghiulară a razei vectoare r_0 față de o poziție, la care sînt cunoscute pe orbită elementele mișcării r_{0i}, V_i și unghiul dintre viteză și perpendiculara la raza vectoare θ_i, fig. 8.

În vederea stabilirii ecuațiilor de mișcare pe direcția celor trei axe ale sistemului orbital vom face cîteva precizări.

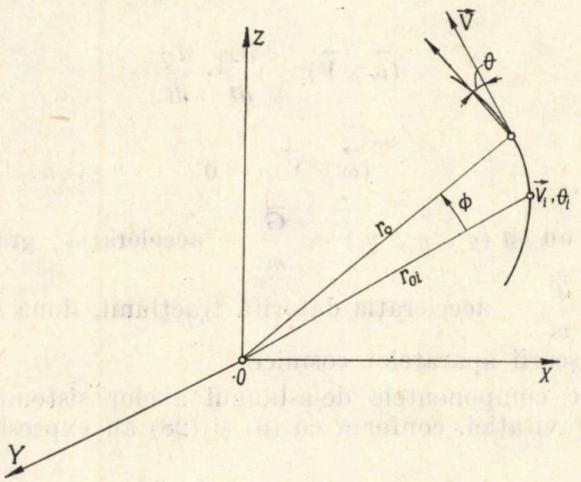


Fig. 8

Deoarece :

$$\vec{a}\left(0,\ -\frac{\mu}{r_0^2},\ 0\right);\ \vec{\omega}\left(0,\ 0,\ \frac{d\varphi}{dt}\right);\ \vec{\varepsilon}\left(0,\ 0,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right),$$

unde μ este parametrul gravitațional, avînd pentru Pămînt valoarea

$3{,}986.10^{14}$ m³/sec², atunci componentele față de axele sistemului mobil ale produselor vectoriale din membrul doi al ecuației (32), sînt

$$(\vec{\varepsilon}\times\vec{r'})_x = -z\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$(\vec{\varepsilon}\times\vec{r'})_z = x\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$(\vec{\varepsilon}\times\vec{r'})_y = 0$$

$$[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'})]_x = -x\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

$$[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}]_z = -z\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'})]_y = 0$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{V})_x = -\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{V})_z = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{V})_y = 0$$

Notăm cu $\bar{g}\,(g_x,\ g_z,\ g_y) = \dfrac{\overline{G}}{m}$ — accelerația gravitației și cu $\bar{a}(a_x,\ a_z,\ a_y) = \dfrac{\overline{T}}{m}$ — accelerația datorită tracțiunii, două mărimi de bază în studiul mișcării aparatelor cosmice.

Deoarece componentele de-a-lungul axelor sistemului orbital, ale accelerației gravitației, conform cu (6) și (28) au expresiile

$$g_x = -\mu\left\{\frac{x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}(1-3\sin^2\Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{5J_4x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\right\} \qquad (33')$$

$$g_z = -\mu\left\{\frac{r_0+z}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}(1-3\sin^2\Phi) + \right.$$

$$+\frac{5J_4(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\Bigg\}$$

$$g_y=-\mu\left\{\frac{y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{3J_2y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}(1-3\sin^2\Phi)+\right.$$

$$\left.+\frac{5J_4y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\right\};$$

ținînd seama de expresiile (33) și (33′) din ecuația (32), obținem ecuațiile de mișcare ale vehiculului urmăritor pe cele trei axe:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2x+2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot z-$$

$$-\mu\left\{\frac{x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{3J_2x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}(1-3\sin^2\Phi)+\right.$$

$$\left.+\frac{5J_4x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\right\}+a_x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\mu}{r_0^2}+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2z-2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot x-$$

$$-\mu\left\{\frac{r_0+z}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{3J_2(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}(1-3\sin^2\Phi)+\right.$$

$$\left.+\frac{5J_4(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\right\}+a_z \qquad (34)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\mu\left\{\frac{y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{3J_2y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}}(1-3\sin^2\Phi)+\right.$$

$$\left.+\frac{5J_4y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}}\left(1-10\sin^2\Phi+\frac{35}{3}\sin^4\Phi\right)\right\}+a_y,$$

sau notînd componentele vitezei relative cu:

$$\frac{dx}{dt}=V_x,\quad\frac{dz}{dt}=V_z,\quad\frac{dy}{dt}=V_y,$$

ecuaţiile de mişcare devin :

$$\frac{dx}{dt} = V_x$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 x + 2V_z \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} z -$$

$$- \mu \left\{ \frac{x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2 x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} (1 - 3\sin^2\Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{5J_4 x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}} \left(1 - 10\sin^2\Phi + \frac{35}{3}\sin^4\Phi\right) \right\} + a_x$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\mu}{r_0^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 z - 2V_x \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d^2\varphi}{dt^2} x -$$

$$- \mu \left\{ \frac{r_0+z}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} (1-3\sin^2\Phi + \right. \quad (35)$$

$$\left. + \frac{5J_4(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}} \left(1-10\sin^2\Phi + \frac{35}{3}\sin^4\Phi\right) \right\} + a_z$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y$$

$$\frac{dV_y}{dt} = - \mu \left\{ \frac{y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2 y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} (1 - 3\sin^2\Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{5J_4 y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}} \left(1 - 10\sin^2\Phi + \frac{35}{3}\sin^4\Phi\right) \right\} + a_y .$$

Vom căuta acum să punem ecuaţiile (35) sub o formă uşor de mînuit în aplicaţiile practice.

Aparatul urmărit, de care este legat sistemul orbital $O'x\,z\,y$ mişcîndu-se astfel încît momentul său cinetic este constant, putem scrie că

$$r_0^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.} = r_{0i} V_i \cos\theta_i . \qquad (36)$$

Notînd parametrul focal al orbitei țintei cu :

$$p = \frac{V_i^2 r_{0i}^2 \cos^2 \theta_i}{\mu},$$

din (36) deducem :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}. \tag{37}$$

Apoi :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2\sqrt{\mu p}}{r_2^0} \cdot \frac{dr_0}{dt}.$$

Din ecuația orbitei, cînd se măsoară φ de la linia perigeului ($\varphi_0 = 0$) (fig. 8) :

$$r_0 = \frac{p}{1+\varepsilon \cos\varphi}, \tag{38}$$

putem deduce :

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{p\varepsilon \sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, \varepsilon \sin\varphi,$$

cu care apoi obținem în final :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} \sin\varphi. \tag{39}$$

Înlocuind în sistemul (35) expresiile (37) și (39) ale lui $\frac{d\varphi}{dt}$ și $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ astfel deduse, acesta devine :

$$\frac{dx}{dt} = V_x$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\mu p}{r_0^4} x + 2V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^3} - \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} z \sin\varphi -$$

$$- \mu \left\{ \frac{x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2 x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} (1 - 3\sin^2\Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{5J_4 x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}} \left(1 - 10\sin^2\Phi + \frac{35}{3}\sin^4\Phi\right) \right\} + a_x$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\mu}{r_0^2} + \frac{\mu p}{r_0^4} z - 2V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} z \sin\varphi -$$

$$- \mu \left\{ \frac{r_0+z}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} (1 - 3\sin^2\Phi) + \right. \quad (40)$$

$$\left. + \frac{5J_4(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}} \left(1 - 10\sin^2\Phi + \frac{35}{3}\sin^4\Phi\right) \right\} + a_z$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y$$

$$\frac{dV_y}{dt} = - \mu \left\{ \frac{y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{3J_2 y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{5/2}} (1 - 3\sin^2\Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{5J_4 y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{7/2}} \left(1 - 10\sin^2\Phi + \frac{35}{3}\sin^4\Phi\right) \right\} + a_y . \quad (40)$$

În cazul orbitei circulare a țintei $p = r_0 = R$ și $\varepsilon = 0$, deoarece $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}$ considerînd planeta perfect sferică, adică $J_2 = J_4 = 0$, ecuațiile de mai sus devin:

$$\frac{dx}{dt} = V_x$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \omega^2 x + 2V_y\omega - \omega^2 R^3 \frac{x}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{3/2}} + a_x$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \omega^2 R + \omega^2 z - 2V_x\omega - \omega^2 R^3 \frac{R+z}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{3/2}} + a_z \quad (41)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y$$

$$\frac{dV_y}{dt} = - \omega^2 R^3 \frac{y}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{3/2}} + a_y .$$

Aceste ecuații au fost folosite în lucrarea /3/, unde în loc de r_0 s-a folosit notația R spre a remarca faptul că este vorba de raza unei orbite circulare. Dacă în sistemul (41) luăm pentru componentele acceleraţiei gravitaţiei pe acelea care depind de x, z, y, adică:

$$g_x = -\omega^2 x$$
$$g_z = -\omega^2 R + 2\omega^2 z \tag{42}$$
$$g_y = -\omega^2 y,$$

sistemul (40) devine:

$$\frac{dx}{dt} = V_x$$
$$\frac{dV_x}{dt} = 2V_z\,\omega + a_x$$
$$\frac{dz}{dt} = V_z \tag{43}$$
$$\frac{dV_z}{dt} = 3\omega^2 z - 2V_x\omega + a_z$$
$$\frac{dy}{dt} = V_y$$
$$\frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 y + a_y,$$

care este bine cunoscut, folosit de altfel în studiul unor manevre optime de întîlnire în lucrările /4/, /5/. În lucrările /3/, /4/, /5/ ecuațiile (41) și (43) au fost utilizate în studiul optimizării manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare, problema variațională a manevrei fiind formulată ca o problemă de extremum condiționat.

Este interesant de remarcat că ecuațiile generale (40) se pretează de asemenea la formulări ale problemelor variaționale pentru manevrele de întîlniri pe orbite eliptice, parabolice sau hiperbolice, ca probleme de extremum condiționat, ceea ce conduce astfel la o extindere și o generalizare a rezultatelor din lucrările menționate mai sus.

Catedra de mecanică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *K. I. Eriche* — Space Flight vol II Dynamics Van Norstrand, New-York, 1962.
2. *V. M. Ponomarev* — Teoria upravlenia dvijeniem cosmiceschih apparatov, Izdatelstvo Nauka, Moscova, 1965.
3. *Al. Marinescu* — Sur la manoeuvre optimale pour le rendez-vous des engings sur des orbites circulaires à minimum de combustible, compte tenu des équations non linéaires du mouvement de l'engin poursuivant, XVIII th International Astronautical Congress Belgrad, sept. 1967.
4. *Al. Marinescu* — Contributions à l'étude de certaines manoeuvres optimales pour le rendez-vous des engins sur les orbites circulaires, XVI th International Astronautical Congress Athens, sept. 1965.
5. *Al. Marinescu* — Consideraţiuni asupra unei probleme variaţionale pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare, S.C.M.A. Nr. 1, 1967, Bucureşti

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 973 Numărul 4

MECANICĂ FINĂ

C.Z.: 621.376.9:535—2

PRECISION BALL MEASUREMENTS USING A MECHANICAL CALIPER COUPLED WITH A LASER INTERFEROMETER SYSTEM.

OVIDIU I. POPESCU

1. Introduction

The measurement of length with light waves is the accepted method in government standards laboratories and in industry. Presently, the world's standard of lenght is the orange-red line of Krypton-86. This wavelength is dependent upon the structure of the atom and its resonant frequency, and can be reproduced relatively easily, with unprecendented precision, typically a few parts in 10^9. The use of light for measurement depends upon the principle of interference where the summation of coherent light beams is vectorially added. Thus, two beams can either reinforce one another, resulting in a high intensity, or cancel one another resulting in no light output. The laser utilized is a He—Ne laser (gas) which provides a coherent beam of radiation at 632.99 nm (6329.9Å) in vacuum. The interferometer has three components (see figure 1), a laser head that generates a low-power beam, a laser reflector that returns the

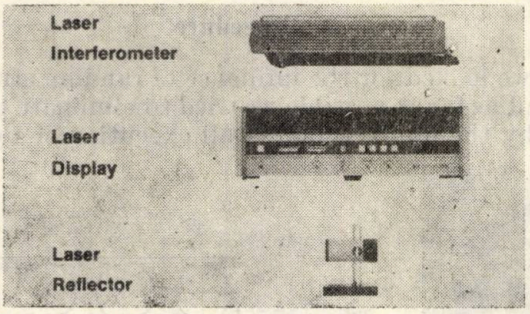


Fig. 1

beam to the laser head, and a laser display that computes and displays the readings. In practice, the reflector is mounted on the device whose movement is to be measured. The laser reflector is a glass trihedral prism.

* Manuscript received 25 February 1972.

The following is a description of one method to determine the feasibility of using a laser interferometer coupled with a mechanical comparator to measure precision balls and to establish a design of making these measurements which will stay under statistical control and also to determine if a device of this type can be used to make absolute measurements.

2. Description of Equipment

The mechanical comparator used in this experiment was a Zeiss measuring machine modified to retract the movable anvil by means of a small crank. A trihedral retro-reflector was mounted on the end of the

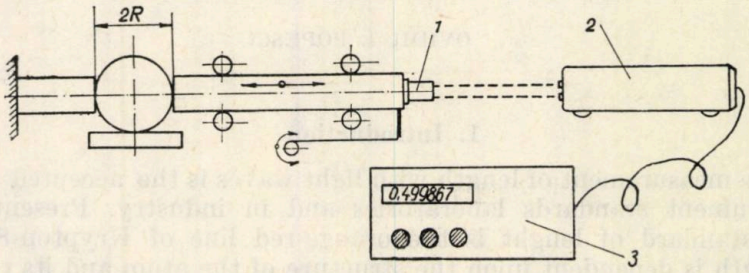


Fig. 2

mobile probe to reflect the laser beam (see figure 2). Two laser interferometer systems were used. An OPTO-mechanism, Lasertrol II (Model 770), with a resolution of 3 microinches and a Hewlett Pack ard laser interferometer, Sytem 5525A, with a resolution of 1 microinch. $\left(1\mu\text{ inch} = \frac{1}{39.37}\,\mu\text{m}\right)$.

3. Procedure

Generally, we looked for the influence of random erros in the measurement results and as far as possible we tried to eliminate the errors which were introduced by the imprecision of ball execution or by the imperfect

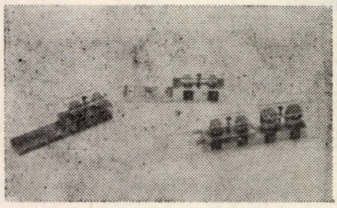


Fig. 3a

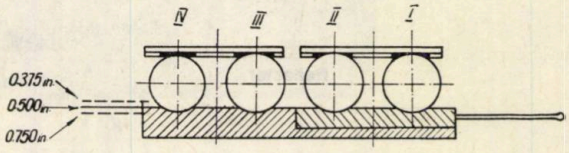


Fig. 3b

shape of the probes' surfaces. To reduce the measurement errors caused by the imperfect shape of the balls or by the non-parallelism of the probes, the balls were lightly clamped on a holder, which prevented them from

rotation during the measurement process (see figures 3a and 3b). The holder was constructed in such a manner that three different diameter balls could be measured, 0.375 inch, 0.500 inch and 0.750 inch using a pair of 0.500 inch balls as the master and control. To assist in locating the balls on the approximate center of each anvil, a guide was mounted on the Zeiss machine table, figure 4.

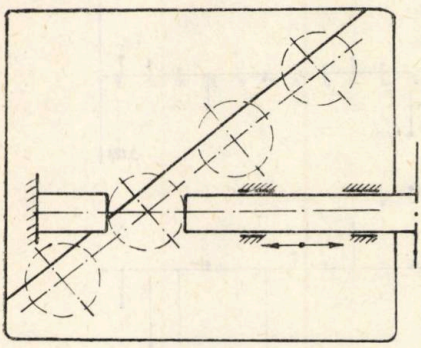


Fig. 4

The measurement design was the basic gage block double substitution method. Observations were analysed by the statistical method using the least squares theorem [1, 2, 3] The difference between the size of two balls was computed from four observations taken in the following order :

Object, (ball)	Instrument indication
$A\ B,\ B,\ A$	$a_1,\ b_2,\ b_3,\ a_4$

and,

$$A - B = \frac{(a_1 - b_2) + (a_4 - b_3)}{2}$$

Before each set of measurements, the anvils were brought in contact and a reference „zero" position was set into the laser display. Balls number I and II, the master and control balls, were 0.500 inch nominal size,

Table 1

I	II	III	IV	
●	●	○	○	0.375 inch
●	●	○	○	0.500 inch
●	●	○	○	0.750 inch
0.500 inch				

Table 2

A	B	B	A
I	III	III	I
II	I	I	II
IV	II	II	IV
III	IV	IV	III
III	IV	V	III
IV	I	I	IV
I	II	II	II
II	III	III	II

but balls III and IV, the unknowns, were 0.375, 0.500 and 0.750 inch nominal size (table 1).

Readings were taken in the order shown in table 2.

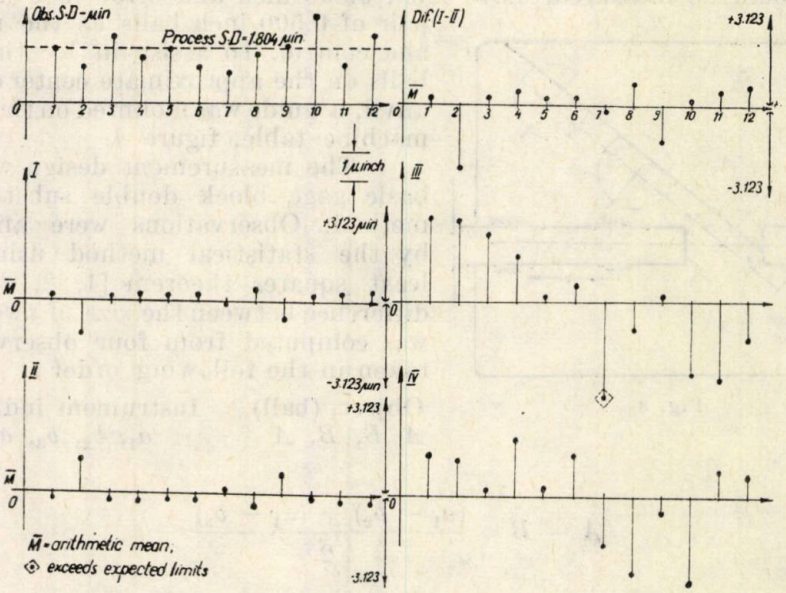

Obs. S.D - µin
Process S.D = 1.804 µin
Dif. [I - II]
+3.123
-3.123
1 µinch
+3.123 µin
-3.123 µin
I
II
III
IV
M̄ = arithmetic mean.
◈ exceeds expected limits

Fig. 5

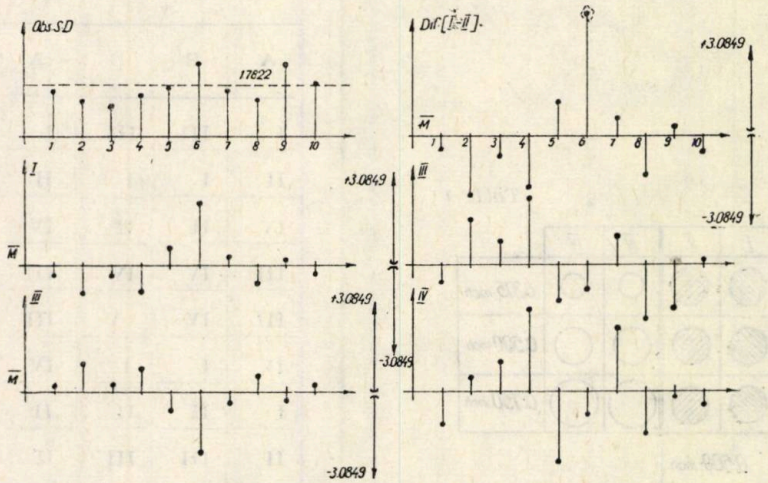

Obs. S.D
17622
Dif. [I - II]
+3.0849
-3.0849
I
II
III
IV

Fig. 6

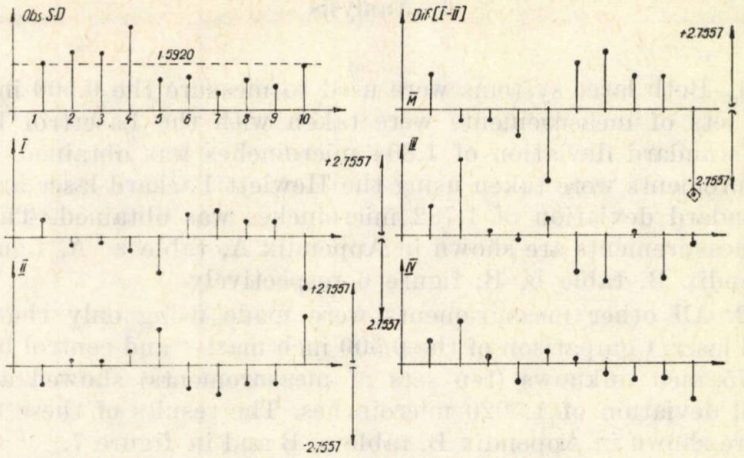

Obs SD
1.5920
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Dif[I-II]
+2.7557
I
II
III
IV
-2.7557

Fig. 7

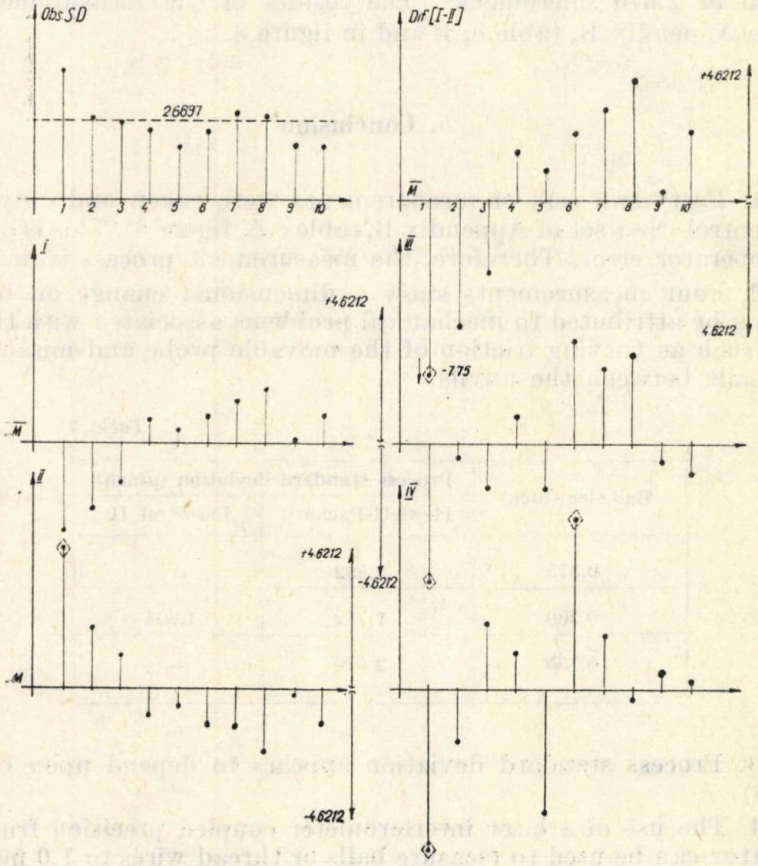

Obs SD
2.6637
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Dif[I-II]
+4.6212
I
II
III
IV
-7.75
-4.6212

Fig. 8

4. Analysis

4.1. Both laser systems were used to measure the 0.500 inch balls. Twelve sets of measurements were taken with the Lasertrol II and a process standard deviation of 1.804 microinches was obtained. Ten sets of measurements were taken using the Hewlett Packard laser and a process standard deviation of 1.782 microinches was obtained. The results of the measurements are shown in Appendix A, table a, A, figure 5 and in Appendix B, table b, B, figure 6 respectively.

4.2. All other measurements were made using only the Hewlett Packard laser. Comparison of the 0.500 inch master and control balls with the 0.375 inch unknows (ten sets of measurements) showed a process standard deviation of 1.5920 microinches. The results of these measurements are shown in Appendix B, table a, B and in figure 7.

Comparison of the 0.500 inch master and control balls with the 0.750 inch unknowns (ten sets of measurements) showed a process standard deviation of 2.670 microinches. The results of the measurements are shown in Appendix B, table c, B and in figure 8.

5. Conclusion

5.1. Forty-two sets of measurements were taken and only one is not in control (first set of Appendix B, table c,B, figure 8). This is probably due to operator error. Therefore, the measurement process is in control.

5.2. Four measurements show a dimensional change on ball size which can be attributed to mechanical problems associated with the comparator such as varying friction of the movable probe and misalignment of the balls between the anvils.

Table 3

Ball size (inch)	Process standard deviation (μinch)	
	Hewlett-Packard	Lasertral II
0.375	1.592	—
0.500	1.782	1.804
0.750	2.670	—

5.3. Process standard deviation appears to depend upon ball size (table 3).

5.4. The use of a laser interferometer coupled precision frictionless comparator can be used to measure balls or thread wires to 1.0 microinch precision.

Experimental results for :

APPEND IX A.

Laser interferometer :
OPTO mechanism — Lasertol II

I	II	III	IV
0.5	0.5	0.5	0.5

Table a, A.

No \ μin	Dif (I—II)	I	II	III	IV	Obs. S.D. *
1	1.500	—50.75	—52.25	—115.08	—139.92	1.75594
2	—0.91667	—51.96	—51.04	—115.17	—140.08	1.15289
3	1.58333	—50.71	—52.29	—115.67	—141.08	2.27578
4	1.75000	—50.63	—52.38	—116.33	—139.42	1.53161
5	1.58333	—50.71	—52.29	—117.75	—141.00	1.73085
6	1.58333	—50.71	—52.29	—117.33	—139.92	1.17438
7	1.16667	—50.92	—52.08	—121.17	—142.83	0.98319
8	2.00000	—50.50	—52.50	—118.75	—143.75	1.59687
9	0.00000	—51.50	—51.50	—117.75	—41.75	1.85742
10	1.50000	—50.75	—52.25	—120.33	—144.17	3.02214
11	1.83333	—50.58	—52.42	—120.58	—140.42	1.23153
12	1.91667	—50.54	—52.46	—119.17	—140.58	2.26476
$\frac{\Sigma}{12}$	1.29	—50.86	—52.15	—117.92	—141.24	

Value of restraint = [I + II] = — 103 μinches
[I — II] = 1 μinch
Degrees of freedom = 5

Process standard deviation = 1.804 μinches
Expected limits = ± 3.123 μinches

Process standard deviation =

$$= \sqrt{\frac{\sum_{1}^{12} (\text{Obs. S D})^2}{12}}$$

Expected limits = (±) 3 × (process standard deviation) × (device factor)
Device factor = 0.577
* Observed standard deviation.

Experimental results for :

APPENDIX B

Laser interferometer : I II III IV

Hewlett Packard : 0.5 | 0.5 | 0.373 | 0.375

Table a, B

No \ μin	Dif (I—II)	I	II	III	IV	Obs. S.D.
1	—50.4157	—144.21	—93.79	—118.25	—120.00	1.62660
2	—52.0000	—145.00	—93.00	—116.67	—119.33	1.99583
3	—51.9167	—144.96	—93.04	—119.25	—120.50	1.93541
4	—52.5833	—145.29	—92.71	—119.33	—121.42	2.89468
5	—54.1667	—146.08	—01.92	—118.65	—120.33	1.03280
6	—50.0833	—144.04	—93.96	—120.58	—120.67	1.10868
7	—49.6667	—143.83	—94.17	—120.83	—121.17	0.60553
8	—50.5000	—144.25	—93.75	—119.25	—121.25	1.02470
9	—50.5000	—144.25	—93.75	—120.75	—121.25	0.74162
10	—55.0833	—146.54	—91.46	—119.65	—122.08	1.52616
$\frac{\Sigma}{10}$	—51.6910	—144.85	—93.15	—119.32	—120.80	

Process standard deviation = 1.5920 μinches

Expected limits = ±2.7557 μinches

0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5

Table b, B

No \ μin	Dif (I—II)	I	II	III	IV	Obs. S.D.
1	—55.0833	—146.54	—91.46	—114.08	—122.17	1.65202
2	—56.6667	—147.33	—90.67	—112.00	—120.50	1.23828
3	—55.2500	—146.63	—91.38	—112.75	—120.00	1.14564
4	—56.3333	—147.17	—90.83	—111.17	—118.33	1.42009
5	—53.4167	—145.71	—92.29	—114.75	—123.50	1.68696
6	—50.3330	—144.17	—93.83	—114.25	—121.75	2.55604
7	—54.0000	—146.00	—92.00	—112.58	—118.92	1.60727
8	—55.9167	—146.96	—91.04	—115.25	—122.50	1.30224
9	—54.2500	—146.13	—91.88	—115.08	—121.17	2.65440
10	—55.1667	—146.54	—91.42	—113.42	—121.58	1.86190
$\frac{\Sigma}{10}$	—54.6416	—146.32	—91.68	—113.53	—121.04	

Process standard deviation = 1.7822 μinches

Expected limits = ± 3.08449 μinches

0.5	0.5	0.75	0.75

Table c, B

μin / No.	Dif (I−II)	I	II	III	IV	Obs. S.D.
1	−60.3333	−148.17	−87.84	63.67	96.33	4.41210
2	−56.9167	−147.46	−90.54	67.83	99.92	2.73481
3	−55.0833	−146.54	−91.46	66.83	103.92	2.64181
4	−50.9167	−144.46	−93.54	69.25	103.00	2.22263
5	−51.5833	−144.79	−93.21	66.75	97.50	1.71634
6	−50.3333	−144.16	−93.83	71.92	107.58	2.32737
7	−49.5000	−143.75	−94.25	70.92	103.58	2.98049
8	−48.5833	−143.29	−94.71	71.33	101.42	2.79806
9	−52.3333	−145.17	−92.83	67.67	102.33	1.86190
10	−50.2500	−144.13	−93.88	67.25	102.00	1.83371
$\frac{\Sigma}{10}$	−52.5833	−145.19	−92.61	68.34	101.76	

Value of restraint = [I+II] = = − 238 μinches

[I − II) = − 54 μinches

Degrees of freedom = 5

Process standard deviation = $= \sqrt{\frac{\overset{10}{\Sigma}\,(\text{Obs. SD})^2}{10}}$

Expected limits = (±) 3 × × (process standard deviation) × (device factor)

Device factor = 0.577

Process standard deviation = = 2.6697 μinches

Expected limits = ± 4.6212 μinches

Department of Fine Mechanics

Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucharest.

REFERENCES

1. *Mary Gibbons Natrella*, Experimental Statistics. National Bureau of Standards (N.B.S.), Washington, D. C., 1966.
2. * * * Precision Measurement and Calibration, Selected N.B.S. Papers on Statistical Concepts and Procedures, Washington, D. C., 1969.
3. P. E. Pontius, Measurement Analysis Program and Gage Blocks, A Progress Report, Metrology Division, N.B.S.
4. *J. A. Simpson*, Lenghth and Lenght Measurement, Report, Metrology Division, N.B.S.
5. *J. A. Simpson*, On Gage Blocks, Report, Dimensional Technology, N.B.S.
6. *J. A. Simpson*, The Dialectic of Measurement, Report, Dimensional Technology, N.B.S.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

ENERGETICĂ

C.Z.: 621.316.1

CALCULUL STABILITĂȚII DINAMICE A UNUI SISTEM ELECTRIC FOLOSIND PACHETUL DE SUBPROGRAME AL CALCULATORULUI IBM 1130

MARIA TUDOSE M. EREMIA CAMELIA MARINESCU

1. Introducere

Calculul stabilității dinamice constă în studiul comportării în timp a sistemului electric la apariția unor perturbații bruște, rezultate din declanșarea unor generatoare sau rețele electrice, variații mari ale consumatorilor precum și din apariția unor defecte. Comportarea sistemului electric este descrisă de un sistem de ecuații diferențiale neliniare ce modelează funcționarea mașinilor sincrone și un sistem de ecuații algebrice ce modelează funcționarea rețelei. Rezolvarea sistemului de ecuații neliniare se efectuează prin metoda Runge-Kutta-Gill, care este o metodă de pas cu pas.

Regimul dinamic este descompus într-o succesiune de regimuri instantanee separate prin intervale de timp suficient de mici pentru ca variația unor mărimi pe intervalul unui pas să poată fi caracterizată prin valoarea derivatei lor.

În acest sens este semnificativă împărțirea mărimilor electrice în două categorii :

— mărimi *inerțiale* sau cu variație lentă, sînt mărimi legate de fluxurile înfășurărilor rotorice, ce intervin în procesul tranzitoriu. Aceste mărimi se caracterizează prin faptul că își păstrează constantă valoarea în primul moment al apariției perturbației. În procesul de calcul prin metoda Runge-Kutta-Gill, la începutul fiecărui pas mărimile inerțiale sînt egale cu valorile de la sfîrșitul pasului precedent, variația lor pe parcursul unui pas fiind descrisă de sistemul de ecuații diferențiale. În cazul acestui studiu apar următoarele mărimi inerțiale : fluxurile inductorului, unghiul electric al rotorului și cuplul motor ;

— mărimi *neinerțiale* sau cu o variație rapidă, sînt mărimi legate de rețea, care la apariția unei perturbații variază brusc. În procedeul de pas cu pas aceste mărimi se păstrează constante pe intervalul unui pas, dar variază de la pas la pas. Mărimile neinerțiale sînt : curenții, tensiunile și puterile debitate la borne.

* Manuscris predat redacției la data de 17 iunie 1972

Cele relatate mai sus apar explicit în reprezentarea separată a elementelor componente ale sistemului electrice.

În cadrul acestui studiu se vor aborda succesiv următoarele probleme:

— reprezentarea maşinii sincrone;
— reprezentarea reţelei;
— reprezentarea defectelor;
— algoritmul de calcul al regimului dinamic.

2. Reprezentnrea maşinii sincrone

2.1. *Ecuaţiile diferenţiale ale regimului tranzitoriu electromagnetic*

Ecuaţiile de funcţionare ale maşinii sincrone cu înfăşurări de amortizare sînt scrise în sistemul d, q obţinut prin transformarea Park-Gorev. Această transformare este echivalentă cu înlocuirea înfăşurărilor trifazate imobile ale statorului prin două înfăşurări fictive dispuse pe rotor şi care se rotesc odată cu acesta. Pentru ca rotorul să fie dispus simetric în raport cu cele două înfăşurări, axele acestora din urmă corespund cu axele longitudinală şi transversală ale rotorului (fig. 1). Astfel:

— după axa d — *axa longitudinală* — sînt dispuse trei înfăşurări ce nu îşi schimbă poziţia relativă între ele: înfăşurarea de excitaţie f, înfăşurarea de amortizare k după axa longitudinală, şi înfăşurarea longitudinală d a statorului, care sînt cuplate între ele prin inductivităţi mutuale;

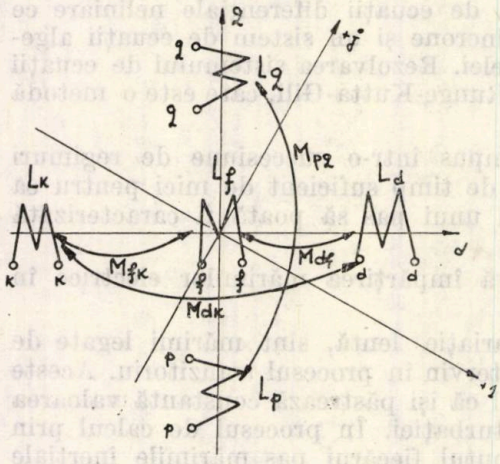


Fig. 1 — Reprezentarea maşinei fictive Park-Gorev

— după axa q — *axa transversală* — sînt dispuse două înfăşurări ce nu îşi schimbă poziţia relativă între ele: înfăşurarea de amortizare p după axa transversală şi înfăşurarea transversală q a statorului, care sînt cuplate între ele prin inductivităţi mutuale.

Deoarece axele d şi q sînt perpendiculare între ele nu există cuplaj magnetic între înfăşurările dispuse pe axe diferite.

Ecuaţiile corespunzînd unui regim oarecare (presupunînd absenţa componentei homopolare) sînt următoarele:

— ecuaţiile electrice ale înfăşurărilor fictive ale statorului:

$$u_d + Ri_d = \omega\varphi_q - \frac{d\varphi_d}{dt} \tag{1}$$

$$u_q + Ri_q = -\omega\varphi_d - \frac{d\varphi_q}{dt} \tag{2}$$

— ecuațiile electrice ale înfășurărilor rotorului :

$$-u_f + Ri_f = -\frac{d\varphi_f}{dt} \tag{3}$$

$$R_k i_k = -\frac{d\varphi_k}{dt} \tag{4}$$

$$R_p i_p = -\frac{d\varphi_p}{dt} \tag{5}$$

— ecuațiile magnetice în cele două axe :

— după axa longitudinală d :

$$\begin{vmatrix} \varphi_d \\ \varphi_f \\ \varphi_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_d & M_{df} & M_{dk} \\ M_{fd} & L_f & M_{fk} \\ M_{kd} & M_{kf} & L_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \\ i_k \end{vmatrix} \tag{6}$$

— după axa transversală q :

$$\begin{vmatrix} \varphi_q \\ \varphi_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_q & M_{qp} \\ M_{pq} & L_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_q \\ i_p \end{vmatrix} \tag{7}$$

În scopul ușurării studiului în cele ce urmează se admit pe de o parte unele simplificări, iar pe de altă parte schimbări de variabile.

2.1.1. *Ipoteze simplificatoare*

În ecuațiile electrice ale înfășurărilor statorului se fac următoarele ipoteze simplificatoare :

a). Se consideră viteza unghiulară a rotorului $\omega = d\theta/dt$ constantă și egală cu ω_0 (pulsația sincronă). Eroarea introdusă în acest caz este cu atît mai redusă cu cît mașinile se îndepărtează mai puțin de viteza de sincronism. Această ipoteză este valabilă în cazul în care alunecarea mașinilor nu depășește 5%.

b). Se neglijează tensiunile electromotoare de transformare $d\varphi_d/dt$ și $d\varphi_q/dt$ față de tensiunile electromotoare de rotație $\omega\varphi_d$ respectiv $\omega\varphi d$. Această ipoteză este admisibilă pentru defecte mai îndepărtate de mașină. În acest sens cele mai apropiate defecte ce se vor lua în considerație sînt cele de la bornele de înaltă tensiune ale transformatoarelor grupurilor.

În consecință, ecuațiile electrice ale mașinii sincrone nesaturate cu înfășurări de amortizare sînt :

(8) $$u_d + Ri_d = \omega_0 \varphi_q$$

(9) $$u_q + R\, i_q = -\omega_0 \varphi_d$$

(10) $$-u_f + R_f i_f = -\frac{d\varphi_f}{dt}$$

(11) $$R_k\, i_k = -\frac{d\varphi_k}{dt}$$

(12) $$R_p i_p = -\frac{d\varphi_p}{dt}$$

Ecuațiile magnetice (6), (7) după axele d și q rămîn neschimbate.
Ecuațiile magnetice după axele magnetice d și q ale mașinii fără înfășurări de amortizare sînt :
după axa d :

(13) $$\begin{vmatrix} \varphi_d \\ \varphi_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_d & M_{df} \\ M_{fd} & L_f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_d \\ i_f \end{vmatrix}$$

— după axa q :

(14) $$\varphi_q = L_q \cdot i_q$$

2.1.2. *Schimbări de variabile*

Schimbările de variabile constau în înlocuirea fluxurilor $\varphi_f, \varphi_k, \varphi_p$ mărimi caracteristice rotorului prin mărimi proporționale cu acestea. Prin aceasta se obțin ecuațiile mașinii care conțin numai tensiuni ce se pot calcula plecînd de la rețea, punîndu-se în evidență totodată variabilele :

(15) $$e_q = -\omega_0 \frac{M_{df}}{R_f}\, u_f$$ — variabilă neinerțială

(16) $$e'_q = -\omega_0 \frac{M_{df}}{L_f} \cdot \varphi_f$$ — variabilă inerțială proporțională cu fluxul de excitație φ_f de pe axa d;

(17) $$e''_q = -\omega_0 \frac{M_{dk}}{L_k} \cdot \varphi_k$$ — variabilă inerțială proporțională cu fluxul de amortizare φ_k de pe axa d;

(18) $$e''_d = \omega_0 \frac{M_{qp}}{L_p} \cdot \varphi_p$$ — variabilă inerțială proporțională cu fluxul de amortizare φ_p de pe axa q.

Aceste variabile servesc la descrierea comportării mașinii sincrone în regim dinamic prin ecuațiile diferențiale corespunzătoare.

2.1.3. *Ecuația diferențială a variabilei* e_d''

Din ecuația (5) se scoate expresia curentului i_p care se înlocuiește în ecuația fluxului φ_p din (7) obținîndu-se:

$$T_p \frac{d\varphi_p}{dt} = M_{qp} \cdot i_q - \varphi_p \tag{19}$$

în care:

$$T_p = \frac{L_p}{R_p} \tag{20}$$

Prin înmulțirea ecuației (19) cu $\omega_0 \frac{M_{qp}}{L_p}$, ținînd seama de relația (A7) și aproximațiile (A3) se obține:

$$T_p \frac{de_d''}{dt} = -e_d'' + (\chi_q - \chi_q')i_q$$

în care înlocuind i_q prin valoarea sa din (A 12) rezultă:

$$T_q'' \frac{de_d''}{dt} = -ed_d'' + \frac{\chi_q + \chi_q'}{\chi_q} u_d \tag{21}$$

în care:

$$T_q'' = T_p \frac{\chi_q''}{\chi_q}$$

2.1.4. *Ecuația diferențială a variabilei* e_q''

Din ecuațiile (10) și (11) se scot expresiile curenților i_f și i_k. Acestea se înlocuiesc în ecuațiile fluxurilor φ_f și φ_k din (6) obținîndu-se:

$$\varphi_f = M_{fd} \cdot i_d - \frac{L_f}{R_f} \frac{d\varphi_f}{dt} + \frac{L_f}{R_f} u_f - \frac{M_{fk}}{R_k} \frac{d\varphi_k}{dt} \tag{22}$$

$$\varphi_k = M_{kd} i_d - \frac{M_{kf}}{R} \cdot \frac{d\varphi_f}{dt} + \frac{M_{kf}}{R_f} u_f - \frac{L_k}{R_k} \cdot \frac{d\varphi_k}{dt} \tag{23}$$

În relațiile (22) și (23) se înlocuiesc fluxurile φ_f și φ_k precum și derivatele acestora în funcție de variabilele inerțiale e_q și e_q'' din (16) și (17) și de derivatele acestora.

Rezultă :

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{L_f}{M_{df}}e'_q = M_{fd}\cdot i_d + \frac{1}{\omega_0}\frac{L_f}{M_{df}}\frac{L_f}{R_f}\frac{de'_q}{dt} + \frac{L_f}{R_f}u_f + \frac{1}{\omega_0}\frac{L_k}{M_{dk}}\frac{M_{fk}}{R_k}\frac{de''_q}{dt} \tag{24}$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{L_k}{M_{dk}}e''_q = M_{kd}\cdot i_d + \frac{1}{\omega_0}\frac{L_f}{M_{df}}\frac{M_{kf}}{R_f}\frac{de'_q}{dt} + \frac{M_{kf}}{R_f}u_f + \frac{1}{\omega_0}\frac{L_k}{M_{dk}}\frac{L_k}{R_k}\frac{de''_q}{dt} \tag{25}$$

Se împarte ecuaţia (24) prin $-\frac{L_f}{\omega_0 M_{df}}$ iar ecuaţia (25) prin $\frac{L_k}{\omega_0 M_{dk}}$. Folosindu-se relaţiile (A5), (A10) din anexă se obţine sistemul :

$$e'_q = (\chi'_d - \chi_d)i_d - T_f\frac{de'_q}{dt} - e_q - T_k\frac{\chi_d - \chi'_d}{\chi_d - \chi''_d}\frac{de''_q}{dt}$$

$$-e''_q = (\chi_d - \chi''_d)i_d + T_f\frac{de'_q}{dt} + e_q + T_k\frac{de''_q}{dt} \tag{26}$$

în care :

$$T_k = \frac{L_k}{R_k} \tag{27}$$

În sistemul (26) se elimină de'_q/dt şi se înlocuieşte i_d prin valoarea sa din (A13) rezultind :

$$T''_{d_0}\frac{de''_q}{dt} = e'_q - \frac{\chi'_d}{\chi''_d}e''_q + \frac{\chi'_d - \chi''_d}{\chi''_d}u_q \tag{28}$$

în care :

$$T''_{d_0} = T_k\frac{\chi'_d - \chi''_d}{\chi_d - \chi''_d} = T''_k \tag{29}$$

2.1.5. *Ecuaţia diferenţială a variabilei* e'_q

În ecuaţia (24) se înlocuieşte de'_q/dt prin expresia sa din ecuaţia (28) obţinîndu-se :

$$T_f(\chi'_d - \chi''_d)\frac{de'_q}{dt} = -(\chi'_d - \chi'_d)e_q - (\chi_d - \chi''_d)e'_q + (\chi_d - \chi'_d)e''_q \tag{30}$$

Ecuaţia (30) poate fi scrisă sub forma :

$$T'_{d_0}\frac{de'_q}{dt} = -e'_q - \frac{\chi'_d - \chi''_d}{\chi_d - \chi''_d}e_q + \frac{\chi_d - \chi'_d}{\chi_d - \chi''_d}e''_q \tag{31}$$

în care :

$$T'_{d_0} = F_f \frac{\chi'_d - \chi''_d}{\chi_d - \chi''_d} = T''_f \tag{32}$$

Deci ecuațiile diferențiale ale regimului tranzitoriu electromagnetic sau ale variabilelor inerțiale sînt : (21), (28) și (31).

2.2. *Ecuațiile diferențiale ale sistemului de reglare a tensiunii*

2.2.1. *Funcțiile de transfer*

Sistemul de reglare al tensiunii se compune din :

— regulatorul automat de tensiune avînd o funcție de transfer de forma :

$$F(p) = \frac{K_r(1 + p\ T_s)}{(1 + pT_{r_1})(1 + p\ T_{r_2})} \tag{33}$$

în care K_r este constanta de amplificare a regulatorului ;

T_{r_1}, T_{r_2} — constantele de timp ale regulatorului ;

T_s — constanta de stabilizare ;

— excitatoarea generatorului avînd o funcție de transfer de forma :

$$F_e(p) = \frac{K_e}{1 + p\ T_e} \tag{34}$$

în care : T_e este consantta de timp a excitatoarei ;

K_e — constanta de amplificare a excitatoarei ;

Schema bloc a sistemului de reglare a tensiunii unui generator este prezentată în fig. 2.

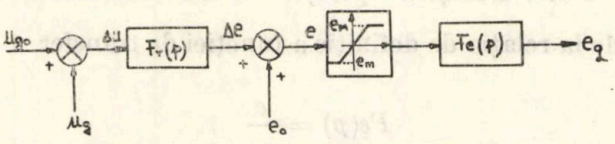


Fig. 2. — Schema bloc a sistemului de reglare a tensiunii

Sistemul de reglare a tensiunii modifică t.e.m. e_q în funcție de abaterea tensiunii la bornele mașinii $\Delta u = u_{g_0} - u_g$ care constituie mărimea de intrare a regulatorului ; u_{g_0} fiind tensiunea de consemn a regulatorului, egală cu tensiunea la bornele generatorului în regim permanent anterior defectului, iar u_g fiind tensiunea la bornele generatorului în regimul perturbat.

Mărimea de ieșire din regulator este Δe. La aceasta se adaugă valoarea tensiunii de excitație e_0 din regimul permanent anterior defectului,

obţinîndu-se mărimea e proporţională cu tensiunea de excitaţie a excitatoarei. Mărimea de ieşire e_q a sistemului de reglare este proporţională cu tensiunea de excitaţie a maşinii sincrone.

Funcţia de transfer a regulatorului se descompune în fracţii simple avînd în vedere că metoda Runge-Kutta-Gill a procesului de calcul rezolvă numai sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Astfel:

$$F_r(p) = \frac{A}{1 + pT_{r_1}} + \frac{B}{1 + pT_{r_2}} \tag{35}$$

Prin identificarea relaţiilor (33) şi (35) se obţin constantele A şi B:

$$A = \frac{K_r(T_{r_1} - T_s)}{T_{r_1} - T_{r_2}}; \qquad B = \frac{K_r(T_{r_2} - T_s)}{T_{r_2} - T_{r_1}} \tag{36}$$

2.2.2. *Ecuaţiile operaţionale ale regulatorului automat de tensiune*

Plecînd de la relaţia de definiţie a funcţiei de transfer a regulatorului de tensiune:

$$F_r(p) = \frac{\Delta e}{\Delta u} = \frac{\Delta e_1 + \Delta e_2}{\Delta u} \tag{37}$$

prin identificare cu relaţia (35), se obţin următoarele ecuaţii operaţionale:

$$\begin{aligned} (1 + pT_{r_1})\Delta e_1 &= A(u_{g_0} - u_g) \\ (1 + pT_{r_2})\Delta e_2 &= B\ (u_{g_0} - u_g) \\ \Delta e &= \Delta e_1 + \Delta e_2 \end{aligned} \tag{38}$$

2.3.2. *Ecuaţiile operaţionale ale excitatoarei*

Plecînd de la relaţia de definiţie a funcţiei de transfer a excitatoarei

$$Fe(p) = \frac{e}{e_q} \tag{39}$$

în care:

$$\begin{aligned} e &= e_0 + \Delta e \\ e_m &\leqslant e \leqslant e_M \end{aligned} \tag{40}$$

şi prin identificarea acesteia cu relaţia (34) se obţine următoarea ecuaţie operaţională:

$$(1 + pT_e)e_q = K_e \cdot e \tag{41}$$

În continuare, se trec sub formă diferențială ecuațiile (39) și (41) obținîndu-se sistemul de ecuații diferențiale al reglajului de tensiune:

$$T_{r_1}\frac{d\Delta e_1}{dt} = A(u_{g_0} - u_g) - \Delta e_1$$

(42)
$$T_{r_2}\frac{d\Delta e_2}{dt} = B(u_{r_0} - u_g) - \Delta e_2$$

$$T_e\frac{de_q}{dt} = K_e \cdot e - e_q$$

în care valoarea lui e este dată de relația (40).

2.3. *Ecuațiile diferențiale ale regimului tranzitoriu electromecanic*

Se consideră ecuația care exprimă echilibrul cuplurilor care acționează asupra rotorului unui generator:

(43)
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = C_m - C_e - C_a$$

în care: $\theta = \omega_0 t + \delta$ este unghiul absolut al rotorului față de axa de referință; (fig. 3).

J — momentul de inerție al rotorului;

C_m, C_e — cuplul mecanic, respectiv electromagnetic ce acționează asupra rotorului;

$C = A\frac{d\delta}{dt}$ — cuplul de amortizare

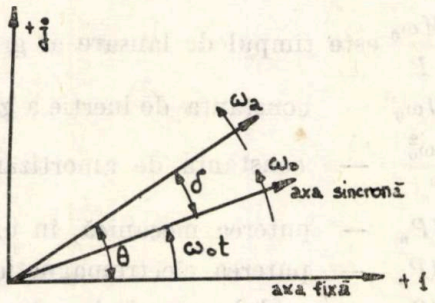


Fig. 3

Se definește viteza unghiulară absolută (rad/s) față de o axă de referință fixă ca fiind:

(44)
$$\omega_a = \frac{d\theta}{dt}$$

respectiv:

(45)
$$\omega_a = \omega_0 + \frac{d\delta}{dt}$$

Derivata de ordinul doi devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad \text{pentru } \omega_0 = \text{const.} \tag{46}$$

Se defineşte alunecarea rotorului prin abaterea vitezei de rotaţie a maşinii faţă de viteza sincronă, în unităţi relative:

$$a = \frac{\omega_a - \omega_0}{\omega_0} \tag{47}$$

Din relaţiile (45), (46) şi (47) rezultă:

$$\frac{d\delta}{dt} = a\omega_0 ; \quad \frac{d^2\delta}{dt^2} = \omega_0 \cdot \frac{da}{dt} \tag{48}$$

Înlocuind relaţiile (46) şi (48) în ecuaţia (43) se obţine

$$J\frac{d^2\delta}{dt^2} + A\ \omega_0 a = C_m - C_e$$

sau:

$$J\omega_0\frac{da}{dt} + A\omega_0 a = C_m - C_e \tag{49}$$

Se raportează ecuaţia (49) la cuplul nominal $C_n = P_n/\omega_0$ şi se introduc următoarele notaţii:

$T_a = \dfrac{J\omega_0^2}{P_n} = \dfrac{M\omega_0}{P}$ este timpul de lansare al grupului (sec);

$M = J\omega_0$ — constanta de inerţie a grupului (Kws²/rad.);

$D = \dfrac{A\omega_0^2}{P_n}$ — constanta de amortizare, în u.r.;

$p_m = P_m/P_n$ — puterea mecanică, în u.r.; (50)

$p_e = P_e/P_n$ — puterea electromagnetică, în u.r.;

$c_m = C_m/C_n$ — cuplul mecanic în u.r.;

$c_e = C_e/(C_n$ — cuplul electric, în u.r.

Rezultă ecuaţiile diferenţiale ale regimului tranzitoriu electromecanic:

$$T_a\frac{da}{dt} + Da = p_m - p_e \tag{51}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = a\ \omega_0$$

2.4. — *Ecuațiile diferențiale ale sistemului de reglare a vitezei*

2.4.1. *Funcția de transfer*

Funcția de transfer a sistemului de reglare este de forma :

(52)

în care : σ este statismul permanent al regulatorului ;
m — constanta accelerometrului ;

Schema bloc a sistemului de reglare a vitezei este prezentată în fig. 4.

Sistemul de reglare a vitezei modifică cuplul mecanic în funcție de abaterea vitezei a, care constituie mărimea de intrare în regulator.

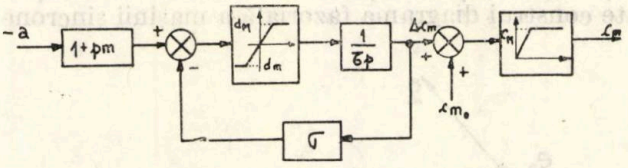


Fig. 4 — Schema bloc a sistemului de reglare a vitezei

Mărimea de ieșire din regulator este ΔC_m. La aceasta se adaugă valoarea cuplului C_{m0} din regimul permanent anterior defectului obținîndu-se cuplul C_{m0} care este limitat la valoarea C_{max} care reprezintă cuplul maxim dezvoltat de turbină.

2.4.2. *Ecuația operațională a regulatorului automat de viteză*

Plecînd de la relația de definiție a funcției de transfer a sistemului de reglare a turației :

$$F_u(p) = -\frac{\Delta C_m}{a} \tag{53}$$

și prin identificarea acesteia cu relația (52) se obține următoarea ecuație operațională :

$$(\sigma + p\tau)\Delta C_m = -(1 + pm)a \tag{54}$$

Ecuația (54) se trece sub formă diferențială și se înlocuiește da/dt prin valoarea sa din ecuația (51) :

$$\tau \frac{d\Delta C_m}{dt} = -\frac{m}{T_a}(C_m - C_e) + \left(\frac{mD}{T_a} - 1\right)a - \sigma\Delta C_m \tag{55}$$

Se definește $d = \tau \dfrac{d\Delta C_m}{dt}$ ca fiind deplasarea distribuitorului cu sertărașe în u.r., care este limitată de o valoare maximă la închidere și deschidere.

Rezultă următorul sistem de relaţii care descriu regimul tranzitoriu al sistemului de reglare a vitezei grupului:

$$d = -\frac{m}{T_a}(C_m - C_e) + \left(\frac{mD}{T_a} - 1\right)a - \sigma\Delta C_m$$

$$d_{Minchidere} < d < d_{Mdeschidere}$$

$$d = \tau\frac{d\Delta c_m}{dt} \tag{56}$$

$$\Delta c_m = c_m - c_{m_0}$$

$$0 \leqslant c \leqslant c_{Max}$$

2.5. — *Diagrama fazorială şi schema echivalentă a maşinii sincrone*

Din ecuaţiile (A12) şi (A13) ţinînd seama de indicaţiile prezentate în (2.3) se poate construi diagrama fazorială a maşinii sincrone nesaturate

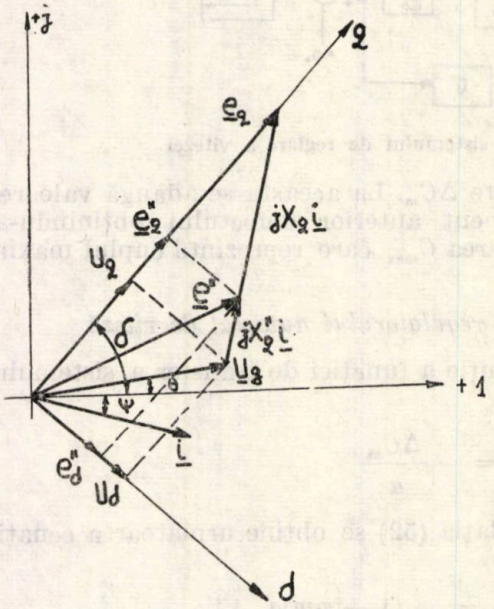


Fig. 5. — Diagrama fazorială a maşinii sincrone nesaturate

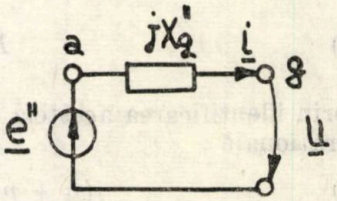


Fig. 56. — Shcema echivalentă a maşinii sincrone
a — nodul de la arborele generatorului;
g — nodul de la bornele generatorului

cu înfăşurări de amortizare într-un moment oarecare (fig. 5).

Ipoteza conservării fluxurilor inductorului se exprimă prin conservarea fazorului e'' de componente e''_d şi e''_q.

Aplicînd teorema lui Northon fiecare maşină sincronă este echivalentă cu un injector de curent în nodul reţelei cu care maşina este

interconectată, determinat în funcție de tensiunea electromotoare supratranzitorie e'' în spatele reactanței χ_d'' (fig. 7). Modulul și argumentul acestui injector variază de la pas în calculul regimului dinamic.

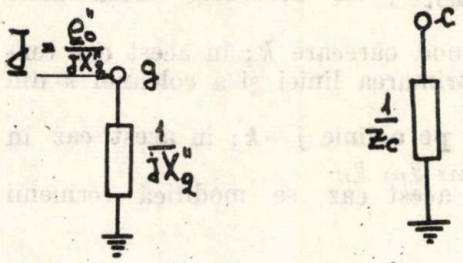


Fig. 7 — Scheme echivalente în regim dinamic
a — pentru mașina sincronă
b — pentru consumator.

3. — Reprezentarea rețelei

3.1. *Determinarea regimului inițial*

Pentru calculul stabilității dinamice este necesară cunoașterea regimului permanent de funcționare a sistemului înaintea apariției perturbației. Regimul permanent se poate determina cu ajutorul uneia din metodele iterative existente, de exemplu metoda Newton utilizată la Institutul de Studii și Proiectări Energetică.

Pe baza datelor obținute din calculul regimului permanent se determină mărimile caracteristice generatoarelor înainte de apariția perturbației (variabilele inerțiale).

3.2. *Reprezentarea elementelor rețelei și a sarcinilor în studiul regimului dinamic*

Liniile, cablele, transformatoarele și autotransformatoarele au aceeași reprezentare ca în cazul regimului permanent neglijîndu-se variațiile de impedanță cu frecvența, aceasta presupunîndu-se foarte apropiată de viteza de sincronism. Un consumator oarecare conectat într-un nod c se reprezintă într-un mod aproximativ prin impedanța Z_c constantă. Impedanța Z_c conectată între nodul consumator și pămînt se determină cu relația :

$$\underline{Z}_c = \frac{U_c^2}{S_c^*} \tag{57}$$

în care : $\underline{S}_c = -P_c - jQ_c$ este puterea absorbită de consumator în nodul c;
$\underline{U}_c$ — tensiunea nodului c din regimul permanent ;

În fig. 7,b este prezentată schema echivalentă a consumatorului în regim dinamic.

4 Reprezentarea defectelor

În studiul de față se iau în considerație numai defectele simetrice. Nu s-a prezentat posibilitatea luării în considerație a mai multor defecte simultan. Reprezentarea defectelor simetrice se traduce printr-o modifi-

care a matricei de admitanţe $[\underline{Y}_{nn}]$ a reţelei; în timpul cît durează defectul comportarea reţelei perturbate este descrisă de sistemul $[\underline{J}]=[\underline{Y}_{nnav}]\cdot[\underline{U}]$ după deconectarea defectului, comportarea reţelei perturbate este descrisă de sistemul de ecuaţii $[\underline{J}] = [\underline{Y}_{nndav}][\underline{U}]$ Se deosebesc următoarele situaţii:

— scurtcircuitul trifazat la un nod oarecare k; în acest caz tensiunea $U_k = 0$ ceea ce revine la suprimarea liniei şi a coloanei k din matricea $[Y_{nn}]$;

— scurtcircuitul trifazat are loc pe o linie $j-k$; în acest caz în matricea $[\underline{Y}_{nn}]$ se modifică termenii $\underline{y}_{kk}$, $\underline{y}_{jk}$, $\underline{y}_{jj}$.

— declanşarea liniei $j - k$, în acest caz se modifică termenii y_{jj}, y_{j-k}, y_{kk}.

5. Algoritm de calcul al regimului dinamic

Calculul regimului dinamic constă în combinarea soluţiilor sistemului de ecuaţii algebrice cu soluţiile obţinute prin integrarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale.

În sistemul de ecuaţii diferenţiale obţinut din relaţiile (21), (28), (31), (42), (51), (56) pe lîngă mărimile inerţiale: e'_q, e''_q, e''_d, δ, c_m intervin şi mărimile neinerţiale cum sînt: p_e,e_q, u_q şi u_d

În cadrul algoritmului se definesc următoarele momente de timp:

— timpul O este momentul producerii perturbaţiei;

— timpul $O-$ este momentul imediat înainte de apariţia perturbaţiei;

— timpul $O+$ este momentul imediat după apariţia perturbaţiei;

Mărimile neinerţiale variază în momentul apariţiei perturbaţiei, valoarea lor la timpul $O+$ fiind diferită de valoarea la timpul $O-$ şi se calculează următoarele operaţii:

1. — Calculul variabilelor inerţiale cu datele regimului permanent;
2. — Calculul variabilelor neinerţiale pe baza variabilelor inerţiale şi a reţelei perturbate;
3. — Calculul variabilelor inerţiale pe durata unui pas prin integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale.

5.1. *Calculul variabilelor inerţiale la momentul O—*

Valorile mărimilor inerţiale se determină din regimul permanent anterior defectului, care se presupune cunoscut prin tensiunile la borne u_g, curenţii i ce străbat înfăşurările precum şi puterile debitate la borne. Argumentele tensiunilor şi curenţilor sînt considerate faţă de o axă fixă care este rotorul sincron aflat în nodul de echilibru. Într-un sistem de coordonate general $(+1, +j)$ axa fixă coincide cu axa $+1$.

a. Se determină unghiul intern δ şi modulul tensiunii electromotoare $\underline{e}_q$ folosind relaţia.

$$\delta = \arg \underline{e}_q = \arg\ (\underline{u}_g + j\ \chi_q \underline{i})$$

$$|\underline{e}_q| = \text{modul}\ (\underline{u}_g + j\chi_q \underline{i}) \tag{58}$$

în care: $\underline{u}_g = u_q \llcorner\ \theta$ respectiv $i = i \llcorner\ \psi$

Se stabileşte astfel poziţia din spaţiu a axelor d şi q faţă de sistemul de referinţă ales precum şi modulul lui e_q pentru fiecare maşină sincronă. Se calculează componentele tensiunilor la borne şi curenţii pentru fiecare generator în parte cu relaţiile :

(59) $$u_d = u_g \sin(\delta - \theta)$$

$$u_q = u_g \cos(\delta - \theta)$$

(60) $$i_d = i \sin(\delta - \psi)$$

$$i_q = i \cos(\delta - \psi).$$

b. — Se determină tensiunile electromotoare supratranzitorii e_q'' şi e_d'' pentru fiecare generator folosind relaţia (A12) respectiv (A13).

c. — Analog cu expresia (A12) se defineşte t.e.m. tranzitorie e_q' în spatele reactanţei tranzitorii χ_d' :

(61) $$e_q' = u_q + \chi_d' i_g$$

Înlocuind în relaţia (61) expresia lui id din (A13) se obţine :

(62) $$e_q' = \left(1 - \frac{\chi_d'}{\chi_d''}\right) u_q + \frac{\chi_d'}{\chi_d''} e_q''$$

5.2. *Calculul variabilelor neinerţiale*

d. — Se formează matricea $[\underline{Y}_{nn}av]$ conform indicaţiilor din paragraful 4.

e. — Se determină t.e.m. supratranzitorie e'' în sistemul de coordonate d, q al fiecărei maşini respectiv în sistemul general $+1$, $+j$:

(63) $$\underline{e}'' = e_d'' + j\, e_q''$$

respectiv :

(64) $$\underline{e}'' = e_d'' \sin\delta + e_q'' \cos\delta + j\,(-e_d'' \cos\delta + e_q'' \sin\delta)$$

f. — Se determină curenţii injectaţi la bornele generatorilor (fig.7)

(65) $$\underline{J} = \frac{\underline{e}''}{j\chi_q''}$$

în care : $\underline{e}''$ este dat de relaţia (63)

g. Aplicînd metoda tensiunilor nodale sub forma :

(66) $$\underline{Y}_{nnav}][\underline{U}_n] = [\underline{J}_n]$$

se determină tensiunile nodale la momentul $0+$. Se selectează valorile ng ale tensiunilor la bornele generatoarelor şi se raportează la sistemul de axe d, q (relaţia 59).

h. Curentul printr-un generator în procesul dinamic este:

$$\underline{i} = \frac{\underline{e''} - \underline{u_g}}{j\chi_d''} \tag{67}$$

iar componentele sale în sistemul d, q se determină cu (60).

i. — Cu valorile u_d, u_q şi i_d, i_q calculate la punctul g respectiv h se determină puterea electrică la avarie:

$$p_{eav} = u_d i_d + u_q i_q \tag{68}$$

j. Se defineşte t.e.m. sincronă e_q în spatele reactanţei sincrone χ_d ca fiind:

$$e_q = u_q + \chi_d i_d$$

în care înlocuindu-se valoarea curentului i_d din (61) se obţine

$$e_q = \left(1 - \frac{\chi_d}{\chi_d'}\right) u_q + \frac{\chi_d}{\chi_d'} e_q' \tag{69}$$

5.3. *Calculul variabilelor inerţiale la sfîrşitul unui pas după apariţia perturbaţiei*

In sistemul general de ecuaţii diferenţiale (21, 28, 31, 42, 40, 51, 56) se introduc valorile variabilelor neinerţiale u_g, u_d, u_q i_d, i_q, p_e, e_q obţinute în 5.2. Aceste valori se consideră constante pe durata unui pas de integrare numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta-Gill.

După integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale se obţin valorile variabilelor inerţiale la sfîrşitul unui pas de integrare după care algoritmul se repetă începînd cu punctul e pînă la deconectarea avariei de către protecţia prin relee. În momentul acesta se calculează o nouă matrice $[Y_{undav}]$ (conform indicaţiilor din 4), după care se reia procesul de calcul de la punctul e. Procesul de calcul se opreşte după un anumit timp impus.

Pe baza acestui algoritm s-a întocmit un program scris în limbajul Basic FORTRAN IV a cărui organigramă generală este prezentată în figura 8. Programul a fost testat pe calculatorul IBM 1130 al centrului de calcul al Institutului politehnic Bucureşti. Detaliile asupra programului şi rezultate concrete vor constitui obiectivul unei lucrări viitoare.

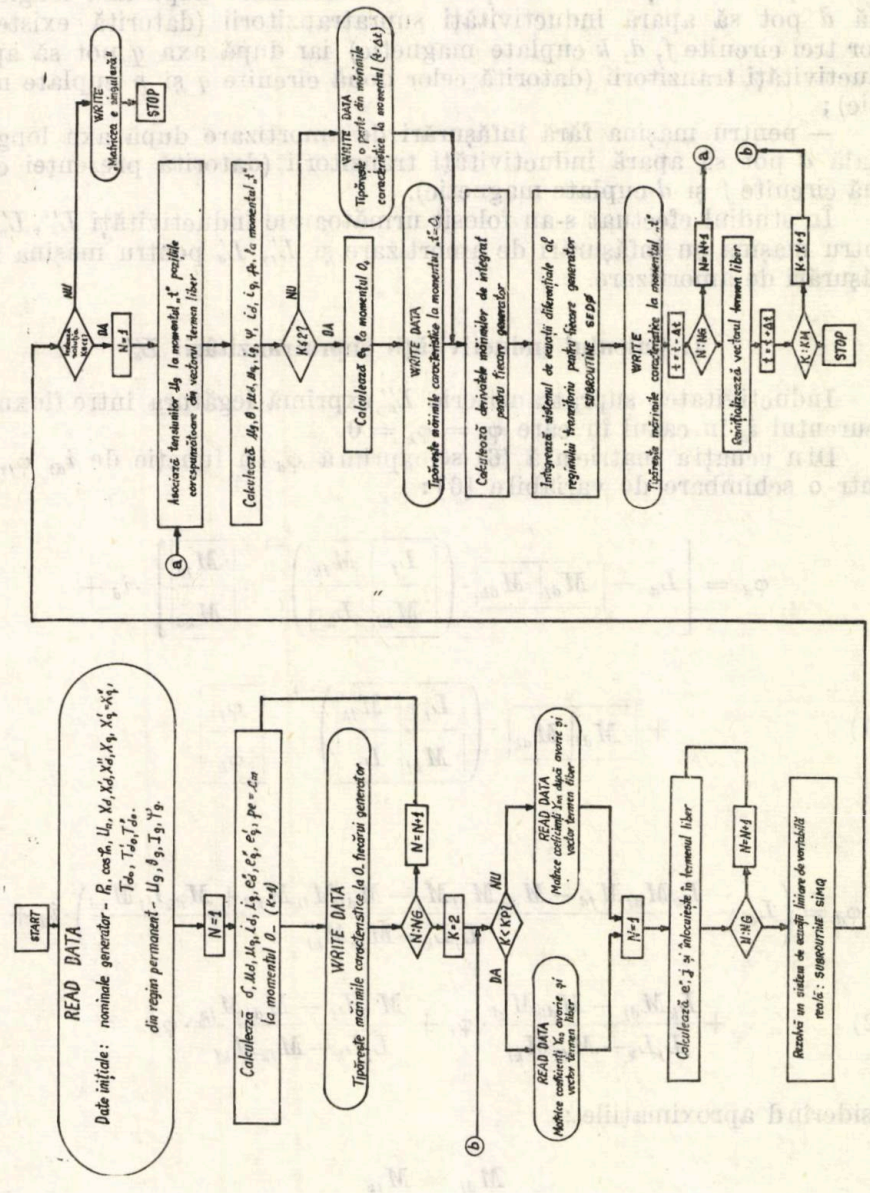

START
READ DATA
Date inițiale: nominale generator - P_n, $\cos\varphi_n$, U_n, X_d, X'_d, X''_d, X_q, $X'_q = X''_q$, T_{do}, T'_{do}, T''_{do}.
din regim permanent - U_g, θ_g, I_g, φ_g.
N=1
Calculează σ, μ_d, μ_q, i_d, i_q, e''_d, e'_q, e''_q, $p_e = c_m$ la momentul 0_- (K=1)
WRITE DATA
Tipărește mărimile caracteristice la 0_- fiecărui generator
N:NG
N=N+1
K=2
K<KP
DA
NU
READ DATA
Matrice coeficienți Y_{ns} ovarie și vector termen liber
READ DATA
Matrice coeficienți Y_{nn} după avarie și vector termen liber
N=1
Calculează e''_j și înlocuiește în termenul liber
N:NG
N=N+1
Rezolvă un sistem de ecuații liniare de variabilă reală: SUBROUTINE SIMQ
Asociază tensiunilor U_g la momentul „t" pozițiile corespunzătoare din vectorul termen liber
Calculează μ_g, θ, μ_d, μ_q, i_g, φ, i_d, i_q, p_e la momentul „t"
K≤2?
NU
DA
Calculează e_q la momentul 0_+
WRITE DATA
Tipărește mărimile caracteristice la momentul „t"
WRITE DATA
Tipărește o parte din mărimile caracteristice la momentul (t-Δt)
Calculează derivatele mărimilor de integrat pentru fiecare generator
Integrează sistemul de ecuații diferențiale al regimului tranzitoriu pentru fiecare generator
SUBROUTINE SEDØ
WRITE
Tipărește mărimile caracteristice la momentul „t"
t=t-Δt
N:NG
N=N+1
Reinițializează vectorul termen liber
t=t+Δt
K:KM
K=K+1
STOP
WRITE
„Matricea e singulară"
STOP
a
b

Fig. 8

ANEXA

Din reprezentarea Park-Gorev a mașinii sincrone (fig. 1) se constată că :

— pentru mașina cu înfășurări de amortizare după axa longitudinală d pot să apară inductivități supratranzitorii (datorită existenței celor trei circuite f, d, k cuplate magnetic) iar după axa q pot să apară inductivități tranzitorii (datorită celor două circuite q și p cuplate magnetic) ;

— pentru mașina fără înfășurări de amortizare după axa longitudinală d pot să apară inductivități tranzitorii (datorită prezenței celor două circuite f și d cuplate magnetic).

În studiul efectuat s-au folosit următoarele inductivități L_d'', L_p', L_q', pentru mașina cu înfășurări de amortizare și L_f', L_d' pentru mașina fără înfășurări de amortizare.

1. Calculul inductivității supratranzitârii L_d''

Inductivitatea supratranzitorie L_d'' exprimă legătura între fluxul φ_d și curentul i_d în cazul în care $\varphi_f = \varphi_k = 0$

Din ecuația matricială (6) se exprimă φ_d în funcție de i_d, φ_f, φ_k, printr-o schimbare de variabile [6] :

$$\varphi_d = \left[L_d - \left| M_{df} \middle| M_{dk} \right| \cdot \left(\left| \frac{L_f}{M_{kf}} \middle| \frac{M_{fk}}{L_k} \right| \right)^{-1} \cdot \left| \frac{M_{fd}}{M_{kd}} \right| \right] \cdot i_d +$$

$$+ \left| M_{df} \middle| M_{dk} \right| \cdot \left(\left| \frac{L_f}{M_{kf}} \middle| \frac{M_{fk}}{L_k} \right| \right)^{-1} \cdot \left| \frac{\varphi_f}{\varphi_k} \right| \tag{A.1}$$

sau

$$\varphi_d = \left(L_d - \frac{L_k M_{df} M_{fd} - M_{dk} M_{kf} M_f - M_{df} M_{fk} M_{kd} + M_{dk} L_f M_{kd}}{L_f L_k - M_{fk} M_{kf}} \right) \cdot i_d +$$

$$+ \frac{L_k M_{df} - M_{dk} M_{kf}}{L_f L_k - M_{fk} M_{kf}} \cdot \varphi_f + \frac{M_{dk} L_f - M_{df} M_{fk}}{L_f L_k - M_{fk} M_{kf}} \cdot \varphi_k \tag{A.2}$$

considerînd aproximațiile :

$$\begin{aligned} M_{df} &= M_{fk} \\ M_{dk} &= L_k \\ M_{pq} &= L_q \end{aligned} \tag{A.3}$$

relația (A.2) devine:

$$\varphi_d = (L_d - L_k)\, i_d + \varphi_k \tag{A.4}$$

în cazul $\varphi_f = \varphi_k = 0$

$$\varphi_d = (L_d - L_k)\, i_d = L_d'' \cdot i_d$$

de unde:

$$L_d'' = L_d - L_k \tag{A.5}$$

2. Calculul inductivităților tranzitorii L_q' și L_p'

Inductivitatea tranzitorie L_q' exprimă legătura între fluxul φ_q și curentul i_q în cazul în care $\varphi_p = 0$

Din ecuația matricială (7) se exprimă φ_q în funcție de i_q, φ_p:

$$\varphi_q = \left(L_q - \frac{M_{qp} M_{pq}}{L_p}\right) i_q + \frac{M_{qp}}{L_p} \varphi_p \tag{A.6}$$

Pentru $\varphi_p = 0$

$$\varphi_q = \left(L_q - \frac{M_{qp} M_{pq}}{L_p}\right) i_q = L_q' \cdot i_q$$

de unde:

$$L_q' = L_q - \frac{M_{qp} M_{pq}}{L_p} \tag{A.7}$$

Analog din ecuația matricială (7) pentru $\varphi_q = 0$ se obține:

$$L_p' = L_p - \frac{M_{pq} M_{qp}}{L_q} \tag{A.8}$$

3. Calculul inductivităților tranzitorii L_d' și L_f'

Inductivitatea tranzitorie L_d' exprimă legătura între fluxul φ_d și curentul i_d în cazul în care $\varphi_f = 0$

Din ecuația matricială (13) se exprimă fluxul φ_d în funcție de i_d, φ_f:

$$\varphi_d = \left(L_d - \frac{M_{df} M_{fd}}{L_f}\right) i_d + \frac{M_{df}}{L_f} \cdot \varphi_f \tag{A.9}$$

Pentru $\varphi_f = 0$

$$\varphi_d = \left(L_d - \frac{M_{df}\, M_{fd}}{L_f}\right) i_d = L'_d \cdot i_d$$

de unde:

$$L'_d = L_d - \frac{M_{df}\, M_{fd}}{L_f} \tag{A.10}$$

Analog, din ecuaţia matricială (13) pentru $\varphi_d = 0$ se obţine:

$$L'_f = L_f - \frac{M_{fd}\, M_{df}}{L_d} \tag{A.11}$$

4. Deducerea tensiunilor electromotoare supratranzitorii e''_d şi e''_q

Înmulţind cu ω_0 relaţia (A.6):

$$\omega_0 \varphi_q = \omega_0 L'_q i_q + \omega_0 \frac{M_{qp}}{L_p} \varphi_p$$

şi ţinînd seama de schimbarea de variabile (18) şi de neglijarea rezistenţei statorice în ecuaţia (8) ($u_d \simeq \omega_0 \varphi_q$) se obţine:

$$e''_d = u_d - \chi''_q i_q \tag{A.12}$$

În relaţia (A.12) pentru uniformizarea notaţiilor în loc de χ'_q se foloseşte χ''_q.

Înmulţind cu ω_0 relaţia (A.4):

$$\omega_0 \varphi_d = \omega_0 L''_d i_d + \omega_0 \varphi_k$$

şi ţinînd seama de schimbarea de variabile (17), de neglijarea rezistenţei statorice în ecuaţia (9) ($u_q = -\omega_0 \varphi_d$) şi de aproximaţia $M_{dk} = L_k$ se obţine:

$$e''_q = u_q + \chi''_d i_d \tag{A.13}$$

Catedra de reţele electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1 *E. Pololea*, Calculul regimului permanent al sistemelor electrice. București, Ed. Teh. 1967.
2 *C. Barbier, Ph. Barret, G. Pioger, P Sapet* Utilisation des calculatrices numériques pour l'étude de la stabilité des, réseaux de transport d'énergie. Revue Generale de l'Electricité. Tome 77 nr. 78 1968.
3 *S. Ionescu, ş.a.*, Algoritm pentru calculul regimurilor dinamice din sistemul electroenergetic. Energetica, nr. 4, 1969.
4 *D. W. Olive* — New Techniques for the Calculation of Dynamic Stability. IEEE Transcations — on Power. Apparatus and Systems. Vol. PAS-85, nr. 7, 1966.
5 *P. Dimo ş.a.* — Calculul şi proiectarea sistemelor electroenergetice. București, Ed. Teh. 1972.
6 *H. Edelman* — Calculul electric al reţelelor interconectate. București. Ed. Tehnică 1966.
7 *V. Nedelcu* — Regimurile de funcţionare ale maşinilor de curent alternativ. București. Ed. Teh. 1968.
8 *Mc. Cracken, Dorn W.S.* — Numerical Analysis and Fortran Programming, New-York, John Whiley and sons, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

C.Z.: 621.2

HIDRAULICĂ

NEUE METHODE FÜR DEN ENTWURF DER PELTONSCHAUFEL UND IHRE ÜBERPRÜFUNG MITTELS MODELVERSUCHE

ST. ZAREA, N. VASILIU

1. Zweck der Arbeit

Für die Konstruktion der Arbeitsfläche der Schaufel einer Peltonturbine verwendet man halbempirische Methoden [1,2], jedoch in den letzten Jahren wurde eine grapho-analytische Methode ausgearbeitet [3, 4,5]. In diesem Beitrag wird eine neue Variante der Methode vorgeschlagen und die konstruktiven sowie die funktionellen Eigenschaften einer Pelton-Modellturbine, deren Schaufeln mittels der vorgeschlagenen Methode entworfen wurden, mitgeteilt.

2) Entwurfsmethodik der Schaufel

Die Arbeitsfläche der Schaufel ist dann bestimmt wenn man die Schnittskurven derselben mit parallelen Ebenen P, die senkrecht auf der Austrittskantenebene und der Symmetrieebene liegen (Abb. 1), bekannt sind. Diese Kurven, nennt man ω-Kurven (Abb. 2).

Die vorgeschlagene Methode besteht in der Konstruktion der ω — Kurven, die vollkommen bestimmt sind, wenn man folgende Bedingungen der Schaufel kennt:

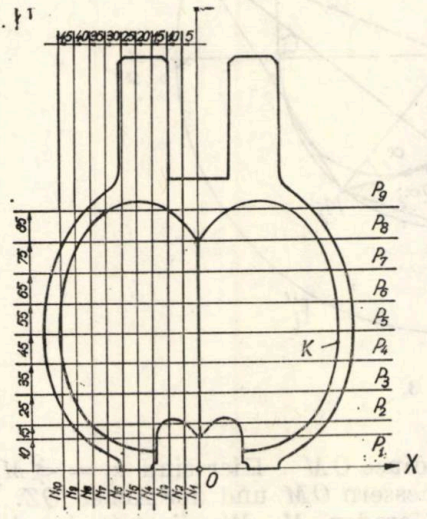


Fig. 1.

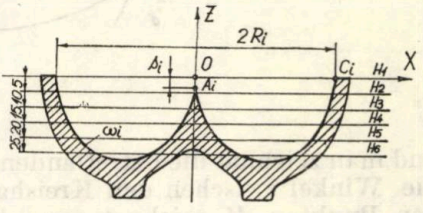


Fig. 2.

* Manuscript am 10 Mai eingegangen

— Form der Austrittskante der Schaufel (Kurve K, Abb. 1), die vom Durchmesser des Wasserstrahls abhängig ist [1,2];

— Lage der Eintrittskante in Bezug auf die Austrittskanten-Ebene;

— Form des Randschnittes.

Die Höchstöffnung $2R_i$, einer beliebigen Schnittfläche ω_i (Abb. 2) erhält man aus dem Schnitt der Kurve K, mit der betreffenden Ebene der Familie P_i.

Die Entfernung s_i vom Winkelpunkt A_i der Kurve ω_j zur Ebene der Austrittskante, bestimmt man durch das Aufzeichnen der relativen Bahnen der Wasserteilchen gegenüber dem Laufrad.

Die Konstruktion einer ω Kurve mit der vorgeschlagenen Methode erfolgt folgendermassen:

Man zeichnet in der Ebene P_i einen Halbkreis Γ_i, dessen Durchmesser gleich der Höchstöffnung des betreffenden Schnittes $2R_i$ ist. Diesen Halbkreis bezieht man auf ein kartesisches Koordinatensystem, das aus zwei senkrechten Durchmessern besteht (Abb. 3). Die Achse OX stellt die Projektion der Austrittskantenebene der Schaufel dar.

Auf dem Bogen B_iC_i des Halbkreises Γ_i, wählt man einige Punkte M_j, $j = 1,2 \ldots n$, die z.B. in gleicher Entfernung zwischen ihnen liegen

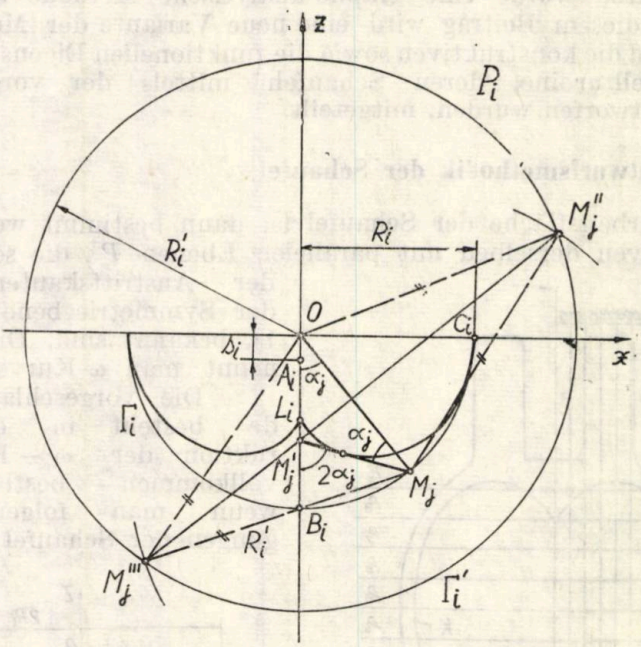


Fig. 3.

und man zeichnet die betreffenden Radiuse OM_j. Hier sind $\alpha_j = \sphericalangle M_jOB$ die Winkel zwischen den Kreishalbmessern OM und der Achse OZ. Aus den Punkten M_j zeichnet man die Geraden M_j, M_j', die mit der Achse OZ, die Winkel $\sphericalangle M_jM_j'B_i = 2\ \alpha_j$; bilden. (Die Punkte M_j' liegen auf der Achse OZ).

Die Hüllkurve der Halbgeraden $M_jM'_j$ macht die Hälfte der gesuchten Kurve ω_i aus.

Um die Fehler bei der Messung der Winkel α_j und 2 $j\alpha_j$, zu umgehen, bemerken wir, dass die Geraden M_j, M'_j ohne Messung dieser Winkel konstruirt werden können, welches Verfahren diese Methode von der vorhergehenden unterscheidet [3,4]. Man bemerkt, dass die Dreiecke $OM_jM'_j$ gleichschenklig sind $\left(\sphericalangle M_jOM'_j = \sphericalangle M'_jM_jO = \frac{1}{2} \sphericalangle M_jM'_jB_i\right)$, also die Punkte M_j befinden sich auf den Schnitten der Achse OZ mit der Mittelsenkrechten der OM_j.

Die graphische Konstruktion für die Bestimmung der Punkte M_j erfolgt folgendermassen : man zeichnet einen Kreis Γ'_i, mit einem Radius R'_i, konzentrisch mit dem Halbkreis Γ_i. Aus den Punkten M_j zeichnet man Kreisbögen mit Radiuse R_i, die den Kreis Γ'_i in den Punkten M''_j und M'''_j schneiden. Die Geraden $M''_jM'''_j$ schneiden die Achse OZ in den gesuchten Punkten M'_j.

Die mit diesem Verfahren erhaltene Kurven sind den üblichen sehr ähnlich, sie besitzen aber nicht entsprechende Werte der Winkel β_1 und β_2.

Um die nötigen Werte dieser Winkel zu erhalten, so dass sie den tadellosen Ein- und Ausfluss des Wassers aus der Schaufel sichern, kann man eine Verbesserung der Kurven durch die ungleichmmässige Verschiebung der vorher erhaltenen Punkte erzielen, welches Verfahren den Unterschied gegenüber der vorhergehenden grapho-analytischen Methode bildet [3, 4,5].

Die Verschiebung erfolgt so, dass der Punkt C_i auf der Achse OZ unverändert bleibt und der Winkelpunkt L_i auf der Achse OZ auf der Hälfte des Radiuses OB_i gelegen, im Punkt A_i auf der Eintrittskante der Schaufel kommt. Man kann mehrere Translationsarten der Punkte der ω_i Kurven anwenden, weil, wie es allgemein bekannt ist, die Form der ω Kurve in der Energieübertragung vom Wasserstrahl zum Laufrad keine wesentliche Rolle spielt.

Für die Schaufeln der entworfenen Turbine, erfolgte die Verschiebung der ω_i Kurven, indem man Parabeln dritter Ordnung verwendete (Abb. 4).

Die Gleichung der Parabel, die der Kurve ω_i entspricht ist :

$$X = K_iZ^3$$

Der Koeffizient K_i wird durch folgende Bedingungen erfüllt : $x = R_i$; $Z = \overline{L_iA_i} = R_i/2 - s_i = h_i$, also $K_i = R_i/h_i^3$.

Mit diesem Verfahren wurden die endgültigen Schnitte durch die Schaufel erhalten (Abb. 5, a,b).

Um die Kontinuität der erhaltenen Fläche zu prüfen, konstruirten wir auch die Schnitte derselben mit zwei anderen parallelen Ebenen N_i und N'_i mit der Symmetrieebene der Schaufel und der Ebene der Austrittskante der Schaufel (Abb. 6 und 7).

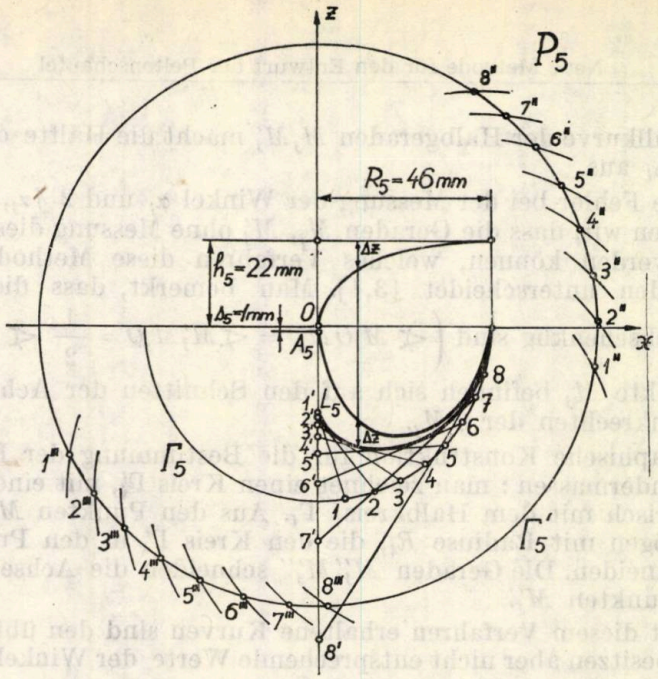


Fig. 4.

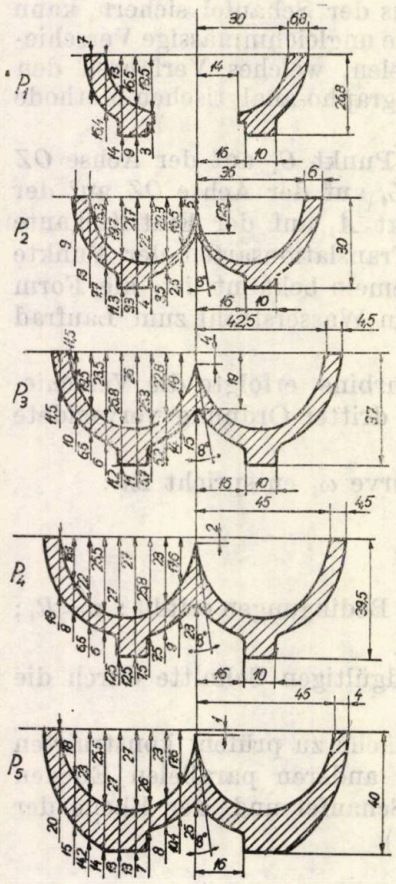


Fig. 5. *(a)*

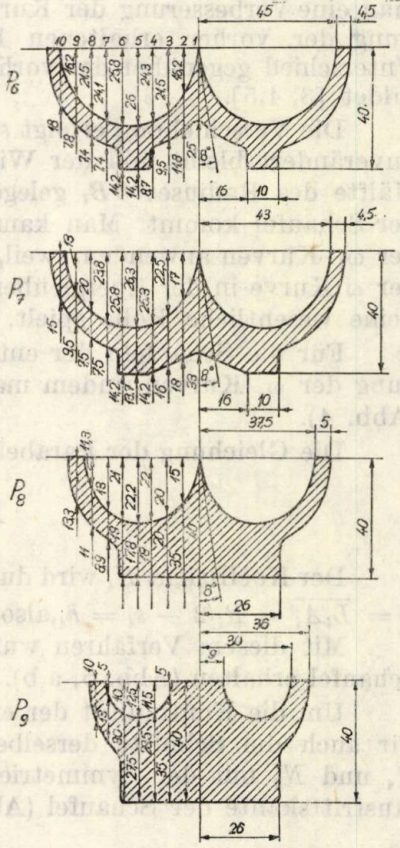


Fig. 5. *(b)*

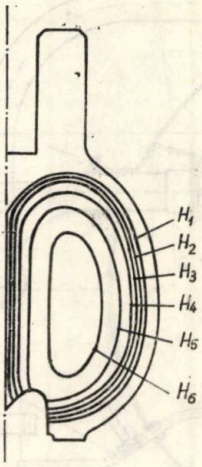


Fig. 6.

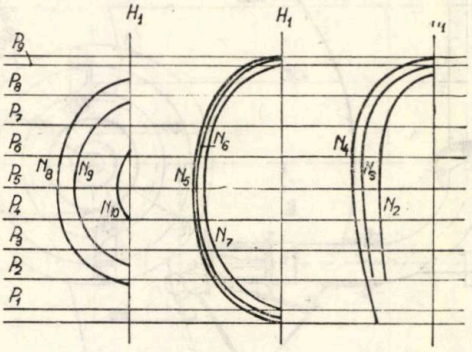


Fig. 7.

3) Beschreibung des Peltonturbinenmodells

Die Verfasser haben eine Peltonturbine entworfen, die Konstruktion und die Montage überwacht für folgende Parameter:

Fall höhe	H	= 50 m
Durchflussmenge	Q	— 27 8 l/s
Kraft	P	= 15 P.S
Drehzahl	n	= 750 u/min
Schnelläufigkeit	n_s	= 22

Die Achse der Maschine ist senkrecht (Abb. 8 und 9).

Der Stator (Abb. 10) besteht aus zwei Düsen mit krummer Achse mit folgenden Abmessungen: Körperdurchmesser — 71 mm, Düssendurchmesser = 29 mm. Um die Beobachtung der Strömung ind den Düsen zu ermöglichen, wurden diese aus durchsichtigem Plexiglas angefertigt. Die Düsen sind mit Strahlablenkern mit Gegengewicht versehen und Bewegungsanzeigern (Abb. 11).

Das Laufrad ist aus einer Stahlscheibe angefertigt (Abb. 12), auf welcher 20 gegossene Duraluminiumschaufeln, befestigt sind. Jede Schaufel ist an der Scheibe durch einen einzigen Bolzen befestigt. Die Absperrung der Schaufeln gegen die Drehung ist durch den Kontakt dieser mit dem Rand der Scheibe gesichert. Das Laufrad wurde auf die Durchgangsdrehzahl geprüft und es wurden keine Drehungen der Schaufeln um die Bolzen, unter dem Einfluss der Zentrifugalkräfte beobachtet.

Der Angriffsdurchmesser des Laufrades ist $D_0 = 380$ mm. Das Turbinengehäuse ist kreiszylindrisch und besitzt eine Bremsdüse.

Die eingeschnittene Fenster des Gehäuses möglichen das bequeme Überwachen des Ganges der Maschine.

Die Turbine ist mit einer mechanischen Bremse gekoppelt. Die Bremsklötze haben die Form von Torussegmenten mit rechteckigem

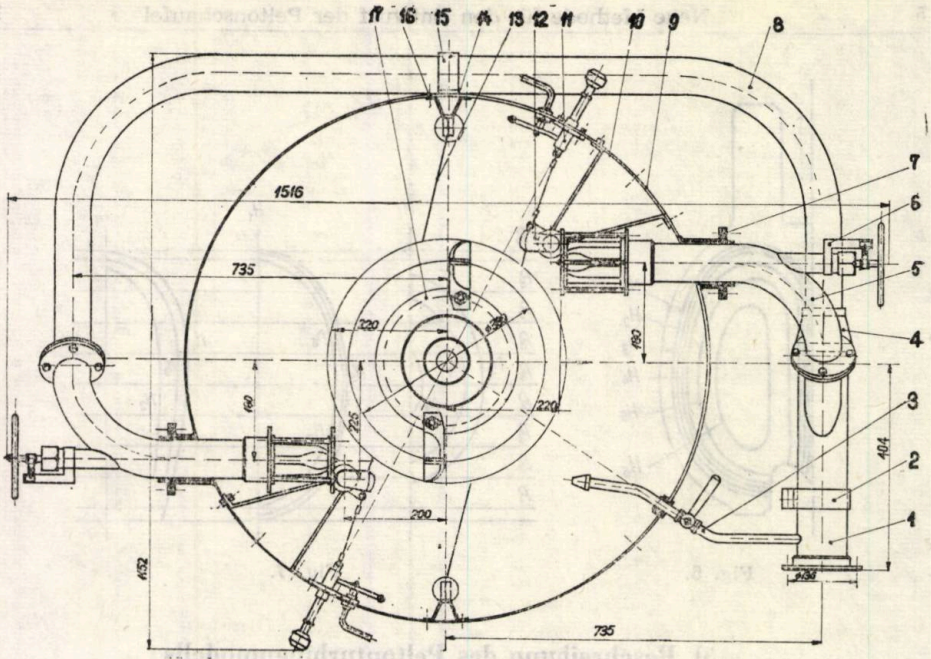

17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1516
735
220
220
200
735
404
1152

Fig. 8.

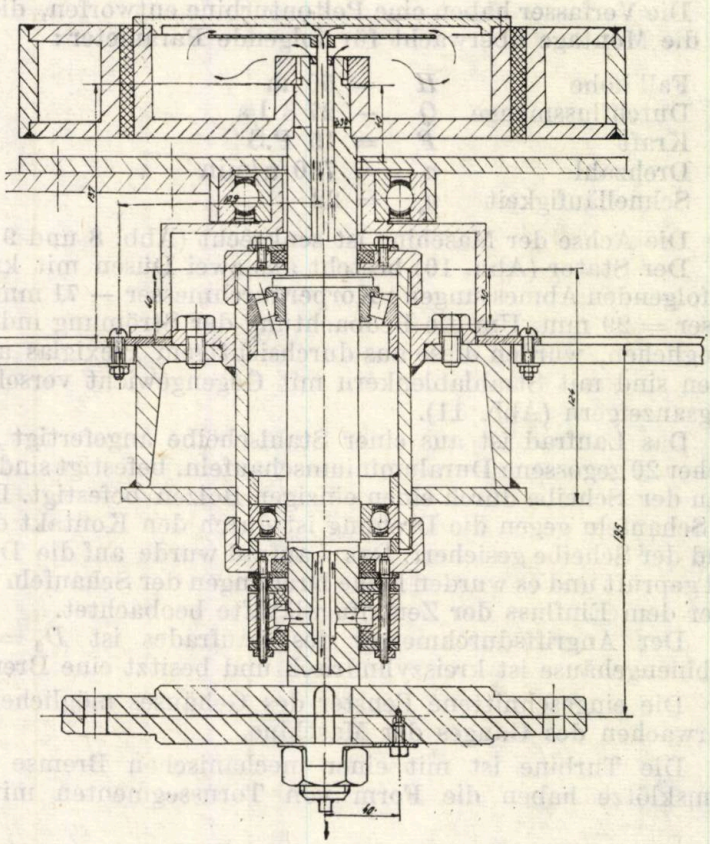


Fig. 9.

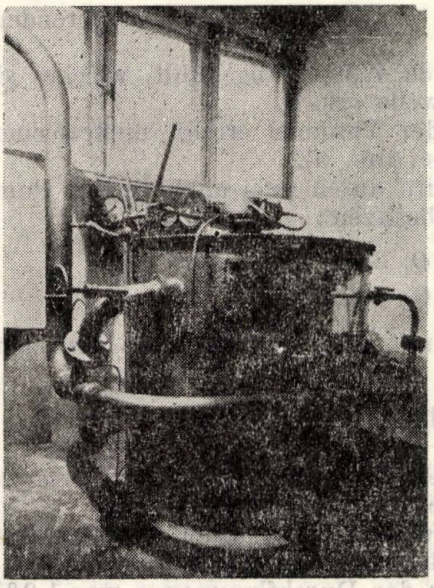


Fig. 20.

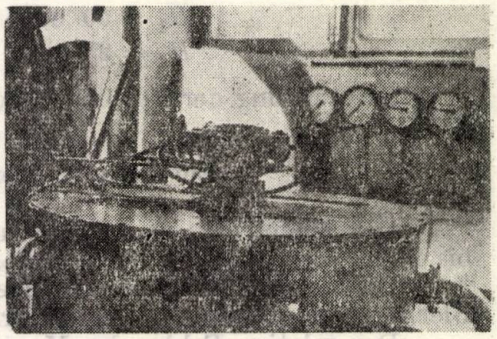


Fig. 11.

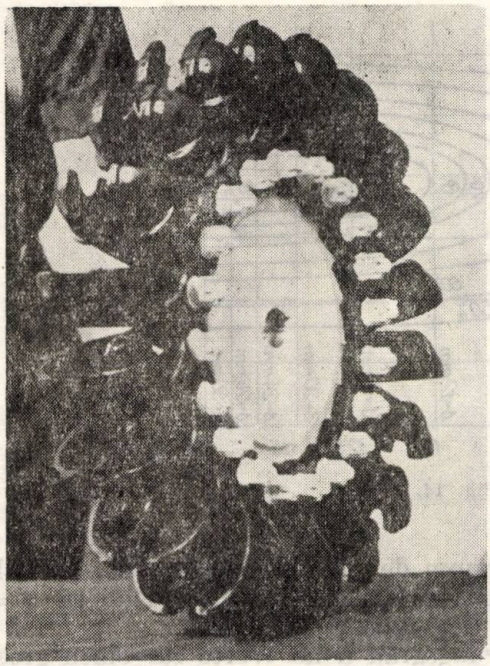


Fig. 12.

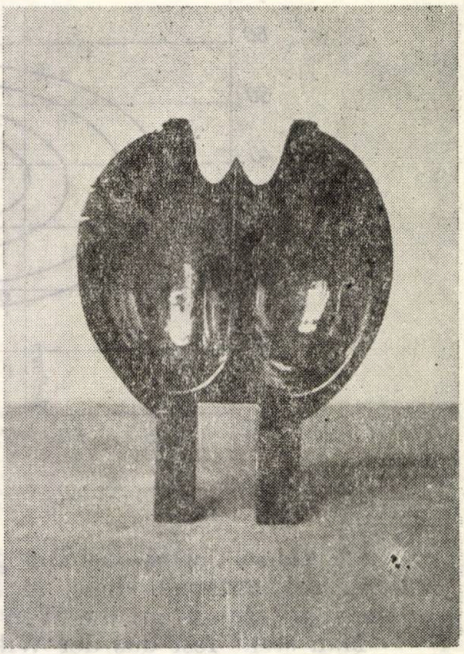


Fig. 13.

Querschnitt und werden durch das in ihrem Innern zirkulierendem Wasser gekühlt (Abb. 9).

Die Bremstrommel ist auch durch Wasser abgekühlt, welches sie von einem Verteiler in der Turbinenwelle erhält.

Die Kühlwasserentfernung aus der Trommel erfolgt mittels eines im Innern der Welle befestigten Rohres (Abb. 9).

Die Wassermenge der Turbine wird durch zwei unabhängige Pumpen geliefert, die folgende Parameter besitzen:

$$H_1 = 50 \text{ m}, \qquad Q_1 = 30 \text{ l/S}$$
$$H_2 = 25 \text{ m}, \qquad Q_2 = 20 \text{ l/S}$$

Die Prüfung der Turbine wurde mit der zweiten Pumpe geschafft.

4) Energetische Kennlinien des Modells

Der Modellversuch erfolgte unter veränderlicher Fallhöhe von 22 bis 27 m, also ungefähr bei der Hälfte der Berechnungsfallhöhe.

Die Messung der Durchflussmenge fand durch einer kreisförmigen Blende statt, die mit der volumetrischen Methode geeicht wurde.

Der relative Fehler der Messung der Durchflussmenge war 1,2%. Die Fallhöhe wurde mit einem metallischen Manometer (Präzisionsklasse 0,6— nr. 190460) und die Drehzahl mittels eines Registriertachometers (nr. 146300), mit einem relativen Fehler von 1%, gemessen.

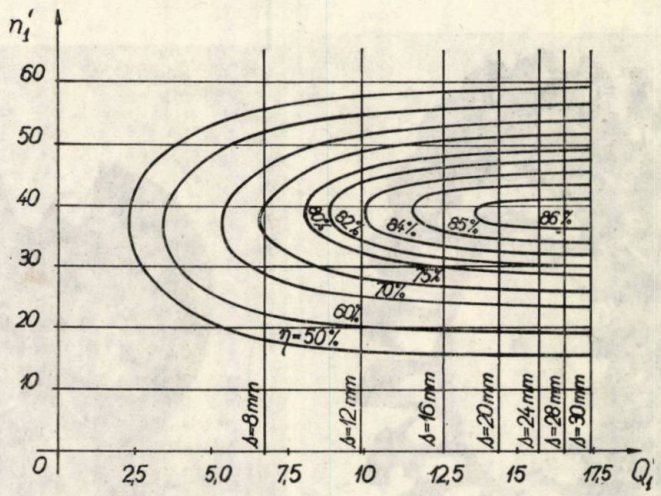


Fig. 14.

In Abb. 14 wird das Topogramm des Modells dargestellt, ähnlich anderer bekannten Modelle, in Bezug auf die Form der Kurven $\eta =$ = Konstant, sowie auf die Werte des Wirkungsgrades.

Man stellt fest das der Wikrungsgrad hohe Werte für einen grossen Variationsbereich der doppelteinheitlichen Durchflussmenge, Q_1' erreicht

Diese Bemerkung ist durch die Ergebnisse von Vercasson bestätigt, an einem Modell mit annähernd gleichen Kennlinien [6]. Bei einer Änderung der Fallhöhe zwischen 10% bis 100% des Nominalwertes änderte sich der maximale Wirkungsgrad nur mit 1% für $Q_1' = 1{,}31$ bis 2,71.

Die Form der Kurven gleichen Wirkungsgrades zeigt dass der Höhepunkt des Topogramms sich an dem rechten Rand der Abbildung 14 oder gar ausserhalb befindet, für $Q_1' > 17{,}5$. Es war nicht möglich das ganze Topogramm zu erhalten, weil die Versuche mit einer Pumpe durchgeführt wurden die einen kleineren Druck und eine kleinere Durchflussmenge als die Berechnungswerte der Turbine hatten.

5. Schlussfolgerungen

Durch eine einfache graphische Konstruktion ermöglicht die vorgeschlagene Methode eine nützliche Form für die Arbeitsfläche der Schaufe zu erhalten indem gleichzeitig Rücksicht auf die hydrodynamischen Bedingungen genommen wird für den korrekten Ein- und Austritt des Wassers aus dem Laufrad.

Das erhaltene Topogramm für das Versuchsmodell hebt die Wirksamkeit der vorgeschlagenen Methode für die Konstruktion der Schaufel von Peltonturbinen hervor.

Wenn man die Form der konstanten Wirkungsgrades und den erhaltenen Maximalwert des Wirkungsgrades in Betracht zieht, ergibt sich die Möglichkeit, dass das verwirklichte und studierte Pelton-modell für didaktische- und Untersuchungszwecke verwendet werden kann.

Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bukarest

LITERATUR

1. *Pavel D., Zarea St.* Turbine hidraulice şi echipamente hidroenergetice. Bucureşti, E.D.P., vol. I, 1965.
2. *Edel I. U.* Kovşovie ghidroturbinî. Moskva, Maşghiz, 1963.
3. *Zarea St.* Metodă grafo-analitică pentru construirea cupei Pelton. Comunicarea la Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1968.
4. *Zarea St.* Nouă metodă pentru trasarea curbelor caracteristice ale cupei Pelton. Comunicare la Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1969.
5. *Zarea Şt.* Méthode graphe-anaytique pour la détermination de l'auget de la turbine Pelton, Rev. Roum. Sci. Techin, Méc. appl. Tome 18, No. 5, 1973.
6. *Vercasson M.* Influence de la chute d'essai sur le debit et le rendement d'un model de turbine Pelton. I.A.H.R. Congress, London, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

AUTOMATICĂ

C.Z.:621—52

OSCILATOARE FLUIDICE NOI*

VASILE GĂBURICI

Elementele fluidice atît cele care sînt bazate pe ataşarea unui jet de aer la un perete solid aflat în apropiere (efectul Coandă), cît şi cele care se bazează pe interacţiunea jeturilor capătă multiple utilizări în dispozitivele de calcul numeric; în special cele din prima categorie sînt folosite pentru obţinerea întregii game de elemente logice, precum şi pentru construirea unor circuite cum ar fi oscilatoarele.

Oscilatoare folosind elemente bazate pe efectul Coandă

În această categorie intră oscilatoarele care utilizează ca element de bază bistabilul sau monostabilul fluidic la care se adaugă reacţii formate din rezistenţe şi capacităţi.

În fig. 1 se prezintă un element bistabil la care jetul de putere P ce iese prin ajutajul 1 se ataşează la unul din pereţii laterali. spre exemplu la peretele 4 şi apare la ieşirea E_1.

Printr-o reacţie formată dintr-o rezistenţă R (strangulare) şi o capacitate C, semnalul E_1 este adus la intrarea de comandă C_1, Jetul care se formează prin ajutajul 3 anulează zona depresionară dintre jetul P şi peretele 4 provocînd desprinderea jetului de putere şi ataşarea lui la peretele lateral 5 de unde iese prin E_2. De aici prin legătura RC semnalul de ieşire se transmite la intrarea de comandă C_2. Jetul de putere va fi comutat din nou către ieşirea E_1 ş.a.m.d.

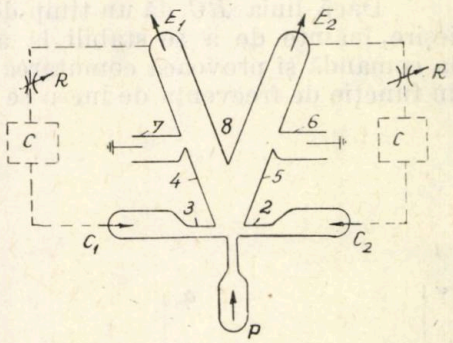


Fig. 1.

Frecvenţa de oscilaţie depinde de întîrzierea cu care semnalul de la ieşirea elementului bistabil este transmis la intrarea de comandă, adică de fapt de valorile rezistenţei R şi ale capacităţii C. Cum volumul care constituie capacitatea C este nemodificabil, frecvenţa de oscilaţie poate fi variată cu ajutorul rezistenţei R, schimbînd secţiunea de curgere a fluidului.

Linia RC mai trebuie calculată nu numai din punctul de vedere al întîrzierii semnalului de reacţie pentru obţinerea unei anumite frecvenţe

* Manuscris predat redacţiei la data de 10 mai 1971.

ci şi din acela al obţinerii unui semnal minim de comandă C, astfel, încît acesta să fie capabil să producă bascularea jetului de putere P. Semnalul C trebuie să aibă o anumită presiune $\left(\frac{1}{10}P \div \frac{1}{5}P\right)$ şi un anumit debit de comutaţie. Pentru aceasta, rezistenţa R nu poate fi oricît de mare iar ieşirea E către utilizare trebuie să fie de debit mic adică sarcina oscilatorului să fie scăzută. O impedanţă de valoare mică pe ieşirea utilă a oscilatorului provoacă mărirea debitului pe acea ieşire ceea ce conduce la o scădere a presiunii statice la intrarea în linia RC şi o diminuare a debitului de comandă. În aceste condiţii, elementul nu mai comută.

Frecvenţele de oscilaţie care se obţin sînt de ordinul sutelor de Hz., iar la construcţiile îngrijite de ordinul KHz.

Trebuie menţionat însă că amplitudinea în presiune şi debit a semnalului de ieşire scade cu creşterea frecvenţei.

Perioada unei oscilaţii T are următorii termeni :

$$T = t_u + t_I + t_c$$

t_u — timpul de creştere a semnalului de comandă pînă la valoarea pragului de comutaţie şi de umplere a bulei (zona depresionară dintre jet şi perete);

t_t — timpul de transport a jetului de putere de la peretele de la care s-a desprins pînă la peretele la care se ataşează;

t_c — timpul de creştere a nivelului presiunii semnalului în canalul de ieşire în care a comutat.

Dacă linia RC dă un timp de întîrziere mic ($t_i < T$), semnalul de ieşire, înainte de a se stabili la amplitudinea sa maximă, se transmite la comandă şi provoacă comutarea jetului de putere. Spectrul oscilaţiilor în funcţie de frecvenţa de lucru se poate urmări în fig. 2.

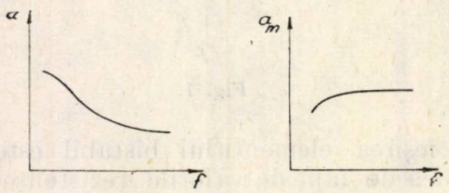


Fig. 2.

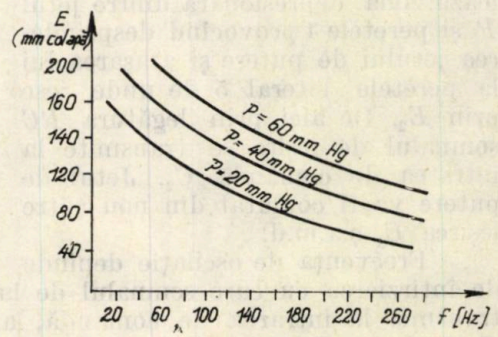


Fig. 3.

Cu creşterea frecvenţei, impulsurile scad în amplitudine şi în acelaşi timp nu mai revin la zero.

Dependenţa valorii semnalului de ieşire în presiune E funcţie de frecvenţa f poate fi urmărită în fig. 3.

Oscilatoarele experimentate s-au comportat stabil pînă la frecvenţe de circa 600 Hz. La aceste frecvenţe semnalul de ieşire este însă prea mic (ordinul milimetrilor coloană apă) pentru a mai fi capabil să comande un alt element fluidic atunci cînd oscilatorul lucrează în cadrul unui dispozitiv.

Un semnal util la ieşire se obţine în schimb pentru frecvenţe care nu depăşesc 100 Hz.

Dacă e nevoie ca oscilatorul să aibă mai multe ieşiri se utilizează două elemente fluidice basculante bistabile legate între ele prin reacţi *RC* (fig. 4).

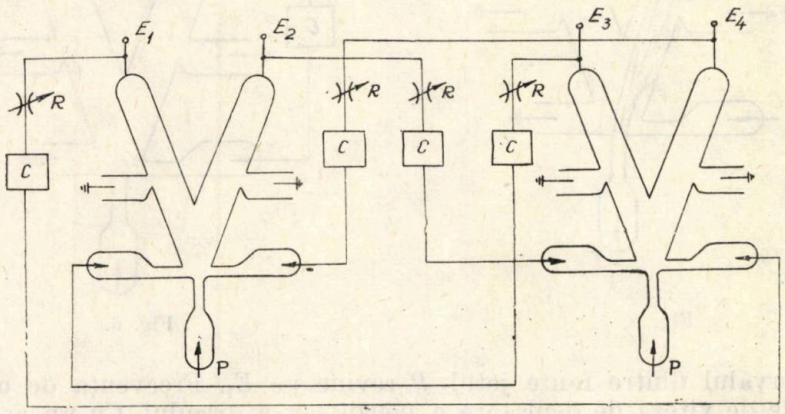


Fig. 4.

În condiţiile în care liniile *RC* dau întîrzieri egale, la ieşirile E_1-E_4 se obţin aceleaşi frecvenţe, decalate între ele cu un timp $t = t_u+t_t+kt_c$ în care factorul $k < 1$ arată că nu este nevoie ca semnalul de la ieşire să aibă amplitutudine maximă, pentru ca el prin linia *RC* să producă bascularea. Factorul k depinde de frecvenţa de lucru şi de lungimea liniei de întîrziere *RC*.

Ca oscilator fluidic poate fi utilizat şi un monostabil (fig. 5). Prin construcţia sa, elementul are numai un perete de ataşare, astfel că jetul de putere *P* iese stabil la ieşirea E_1.

Cu ajutorul unui semnal de comandă *C* jetul poate fi comutat pe ieşirea E_2 după care, la dispariţia lui *C*, revine la ieşirea E_1. Trimiţînd impulsuri în *C* jetul *P* comută pe ieşirea E_2 cu o frecvenţă egală cu a semnalului de comandă *C*. Semnalul obţinut E_2 este de 4 pînă la 10 ori mai puternic decît *C*. Impulsurile în *C* pot fi obţinute de la acelaşi element printr-o reacţie *RC* (fig. 6) sau mecanic cu ajutorul unei benzi sau discuri cu fante (fig. 7) care prin mişcare întrerupe un jet.

La elementul din fig. 6 jetul de putere *P* ataşează iniţial la peretele din stînga. Semnalul de presiune obţinut pe partea de ataşare se aplică prin reacţia *RC* la intrarea de comandă a monostabilului, provocînd bascularea jetului *P* către ieşirea oscilatorului *E*. Prin circuitul *RC* nu va mai circula aer şi jetul *P* revine la peretele din stînga ş.a.m.d. Cu monostabilul se obţin frecvenţe de acelaşi ordin cu cele generate de un bistabil.

La oscilatorul format dintr-un monostabil comandat mecanic (fig.8), de o parte a benzii perforate se găseşte un ajutaj prin care se trimite aer, de cealaltă parte se instalează elementul monostabil cu intrarea de comandă C. La trecerea fantei, monostabilul comută pe E_2, după care

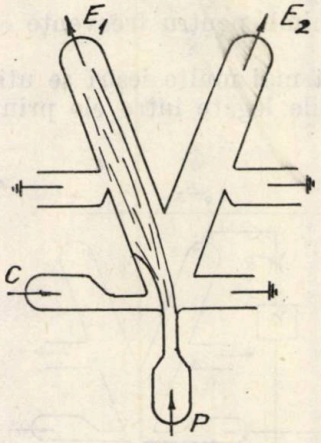


Fig. 5.

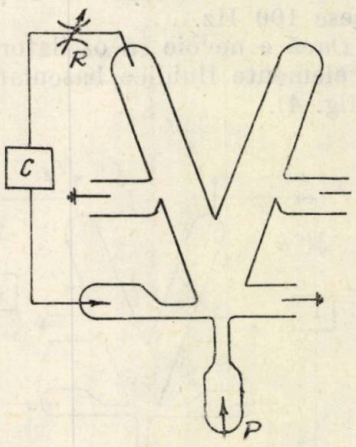


Fig. 6.

la intervalul dintre fante jetul P revine pe E_1. Frecvenţa de oscilaţie depinde de viteza de deplasare a benzii sau a discului. Cu un asemenea dispozitiv s-au obţinut frecvenţe de 400 Hz. Forma undei E_2 depinde

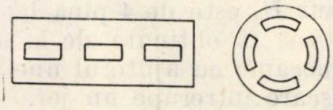


Fig. 7.

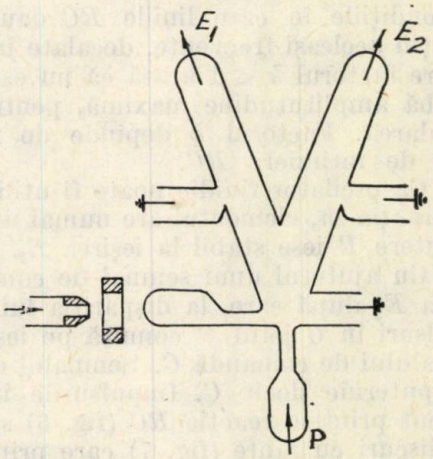


Fig. 8

de geometria fantei. Ajutajul care trimite jetul de aer spre monostabil trebuie să fie alimentat cu o presiune de circa trei ori mai mare decît presiunea minimă de comutaţie, întrucît apar pierderi de presiune în ajutaj şi în intervalul dintre acesta şi canalul de comandă al monostabilului.

Un oscilator fluidic de concepţie proprie care poate fi comandat de la distanţă printr-un semnal continuu de presiune a fost realizat cu ajutorul unui element basculant bistabil şi a două elemente logice *SI* pasive, bazate pe interacţiunea jeturilor de aer montate pe intrările de comandă (fig. 9).

Presupunem că iniţial jetul P comută către ieşirea E_1; de aici, printr-o legătură de reacţie semnalul ajunge la elementul SI_1. Dacă semnalul de comandă este prezent, acesta interacţionează cu semnalul E_1 prin com-

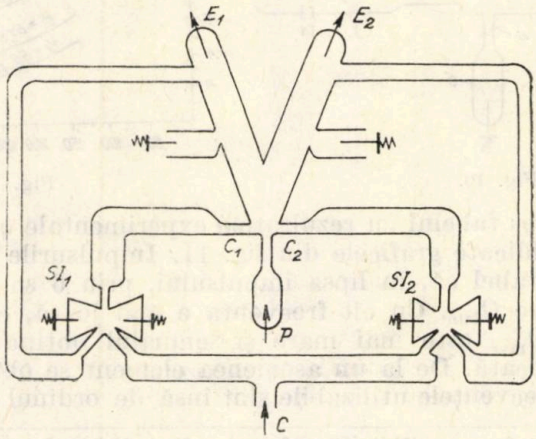


Fig. 9.

punere vectorială iar jetul rezultat constituie comanda C_1 pentru bistabil şi comută jetul P spre ieşirea E_2. De data aceasta semnalul E_2 este acela care în elementul SI_2 interacţionează cu semnalul C mereu prezent dînd o comandă C_2 care comută jetul P din nou spre ieşirea E_1 ş.a.m.d. Atît timp cît C este prezent, oscilatorul funcţionează dînd pe rînd im. pulsuri la ieşirile E_1 şi E_2. Interupînd semnalul C, elementul îşi încetează funcţionarea, jetul P rămînînd comutat pe una din ieşirile E_1 sau E_2. Frecvenţa de oscilaţie depinde de constanta de timp a liniei de reacţie la care se adaugă constanta de timp a elementelor *SI* avînd în vedere că şi acestea sînt caracterizate de prezenţa unor rezistenţe şi capacităţi. Cu un asemenea element s-au obţinut frecvenţe în jur de 400 Hz.

Oscilatoare fluidice bazate pe fenomene acustice

Asemenea oscilatoare au fost obşinute cu ajutorul unor capacităţi (volume închise) şi rezistenţe (fig. 10).

Prin ajutajul 1 se formează un jet de aer alimentat la presiunea P. Jetul se îndreaptă prin ajutajul 2 în camera închisă 3 de volum V. Cînd se umple această cameră, jetul iese afară prin 6 sub forma unui impuls prin care totodată se descarcă şi capacitatea 3.

Volumul 3 se umple din nou, în timp ce impulsul prin 6 dispare ş.a.m.d. Camera elementului trebuie în mod obligator să fie pusă în legătură cu atmosfera prin ajutajul 4 şi canalul 5.

Frecvenţa impulsurilor obţinute în 6 depinde de volumul V, de impedanţa legăturii cu atmosfera 4 şi 5, şi de presiunea de alimentare P.

Mărind rezistența 4, crește frecvența semnalelor obținute în 6. Frecvența crește de asemenea cu scăderea presiunii de alimentare și cu scăderea volumului V al camarei 3.

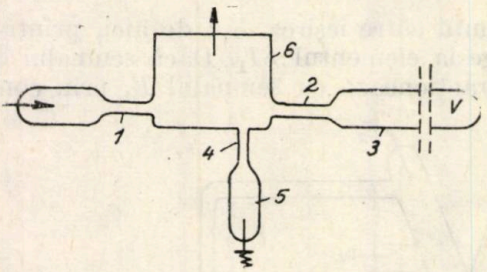


Fig. 10.

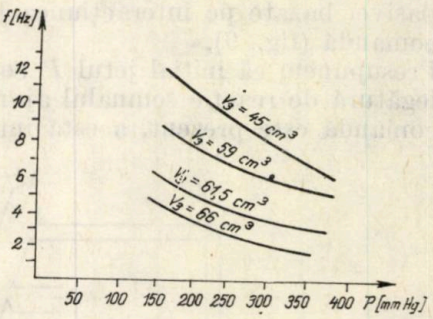


Fig. 11.

Dăm mai jos tabelul cu rezultatele experimentale obținute, pe baza cărora au fost ridicate graficele din fig. 11. Impulsurile nu cad la zero. Se observă din tabel că, în lipsa impulsului, prin 6 se scurge un debit de aer de valoare Q_{min}. Cu cît frecvența e mai joasă, cu atît diferența dintre Q_{min} și Q_{max} este mai mare și semnalul obținut la ieșire are o utilitate mai ridicată. De la un asemenea element se obțin frecvențe de ordinul KHz. Frecvențele utilizabile sînt însă de ordinul Hertzilor.

P (mm Hg)	$V_3 = 45$ cm³			$V_3 = 59$ cm³			$V_3 = 61{,}5$ cm³			$V_3 = 66$ cm³		
	Q_6(1/min)		f	Q_6(1/min)		f	(Q_6(1/min)		f	Q_6(1/min)		f
	Q_{max}	Q_{min}		Q_{max}	Q_{min}		Q_{max}	Q_{min}		Q_{max}	Q_{min}	
150	85	80	10	110	95	7	120	60	5	135	54	4
190	105	87	8	120	110	6	140	65	4	161	55	3,2
230	128	100	7	140	110	5	170	80	3	188	58	2
270	145	122	6	210	90	4	210	100	2,6	220	70	1,3
330	190	163	5,2	240	100	3	300	100	2	315	85	0,8

Catedra de automatică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Florea S. Dumitrache I. Găburici V.* — Considerații asupra elementelor de calcul pneumatice cu jet — Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București nr. 1, 1965
2. *Găburici V.* — Elemente fluidice bistabile cu intrare de numărare — Automatica și Electronica nr. 6, 1970
3. *Găburici V. Ghimpețeanu V.* — Utilizarea elementelor fluidice în comanda secvențială a mașinilor unelte-Comunicare la sesiunea republicană „Procese și utilaje de prelucrare la rece", Timișoara, 1970
4. *Pierre Facon* — Fluid Logic Devices Elementary Circuits and Applications — Second Cranfield Fluidics Conference Cambridge, 1967
5. *Dummer G.W.A. J. Mackenzie Robertson* — Fluidic Components and Equipment 1968—1969, Pergamon Press.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

C.Z.: 621

CONSIDERAȚII ASUPRA CONCEPTULUI DE SISTEM TEHNOLOGIC ÎN TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIEI DE MAȘINI *

A. BRĂGARU, I. POPESCU

1. Conceptul actual de sistem tehnologic elastic (*S.T.E.*)

Lucrările de specialitate și cercetările cu caracter teoretic sau practic în domeniul tehnologiei construcției de mașini admit referitor la sistemul tehnologic elastic formularea : $MU-D-P-S$, (mașina-unealtă —dispozitiv—piesă—sculă aşchietoare)[8], [3], [4], sau chiar formularea $M-P-S$(mașină—piesă—sculă) — în special în literatura tehnică americană și germană [9].

Conținutul acestei noțiuni, ($S.T\ E. \equiv M\ -D-P-S$) (fig. 1) este rezultatul unei evoluții istorice a studiului teoretic și practic a unui anumit element ale *S.T.E.*, considerîndu-le pe celelalte auxiliare, (pe plan secundar).

Spre exemplu, cercetările privitoare la creșterea performanțelor sculelor aşchietoare au considerat pe plan secundar maşina-unealtă, ca ulterior, pe baza rezultatelor obținute să impună creșterea performanțelor acesteia.

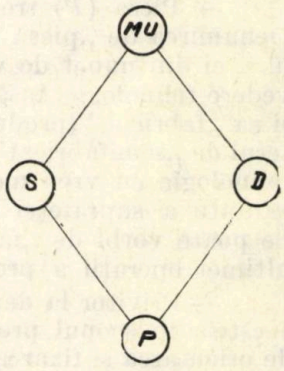


Fig. 1.

Scopul proceselor din cadrul *S.T.F.* fiind obținerea unei anumite precizii de prelucrare în condițiile unui preț de cost minim și a unei productivități corespunzătoare, preocupările de creștere continuă a preciziei au determinat cercetări asupra fiecărui element al *S.T.E.* din diverse puncte de vedere : precizie geometrică, precizie cinematică, uzură, deformații elastice, vibrații, deformații termice, precizie de orientare și fixare, tensiuni interne, fiabilitate etc., cu finalizarea unei soluții constructive cît mai apropiată de soluția optimă.

2. Dezavantajele conceptului actual de S.T.E.

Prin analiza atentă în primul rînd din punct de vedere constructiv a diverselor *S.T.E.* concrete se poate observa neconcordanța dintre

* Manuscris predat redacției la data de 13 iunie 1972.

structura organologică reală a acestora şi schema prezentată anterior (vezi fig. 1). Se observă neincluderea în schemă a dispozitivului de orientarea şi fixarea sculei (*D.O.F.Sc.*), deşi în unele lucrări se aminteşte de existenţa lui [7], [4], [5]. Analizînd mai în profunzime factorii preciziei de prelucrare se poate constata rolul deosebit de important al *D.O.F.Sc.* în cadrul diverselor *S.T.* materializate (la prelucrări pe maşini de găurit, de frezat etc.), în asigurarea preciziei de prelucrare, fapt ce nu justifică omiterea lui din conceptul de *S.T.E.*

În literatura de specialitate în cazul în care se analizează dispozitivul de prinderea sculei din vreun punct de vedere, (de regulă organologic), acesta este denumit „sculă auxiliară (ajutătoare) „[10], iar standardele de stat din ţara noastră au impus acastă denumire la nivel naţional (STAS 250—61; STAS 1657—66 etc.)

Considerăm improprie această denumire dat fiind faptul că o justificare de fond a rolului „auxiliar" nu se poate accepta din nici un punct de vedere.

Absenţa *D.O.F.Sc.* din conceptul de *S.T.E.* şi denumirea sa improprie la ora actuală ar putea fi explicate, într-un fel, prin aceea că în cadrul anumitor *S.T.E.* concrete acest dispozitiv nu este frecvent schimbabil şi „pare" a fi parte integrantă a maşinii unelte, (de exemplu la strunguri etc.), sau este constituit din una sau un număr redus de piese, (de exemplu la diferite prelucrări pe maşini de găurit, de frezat etc.), sau pur şi simplu poate lipsi, (de exemplu la diferite prelucrări pe maşini de găurit).

Privitor la conceptul actual de *S.T.E.* se mai pot sesiza următoarele aspecte :

— Piesa (*P*) trebuie denumită semifabricat (*S*) în cadrul *S.T.E.* Denumirea de „piesă" a fost adoptată probabil plecînd de la ideea definirii ei din punct de vedere constructiv şi funcţional [1]. Din punct de vedere tehnologic, însă, obiectul muncii poate fi definit ca „semifabricat" şi ca „fabricat" (produs finit — piesă). Semifabricatul îşi păstrează caracterul de „semifabricat" atîta timp cît asupra lui se intervine prin procesul tehnologic cu vreo modificare dimensională, de formă, de structură, de calitate a suprafeţei etc., deci pe tot parcursul procesului tehnologic. Se poate vorbi de „fabricat" sau „piesă" ca atare numai după sfîrşitul ultimei operaţii a procesului tehnologic.

— Privitor la denumirea de dispozitiv „*D*", se impune completarea acesteia în scopul precizării funcţionalităţii sale tehnologice : dispozitiv de orientarea şi fixarea semifabricatului ($D.O.F.S_F$), (lucru de altfel subînţeles la ora actuală prin notaţia „*D*").

— Precizăm că numai prin introducerea *D.O.F.Sc.* în *S.T.E.* ca element component cu funcţionalitate tehnologică bine definită, sistemul tehnologic elastic poate fi considerat SISTEM ÎNCHIS, deci noţiunea : $MU - D - F - S$ este incompletă şi din acest punct de vedere, avînd valabilitatea de „sistem închis" numai în anumite cazuri particulare.

Dispozitivul de orientarea şi fixarea sculei este un element al *S.T.E.* cu rolul de orientare şi fixare a sculei în raport cu arborele principal sau masa maşinii-unelte corespunzătoare necesităţii de generare a suprafeţelor.

Este de remarcat importanța majoră a acestui element al *S T E.* de precizia orientării și fixării sculei și a comportării lui statice și dinamice depinzînd în mare măsură precizia de prelucrare.

Se poate deduce din succintele considerente expuse concluzia existenței unei erori de considerare a acestui dispozitiv ca sculă auxiliară, cît și nejustificarea absenței în literatura de specialitate a unor cercetări teoretice asupra *D.O.F.Sc.*

— Un alt aspect nefundamentat din punct de vedere teoretic este acela al legăturii dintre elementele *S.T.E.* : MU, $D.O.F.S_F$, S_F, S_c, $D.O.F.S_c$.

Elementul (subsistemul) de bază al *S.T.E.* este mașina-unealtă în raport cu care se orientează și se fixează celelalte elemente ale *S.T.E.* Varietatea prelucrărilor pe o mașină-unealtă impune schimbarea frecventă a tuturor celorlalte elemente; de aici decurge necesitatea ca legăturile dintre $MU - D.O.F.S_F$; $MU - D.O.F.S_c$, $D.O.F.S_F - S$; $D.O.F.S_c - Sc$ să fie astfel realizate încît comportarea în ansamblu a *S.T.E.* să corespundă scopului dorit.

Natura acestor „legături" este un factor deosebit de important în comportarea *S.T.E.* în ansamblu, în asigurarea preciziei de prelucrare.

Natura și precizia legăturilor dintre elementele *S.T.E.* influențează precizia de prelucrare într-un *S.T.E.* concret prin influențarea comportării *S.T.E.* din punct de vedere al rigidității, stabilității la vibrații, preciziei geometrice și cinematice etc., (deci a fiabilității *S.T.E.*).

3. Conceptul modern de sistem tehnologic elastic; schema structurală — informațională a *S.T.E.*

Pe baza celor arătate mai sus de desprinde ideea că în cazul general, *S.T.E.* ca *sistem închis* este complet definit din punct de vedere tehnologic numai luînd în considerare : $M.U.$, $D.O.F.S_F$., S_F, S_c, $D.O.F.S_c$.

Terminologia propusă corespunde funcționalității tehnologice pentru fiecare element al *S.T.E.*

Un element al *S.T.E.*, ($E_{S.T.E.}$), poate fi reprezentat în trei moduri (fig. 2) : Reprezentările sînt echivalente din punct de vedere al conținutului și se poate utiliza oricare din ele.

Legătura L se poate reprezenta extinzînd simbolizarea informațională a bazării pieselor [3], în această situație simbolul furnizînd informații asupra tipului, caracterului constructiv, cinematic și funcțional, precizia, rigiditatea legăturii, tehnologia de execuție a pieselor, economicitatea realizării pieselor ce compun legătura, productivitatea realizării legăturii.

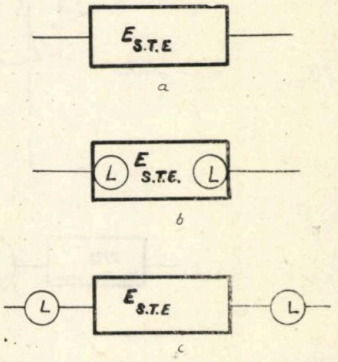


Fig. 2.

Se observă că simbolul informațional în acest caz capătă valențe noi.

Simbolul legăturii trebuie să reprezinte practic contururile cuprins și cuprinzător ale pieselor de legătură în zona legăturii. Natura legăturii își pune amprenta asupra formei constructive a ambelor piese de legătură.

În fig. 3a, b se reprezintă legăturile unui dispozitiv de prinderea sculei cu scula și arborele principal al mașinii de găurit.

Cu precizările de mai sus, exemplul din fig. 3 poate fi reprezentat într-o schemă structurală informațională conform fig. 4. În cazul în care *D.O.F.Sc.* este o mandrină, iar scula are coadă cilindrică, reprezentarea va fi conform fig. 5.

În simbolizarea informațională a legăturilor linia continuă reprezintă conturul cuprins iar linia întreruptă, conturul cuprinzător.

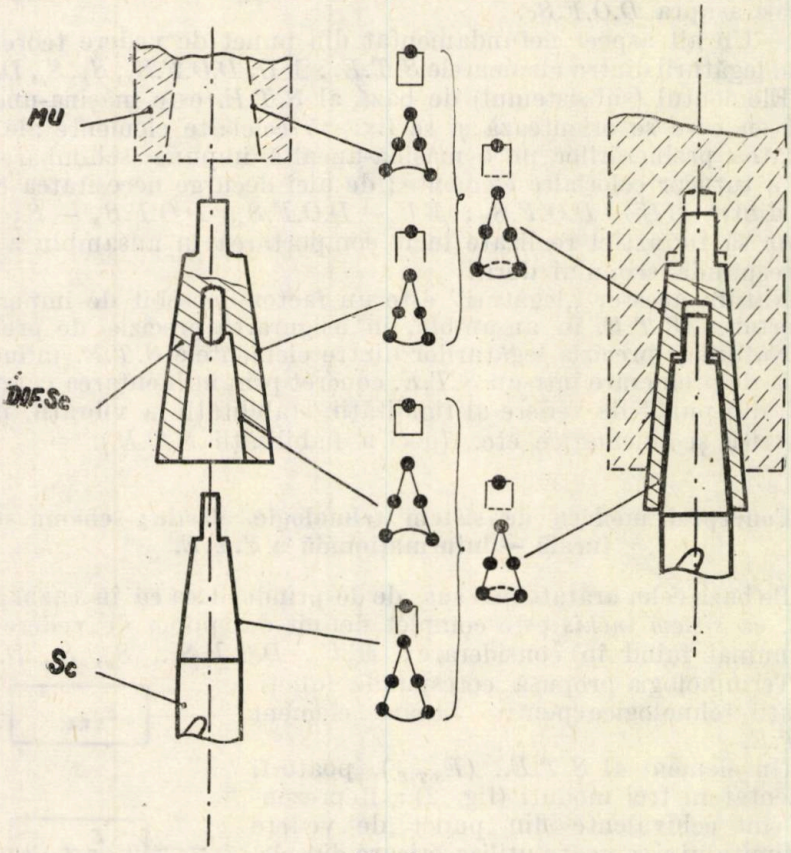


Fig. 3.

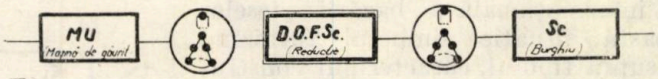


Fig. 4.

Fig. 5.

Pe baza precizărilor de mai sus, se poate considera *schema structurală informațională* generală a *S.T.E.* după următorul model (vezi fig. 6, și exemplele concrete din fig. 7 și 8).

În cadrul acestei scheme, mașina-unealtă ar putea fi reprezentată prin lanțurile cinematice componente utilizînd simbolurile consacrate în proiectarea mașinilor-unelte [1].

Sub această formă, schema *S.T.E.* prezintă *structura S.T.E.*, (elementele componente cu corelațiile dintre ele), și poate furniza *informații*

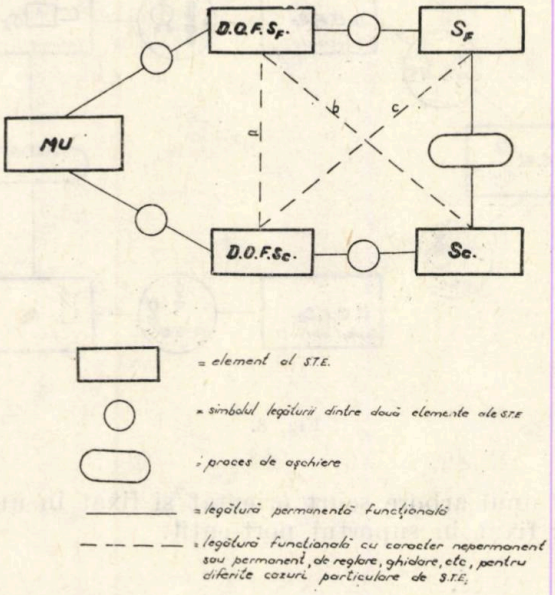


Fig. 6.

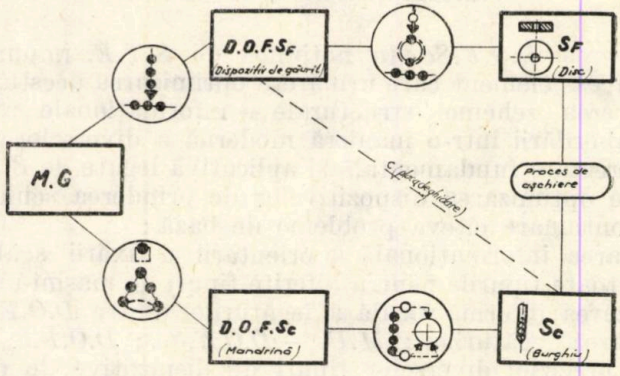


Fig. 7.

privitoare la : construcția, cinematica, funcționalitatea, precizia, rigiditatea, tehnologia, economicitatea și productivitatea diverselor elemente sau procese în cadrul *S.T.E.*

În fig. 7 și 8 sînt prezentate două exemple de scheme structurale informaționale ale unor sisteme tehnologice concrete :

În fig. 7 este prezentată schema structurală informațională a *S.T.E.* la găurirea pe mașina de găurit verticală cu coloană fixă a unui

disc folosind un dispozitiv de orientarea şi fixarea semifabricatului, (dispozitivul fiind prevăzut cu o bucşă de ghidare şi fiind fixat pe masa maşinii), cu un burghiu cu coadă cilindrică orientat şi fixat în mandrină. În fig. 8 este prezentată schema structurală a *S.T.E.* la strunjirea pe

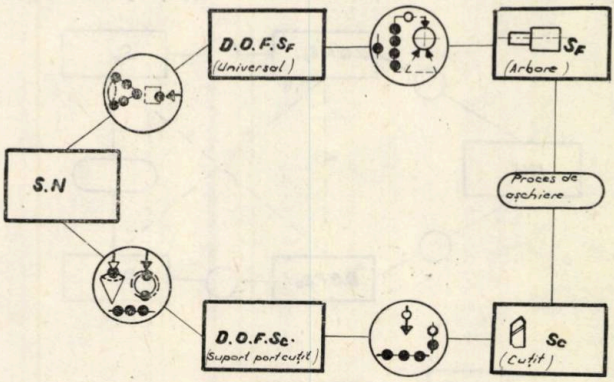


Fig. 8.

strung normal a unui arbore scurt orientat şi fixat în universal, cu un cuţit orientat şi fixat în suportul port-cuţit.

4. Aspecte ale cercetării ştiinţifice în T.C.M. legate de schema structurală informaţională a *S.T.E.*

Introducerea *D.O.F.Sc.* în noţiunea de *S.T.E.* impune cercetării privitoare la acest element care urmăresc optimizarea acestuia.

Introducerea schemei structurale — informaţionale a *S.T.E.* dă posibilitatea abordării într-o manieră modernă a diverselor probleme cu caracter de cercetare fundamentală şi aplicativă legate de *S.T.E.*

Legat de optimizarea dispozitivelor de prinderea sculelor se menţionează în continuare cîteva probleme de bază :

a — Simbolizarea informaţională a orientării şi fixării sculelor aşchietoare de toate tipurile pentru diferite tipuri de maşini-unelte.
b — Simbolizarea informaţională a legăturilor dintre *D.O.F.Sc.* şi *M.U.*
c — Optimizarea legăturilor : *M.U.* — *D.O.F.Sc.*; *D.O.F.Sc.* — *Sc.*
d — Studiul preciziei diverselor tipuri de dispozitive de orientarea şi fixarea sculelor.
e — Studiul rigidităţii diferitelor tipuri de dispozitive de orientarea şi fixarea sculelor.
f — Stabilirea criteriilor de optimizare, (funcţii de optimizare şi restricţii).
g — Codificarea dispozitivelor de orientarea şi fixarea sculelor în vederea optimizării lor pe calculatorul electronic.
h — Optimizarea dispozitivelor de orientarea şi fixarea sculelor pe calculatorul electronic.
i — Tipizarea, normalizarea soluţiilor optime obţinute etc.

Scopul final al cercetărilor asupra *D.O.F.Sc.* trebuie să fie crearea unei teorii unitare asupra tuturor dispozitivelor de orientarea și fixarea sculelor.

Cîteva probleme legate de cercetarea *S.T.E.* ca sistem închis cu cinci elemente fundamentale necesar a fi dezvoltate sînt :

a). Relativitatea sistemelor de referință ale elemntelor componente ale *S.T.E.* (fig. 9).

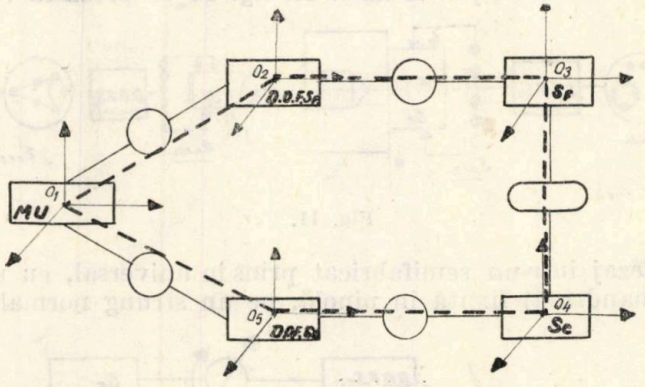


Fig. 9.

Dacă O_1, O_2. O_3, O_4, O_5 sînt centrle sistemelor de referință ale elementelor componente ale *S.T.E.* determinînd un pentaedru atunci dispunerea spațială a acestora ar putea defini starea sistemului tehnologic la un moment dat. Pe această bază concluziile din lucrarea [2] se impun

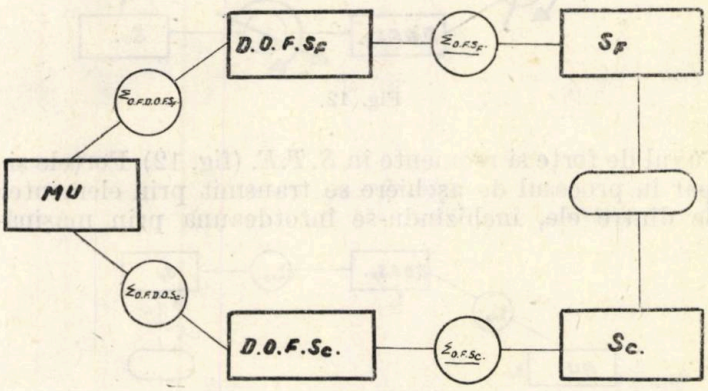


Fig. 10.

a fi completate. Are o deosebită importanță studiul problemei din acest punct de vedere în special pentru mașinile cu comandă numerică, la care poziționarea relativă a elementelor *S.T.E.* trebuie să fie realizată cu deosebită precizie.

b). Unitatea de calcul a erorilor de orientare și fixare ($\varepsilon_{O.F.}$) (fig. 10).

Pe baza schemei de mai sus se poate observa că în cazul cel mai general eroarea totală de orientare și fixare ($\varepsilon_{T.O.F.}$) în *S T.E.* se poate

calcula prin suma aritmetică sau geometrică a erorilor parţiale determinate de legăturile dintre elementele *S.T.E.*

În cazul cel mai general, eroarea de orientare şi fixare radială se poate calcula cu relaţia :

$$\vec{\varepsilon}_{T\cdot OF\cdot R.} = \vec{\varepsilon}_{O\cdot F\cdot DOFS_F} + \vec{\varepsilon}_{O\cdot F\cdot S_F} + \vec{\varepsilon}_{O\cdot F\cdot S_c} + \vec{\varepsilon}_{O\cdot F\cdot D\cdot O\cdot F\cdot S_c}$$

în care o parte din erori pot fi nule. În fig. 11 se prezintă cazul prelu-

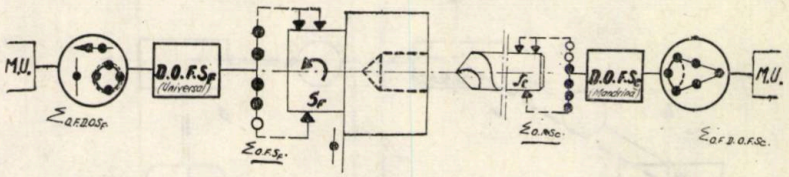


Fig. 11.

crării unui alezaj într-un semifabricat prins în universal, cu un burghiu prins într-o mandrină) fixată în pinolă, pe un strung normal.

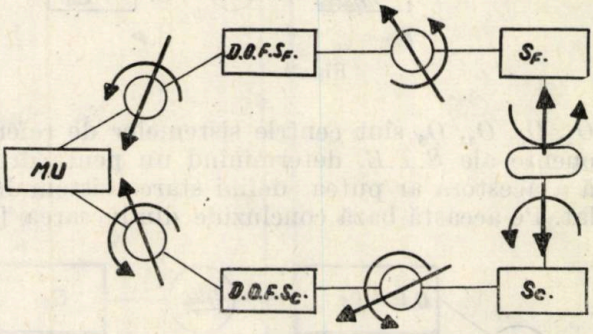


Fig. 12.

c). Fluxul de forţe si momente în *S.T.E.* (fig. 12). Forţele şi momentele care apar în procesul de aşchiere se transmit prin elementele *S.T.E* şi legăturile dintre ele, închizîndu-se întotdeauna prin maşina-unealtă.

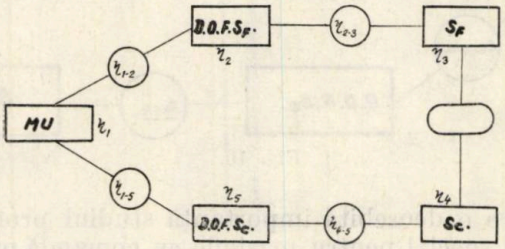


Fig. 13.

Pentru ca procesul de aşchiere să poată avea loc este necesar ca fiecare element sau legătura să reziste eforturilor care apar. Se relevă de aci criteriul de rezistenţă al elementului cel mai slab, conform căruia

solicitările din sistem nu trebuie să creeze o cotă parte a solicitării elementului cel mai slab mai mare decît solicitarea maximă permisă de acesta sau cu alte cuvinte, elementul cel mai slab din sistem trebuie dimensionat sau verificat, funcție de solicitările care apar.

d). Starea energetică a *S.T.E.*, transformarea de energie în diferite forme, randamentul *S.T.E.*, funcție de randamentele parțiale (η_i).

e) Studiul rigidității *S.T.E.*

f). Modelarea sistemului tehnologic elastic și optimizarea acestuia pe baza cunoașterii interacțiunii factorilor care acționează în sistem.

5. Concluzii

Conceptul actual de sistem tehnologic elastic în tehnologia construcției de mașini sintetizat prin formularea $MU - D - P - S$ se impune a fi completat și modificat. Necesități atît de studiu teoretic, cît și practic privind optimizarea *S.T.E.* din punct de vedere constructiv și funcțional impun considerarea acestuia într-o ipoteză exactă.

Prin introducerea în formularea *S.T.E.* a elementului „dispozitiv pentru orientarea și fixarea sculei" ($D.O.F.S_c.$) se obține imaginea reală și corectă a *S.T.E.* ca *sistem închis* compus din : $M.U. - D.O.F.S_F. - S_F - S_c. - D.O.F.S_c. - MU.$

Terminologia propusă corespunde funcționalității tehnologice a fiecărui element al *S.T.E.*

Abordarea oricăror probleme legate de cercetarea *S.T.E.* obligă la luarea în considerare a acestui conținut al noțiunii. Conceptul modern de *S.T.E.*, schema structurală — informațională a *S.T.E.*, cu relevarea legăturilor dintre elementele sale, oferă multiple informații utile în abordarea diverselor aspecte ale cercetării proceselor în *S T E*

Catedra de tehnologia construcției de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Botez, E.* Bazele generării suprafețelor pe mașini-unelte. Cinematica. Editura Tehnică București, 1969.
2. *Brăgaru, A.* Cu privire la determinarea celor (n—K) scheme de bazare și fixare tehnic acceptabile (SBF — TA) la proiectarea dispozitivelor de lucru pentru prelucrările pe mașini-unelte. Comunicare la Sesiunea Științifică a Institutului politehnic„Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, mai 1969.
3. *Brăgaru, A.* Contribuții la teoria elaborării schemelor de bazare și fixare a pieselor în dispozitivele de lucru ale mașinilor — unelte. Teză de doctorat. Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dèj", București — iunie 1970
4. *G. Drăghici* Bazele teoretice ale proiectării proceselor tehnologice în construcția de mașini Editura Tehnică — București, 1971.
5. *Popovici ș.a.* Tehnologia construcției de mașini Editura Didactică Pedagogică, București, 1967.
6. *V. Tache A. Brăgaru I. Ungureanu,* Cu privire la sistemele de referință ale parametrilor sistemului tehnologic electric. (Sistemul de referință al piesei). Sesiunea Științifică a Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, aprilie 1971.

7. *V. Tache* Contribuţii la studiul schemelor de fixare şi al forţelor care solicită ansamblul dispozitiv — piesă la prelucrările pe maşini-unelte. Teză de doctorat — Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti — martie 1972.
8. *Sokolovski, A. P.*, Precizia prelucrării mecanice şi metodele pentru mărirea ei. Editura Tehnică, 1954(trad. l. rusă).
9. * * * Reglarea adaptivă la maşinile unelte — în Maschineuban, R.F.G., vol. 18, 1969, nr. 4.
10. *Stănescu, I.*; *Tache, V.* Dispozitive pentru maşini unelte. Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

C.Z.: 621.9

PROGRAMAREA MAȘINILOR DE FREZAT CU COMANDA NUMERICĂ ÎN CAZUL PRELUCRĂRII UNOR SUPRAFEȚE CURBE

ALEXANDRU DORIN

Prelucrarea prin așchiere are drept scop obținerea unor piese ale căror suprafețe trebuie să îndeplinească anumite condiții determinate de scopul lor funcțional, în ceea ce privește forma, dimensiunile și rugozitatea.

Pentru definirea unei suprafețe care se prelucrează pe mașini-unelte cu comandă numerică este necesar să se determine : 1) —expresiile matematice ale curbelor generatoare (în cazul suprafețelor „matematice"). 2)—legea de deformare a curbelor generatoare pentru reproducerea suprafeței (în cazul suprafețelor oarecare).

În cazul în care suprafața prelucrată este o suprafață riglată sau de rotație pentru definirea matematică a curbelor generatoare se folosesc ecuațiile cunoscute din geometria analitică [1] Pentru o suprafață oarecare trebuie rezolvată problema definirii cît și a realizării ei.

Generarea unei suprafețe oarecare pe mașini de frezat cu comandă numerică implică :

a) găsirea unei reprezentări matematice care să satisfacă condițiile de formă, dimensionale, etc. care au fost impuse.

b) calcularea coordonatelor punctelor traiectoriei descrise în mișcarea relativă dintre scula așchietoare și piesa supusă prelucrării.

Calcularea coordonatelor unui număr de puncte aparținînd unor segmente rectilinii, circulare, parabolice etc., care într-o anumită succesiune definesc de cele mai multe ori traiectoria sculei așchietoare este o problemă de interpolare.

În cazul folosirii interpolatoarelor operația de programare se simplifică datorită repartiției judicioase a calculelor în ceea ce privește prelucrarea internă și cea externă a datelor. [2]. Există în prezent tendința de a realiza calculul propriu-zis al curbei pe baza datelor geometrice cu ajutorul calculatoarelor numerice, această prelucrare externă a datelor reprezentînd „programarea" implicită a traiectoriei, astfel că prelucrarea internă a datelor să se reducă la o interpolare liniară între puncte relativ apropiate, interpolare ce constituie „programarea" explicită a traiectoriei.

* Manuscris predat redacției la data de 13 octombrie 1971

Există totuşi suprafeţe pentru care utilizarea interpolatoarelor nu este avantajoasă. Aceasta datorită unor restricţii pe care le impune forma suprafeţei în ceea ce priveşte :

— modul de generare al suprafeţei,
— precizia de formă şi rugozitatea suprafeţei.

Pentru astfel de suprafeţe, care sînt în general suprafeţe curbe a căror raze de curbură sînt determinate sau nu în desen, constante sau variabile, la întocmirea programului apar dificultăţi mai ales la determinarea datelor geometrice.

În lucrare se prezintă algoritmul de calcul pentru determinarea coordonatelor traiectoriei descrise în mişcarea relativă dintre sculă şi piesă în cazul frezării unor suprafeţe complexe ale căror curbe generatoare se pot exprima analitic şi sînt de forma :

— curbele directoare (generatoare) sînt rectiilnii
— curbele generatoare (directoare) sînt curbe plane.

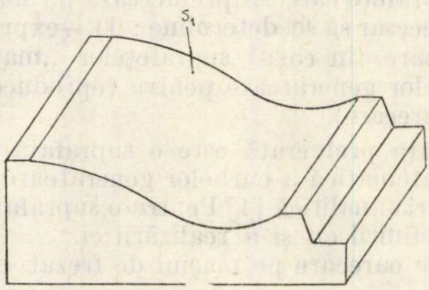


Fig. 1.

Fig. 2.

În fig. 1 este reprezentată o astfel de suprafaţă S_1.
Prelucrarea acestor suprafeţe prin frezare necesită :

1. o maşină de frezat verticală cu comandă numerică după 3 axe
2. o freză deget cu cap sferic (fig. 2).

Întocmirea programului comportă determinarea datelor geometrice şi a datelor tehnologice. Datele tehnologice necesare la programare se referă la :

a) modul de generare al suprafeţei (fig. 3). În cazul considerat s-a impus ca deplasarea sculei să se facă în planul curbei generatoare. În general direcţia de deplasare a sculei aşchietoare se determină din condiţiile generării suprafeţei pentru deplasări minime ale sculei [3].
b) sensul mişcării de avans
c) punctul de plecare
d) raza frezei

e) mărimea vitezei de așchiere ($V_{aș}$) și a vitezei de avans (w_y)
Datele geometrice înscrise în program reprezintă deplasările după direcțiile OX și OY ale piesei și după OZ ale frezei, necesare pentru generarea suprafeței.

La elaborarea algoritmului de calcul pentru determinarea coordonatelor corespunzătoare generării curbelor directoare și generatoare s-a

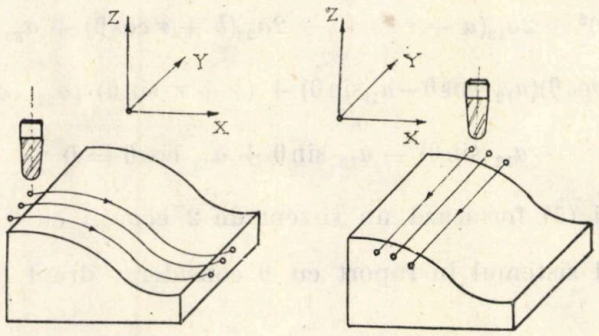


Fig. 3.

impus ca înălțimea microasperităților să aibă o mărime constant determinată și anume ca înălțimea medie efectivă a neregularităților $R_{z\,ef}$ să fie mai mică sau cel mult egală cu înălțimea medie a neregularităților R_z, indicată în desenul de execuție al piesei de prelucrat.

$$R_{z\,ef} \leqslant R_z = 4{,}5\, R_a^{0{,}97} \tag{1}$$

Se consideră că curba generatoare Γ este o conică a cărei ecuație generală [1] $F(X,Z) = 0$, este:

$$(\Gamma) \equiv a_{11} X^2 + 2a_{12} XZ + a_{22} Z^2 + 2a_{13} X + 2a_{23} Z + a_{33} = 0 \tag{2}$$

Ecuația cercului ce reprezintă profilul sculei în planul curbei generatoare, scrisă sub formă parametrică $X = X(t)$; $Z = Z(t)$ este:

$$(C) \begin{cases} X = a + r \cos\theta \\ Z = b + r \sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

unde a și b reprezintă coordonatele centrului cercului C iar r — raza frezei.

Cele două curbe Γ și C situate în același plan sînt tangente în timpul generării suprafeței. Analitic acest lucru se exprimă astfel:

Dacă o curbă este dată parametric prin ecuațiile $X = X(t)$ și $Z = Z(t)$ iar cealaltă printr-o ecuație de forma $F(X,Z) = 0$, condițiile ca într-un punct M de parametru t_0 să existe contact de ordinul 1 sînt:

$$\Phi(t_0) = 0\,;\ \Phi'(t_0) = 0$$

unde $\Phi(t_0) = 0$ este ecuaţia obţinută înlocuind în $F(X,Z) = 0$ valorile $X = X(t)$ şi $Z = Z(t)$.

În cazul considerat cele două ecuaţii ce semnifică condiţiile de mai sus sînt :

$$a_{11}(a + r\ \cos\theta)^2 + 2a_{12}(a + r\ \cos\theta)\ (b + r\ \sin\theta) + a_{22}(b + \\ + r\sin\theta)^2 + 2a_{13}(a + r\cos\theta) + 2a_{23}(b + r\cos\theta) + a_{33} = 0 \tag{4}$$

$$(a + r\ \cos\theta)(a_{12}\ \cos\theta - a_{11}\sin\theta) + (b + r\ \sin\theta)\ (a_{22}\ \cos\theta - \\ - a_{12}\ \sin\theta) - a_{13}\ \sin\theta + a_{23}\ \cos\theta = 0 \tag{5}$$

Ecuaţiile (4) şi (5) formează un sistem de 2 ecuaţii cu 3 necunoscute a,b şi θ.

Rezolvînd sistemul în raport cu θ considerat drept parametru se obţine :

$$\begin{cases} a = f_1(\theta) \\ b = f_2(\theta) \end{cases} \tag{6}$$

Conform fig. 4 înălţimea maximă a neregularităţilor este dată de mărimea

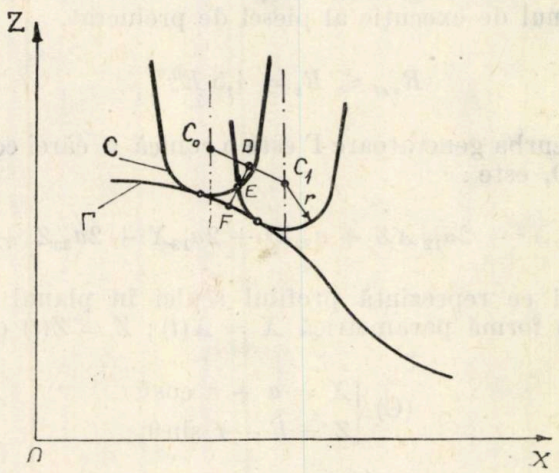


Fig. 4.

segmentului $F\,E$. Analitic lungimea acestui segment se determină cu formulă :

$$d_{FE} = \sqrt{(X_E - X_F)^2 + (Z_E - Z_F)^2} \tag{7}$$

Se observă că coordonatele punctelor E şi F se obţin prin intersecţia unei drepte (perpendiculare pe dreapta C_0C_1 care trece prin punctul D

situat la mijlocul segmentului C_0C_1 (acest lucru se demonstrează ușor) cu curbele Γ și C.

Se determină coeficientul unghiular al dreptei C_0C_1.

$$m = \frac{b - b_0}{a - a_0} \tag{8}$$

unde a_0 și b_0 sînt coordonatele punctului de plecare C_0 ale căror valori sînt cunoscute.

Coeficientul unghiular al dreptei DF va fi:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{a_0 - a}{b - b_0} \tag{9}$$

Coordonatele punctului D sînt:

$$\begin{cases} X_D = \dfrac{a_0 + a}{2} \\ Z_D = \dfrac{b_0 + b}{2} \end{cases} \tag{10}$$

Ecuația dreptei DF este:

$$Z - Z_D = m'(X - X_D) \tag{11a}$$

sau

$$Z - \frac{b_0 + b}{2} = \frac{a_0 - a}{b - b_0}\left(X - \frac{a_0 + a}{2}\right) \tag{11b}$$

Sistemul de ecuații pentru determinarea coordonatelor punctului E se obține intersectînd cercul de centru C_0 cu dreapta DF

$$\begin{cases} (X - a_0)^2 + (Z - b_0)^2 = r^2 \\ Z - \dfrac{b_0 + b}{2} = \dfrac{a_0 - a}{b - b_0}\left(X - \dfrac{a_0 + a}{2}\right) \end{cases} \tag{12}$$

Rezultă

$$\begin{cases} X_{1E} = f_3(\theta) \\ Z_{1E} = f_4(\theta) \end{cases} \tag{13}$$

Intersectînd curba Γ cu dreapta DF rezultă coordonatele punctului F în funcție de θ din sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} a_{11}X^2 + 2a_{12}XZ + a_{22}Z^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Z + a_{33} = 0 \\ Z - \dfrac{b_0 + b}{2} = \dfrac{a_0 - a}{b - b_0}\left(X - \dfrac{a_0 + a}{2}\right) \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} X_{1F} = f_5(\theta) \\ Z_{1F} = f_6(\theta) \end{cases} \tag{15}$$

Cu soluțiile obținute se deduce expresia $d_{FE} = f(\theta)$ Din condiția impusă (1) că $d_{FE}(\theta) \leqslant R_z$ se obține valoarea unghiului θ necesară pentru calculul coordonatelor X și Z conform relațiilor (3) și (6) corespunzătoare poziției C_1. Totodată aceste valori vor fi date inițiale pentru calcularea coordonatelor poziției următoare a sculei și piesei pe baza algoritmului.

Metoda de calcul propusă prezintă următoarele avantaje la programare :

1. — La determinarea coordonatelor înscrise în program se are în vedere rugozitatea prescrisă a suprafeței prelucrate.
2. — Pentru fiecare tip de curbă Γ se pot deduce formulele de calcul ale coordonatelor (3), (6), calculele reducîndu-se la rezolvarea unor ecuații de gradul doi
3. — Pe baza acestor formule calculul coordonatelor se poate efectua cu ajutorul unui calculator numeric, programul de rezolvare pentru calculator fiind ușor de conceput.
4. — Schimbarea sculei așchietoare (deci și a lui r) nu influențează algoritmul de calcul și programul pentru calculator.

Catedra de mașini unelte
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Murgulescu Elena-Flexi Sofia, Kreindler O, Sacter O, Tîrnoveanu M*, Geometria analitică și diferențială, Ed. didactică și pedagogică, București, 1962.
2. *Simon W.* Conducerea numerică a mașinilor-unelte, Ed. tehnică, București, 1967
3. *Schwegler, H.* N. C. Frasbearbeitung gekrümmter Flächen, Industrie Anzeiger, nr. 5, 1971

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 4

MANAGEMENT

C.Z.: 65.012.4

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF THE PRDUCTION PROGRAMMING IN CERTAINTY AND UNCERTAINTY CONDITIONS*

A. CARABULEA. GH. ANTON. GH. RUȘITORU

1. Paper presentation.

The national organization of the production represents a theoretical and practical requirement entailing the continuous rallying of the intelectual and physical potential now and in future.

In this respect the paper shows the way to develop determinist and probabilist mathematical models which application facilitate the optimization of production programming in certainty and uncertainty conditions.

The conceived algorithm is based on the operational research concepts for building the mathematical model structure by which such theories as storage, waiting, wear, production order, reliability and production quality, general time lagged expenses and investments theory are operating.

The calculus exemples presented in addendum is a confirmation of the accuracy of the hypotheses considered in the formation of the determinist and probabilist mathematical models which can be applied in certainty and uncertainty conditions.

The general mathematical model of the expenses brought up to date and which were available in the past may be represented as;

$$(1-1) \qquad Z_t^{d(pr)} = \left[\sum_{c=1}^{tc} C_t^{d(pr)} + \sum_{t=1}^{tc} I_t^{d(pr)} - V_n^{d(pr)} \right] [1 + r]^{-i}_{(\text{lei/year})}$$

where :

$C_t^{d(pr)}$ — total determinist (d) or probabilist (pr) expenses.
$I_t^{d(pr)}$ = total investments.
tc = works lagging duration
$V_n^{d(pr)}$ = net revenue resulted from the partial commisioning of the production capacities.
r_a = updating rate
i = reporting year of expenses and total investments.

Manuscript received 17 Iuni 1971

The total determinist and probabilist expenses may be written as :

$$(1-2) \qquad C_t^{d(pr)} = C_{ST}^{d(pr)} + C_A^{d(pr)} + C_{r+U}^{d(pr)} + C_{SF}^{d(pr)} + C_{ord}^{d(pr)} + C_{AM+G}^{d(pr)}$$

(lei/year)

The following restrictions should be observed in solving the mathematical models)(1—1—2) in the production programming case ;

— Technological restrictions related to the logic succession of products processing.

— Noninterferrence restrictions providing the operation carrying out during the established time for a certain machine category.

— Duration restrictions showing that the processing cycle observing is compulsory.

In the relation (1—2) intervene the storage (C_{ST}) waiting (C_A), equipement repairs and replacement (C_{r+u}) safety operation (C_{SF}) ordination (C_{ord}), amortization (C_{AM+G}) and for man power (C_{FM}) expesnes.

Considerations will be made on the above types of expenses in order to outline the way of making the mathematical model of production programming optimization under certainty and uncertainty conditions.

2. Considerations concerning the production programming under certainty conditions

2. 1. Field matehmatical models.

The economic functions of the stock management at a constant demand, when the stock absence is not taken into account (2—1) and when the stock lack cost is taken into account (2—2) can be written as follows :

$$(2-1) \qquad C_{ST}^{(1)} = \left(C_e \cdot \frac{N}{n} + \frac{tC_s}{2} \right) n$$

$$(2-2) \qquad C_{ST}^{(a)} = \left(\frac{S^2\, t\, C_s}{2n} + \frac{N}{n} C_e + \frac{(n \cdot S)^2 t}{2n} C_p \right)$$

Deriving the expressions (2—1—2) and applying the minimum conditions it results on one hand the optimum stock and on the other hand the periods when supply, should be carried out.

In the demand has an aleatory character we can take into account two cases, namely: when the stock excess is neglected (2—3) and when this exces is considered. (2—4):

$$(2-3) \qquad C_{ST}^{(4)} = C_s \int_0^s (S-C) f(c)\, dc + C_p \int_s^\infty (C-S) f(c) dc + C_c$$

In this case appear the situation $(S-C)$ and $(C-S)$ In the first case the demand (C) is satisfied by the stock (S) while in the last case a penury in stock appears. In both situations additional expenses appear and a solution should be found where in such expenses have a minimum value:

$$(2-4) \qquad C_{ST}^{(5)} = [C_s \int_0^s (S - 0{,}5C) f(C) dC + C_s \int_s^\infty \frac{S^2}{2c} f(C)\, dC +$$

$$+ C_p \int_s^\infty \frac{(C-S)^2}{2C} f(C) dC + C_c$$

The relations (2—1—4) are including the following values;
C_e = the starting cost; C_s = storage cost; N = products number in the plan; n = products number in the lot; t = storage duration; S = storage proper; C_p = storage lack cost, C = material or parts demand in a considered period, $f(C)$ = demand probability function, C_c = fuel cost.

In a dynamic management case the aleatory demand can be expressed taking into account the minimum and mean value on a certain period, as well as of the mean square value deviation and deviation from the precalculated values.

Starting from relations (2—1—4) can be demonstrated that a lot of products magnitude becomes optimal if the marginal stocking expenses are equal to the marginal expenses for the supply execution [5].

If the lots of materials are not obligingly equal between them, then the total expenses for materials purchasing and storage can be expressed by the Lagrange function in the form;

$$(2-5) \qquad L = \frac{C_d}{2c} \sum_{i=1}^{n} S_1^2 + C_A\, n_e - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} S_i - C \right)$$

$$(2-6) \qquad S_i = \lambda \frac{C}{C_d} = \lambda \frac{C}{C_d}$$

Deriving the function with respect to (S_i) the optimum condition results if it is coinsidered that the raw material consumption in time is uniform.

In this case (S) represents the quantity of materials purchased on order and leads to minimum expenses if its value is calculated by the relation (2—6). In the relations (2—5—6) the following magnitudes appear: C_d = storage cost, C = demand, C_A = supply cost, n_e = number of purchased lots, λ = Lagrange multiplier. If the capacity of the storing room is limited the Lagrange's function is written;

$$(2-7) \qquad L = 0{,}5\, C_d\, S + \frac{C \cdot C_a}{S} - \lambda (P - S)$$

$$(2-8) \qquad S = \sqrt{\frac{2C \cdot C_A}{Cd + 2\lambda}}$$

where :

P = storing room. capacity.

Derivating the function (2—7) and annulling the derivates we will obtain the magnitude (S) given by the relation (2—8). If the storing room is not entirely used ($S < P$) the ($\lambda = 0$), while if ($S = P$) the storing room is entirely used and the Lagrange is multipliers are differing from zero.

In such cases relations of the type (2—5—6) may be used where the probability function observing a series of phenomena appearance laws is determined as such.

If the material demand (C) is unkown for a certain period of time, it is supposed that a certain law of demand apparition probability is observed and the probability function or the probability density is determined. In thase cases the organization is providing a reserve stock to be consumed in more difficult situations.

The raw material mean stock is formed by the reserve stock plus the material average supplied on the considered period.

The problem of stock programming in uncertainity conditions is reduced to the determination of the optimum reserve in the store rooms ;

In practice supply coordination with the spare in the store rooms done using the three store room method. Mathematically the reserve is determined observing the relations of the following form ;

(2—9) $$P(C > S + R) = p$$

(2—10) $$P(V - S > R) = p$$

This shows that the reserve (R) should be so great that the probability for the demand (C) to be greater than ($S + R$) and should not exceed the value of the risk coefficient (p). In order to know the mathematic aspect aquired by this phenomena one should determine the probability of the demand, observing the normal repartition. In such way that the following conditions should be observed ;

(2—11) $$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U^\infty e^{-0,5u^2}\, du$$

(2—12) $$U = \frac{C - S}{\sigma} \qquad \sigma = \text{variance}$$

In these cases the expense function can be written under the form;

$$C_{ST} = \left[\frac{NC_A}{S} + C_d\,(0{,}5S + U\sigma)\right]; \tag{2—13}$$

$$U = \frac{V - S}{\sigma} \qquad V = \text{aleatory demand} \tag{2—14}$$

If the probability law is of Poisson type the expenses for the stock management take the form;

$$C_{ST} = \left[-\frac{NC_A}{S} + C_d(0{,}5S + U\sqrt{S})\right]; \tag{2—15}$$

$$U = \frac{V - S}{\sqrt{S}}$$

It is derived in relation to (S) and a biquadrativ equation is obtained the solving of which gives the optimum value of the raw material quantities that are to be purchased on one order.

If the repartition of the material demand probability is rectangular, the expenses for the stock management take the form;

$$C_{ST} = \left\{\frac{NC_A}{S} + C_d\,[0{,}5S + (0{,}5 - p)(C_{\max} - C_{\min})]\right\} \tag{2—16}$$

p = coefficient of risk; $C_{\max}$, $C_{\min}$ = maximum and minimum values of the material demand.

From the analysis of the stock theory it results that the hypothesis regarding the constant keeping of the risk coefficient is not justified, its determination being necessary for each case in part on the supplementary expenses basis implied by the insufficient reserves of raw materials.

Taking into account the stock management theory which has been described in literature [5] the optimum risk (p)and thrust ($1-p$) coefficient can be calculated from the minimum expenses for the management of materials in store rooms, and the following expressions are obtained:

$$p = \frac{C_d}{C_d + C_p}\;;\; (1-p) = \frac{C_p}{C_d + C_p} \tag{2—17}$$

where: C_d = storage expenses, C_p = expenses for lack of reserve.

Hence for a most complete presentation of materials stock management a series of considerations of the reserves admissible in the stores

must be made as well as a calculus of the risk and trust coefficients acting upon the reaching of a minimum level of expenses for materials management.

The problem of stock management in time solving is based on the dynamic programming functional equation.

Bellman's functional allows the incomes maximalization or the expense minimalization can be written as follows :

$$f_N(x) = \max_{0<x_N\leqslant x} [g_N(x_N) + F_{N-1}(x - x_N)] \tag{2—18}$$

If two types of resources appear then the functional of the dynamic programming takes the form ;

$$F_N(xy) = \max_{0<x_N\leqslant x} \max_{0<y_N\leqslant y} [g_N(x_N^{\cdot} y_N) + F_{N-1}(x - x_N, y - y_N)] \tag{2—19}$$

In the relations (2—18—19) the functional $F_N(x, y)$ represents the incomes obtained through the repartition to and from the store of the materials in different working points.

There are many cases when it is prefered to operate with the Bellman's functional considering the dual problem which comes again to the calculation of the minimum costs for stock management.

The treatment of two and three stores problem by means of the dynamic programming comes to the use of function series with two and three variables. When the multiplier Lagrange is introduced the variables can be reduced to a single one. Considering that the three stores can stock the quantities x_1 ; x_2 ; x_3 ; and if the resources are designated (r_N) then the mathematical models of the transport expenses (C_r) and those resulted from the application of the fundamental equation of the dynamic programming may be written as follows :

$$C_T = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{N} g_{ij} \left(x_{ij} + \lambda_1 \sum_{j=1}^{N} x_2 + \lambda_2 \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \right)$$

$$f_N^{\cdot}(x) = \min_{0\leqslant x_N\leqslant x_1} [g_{1N}(x_{1N}) + g_N(x_{1N}\,\lambda) + f_{N-1}^{\cdot}(x - x_{1N})] \tag{2—20}$$

In the literature (5—8) it is shown that it may be considered $\lambda_1 = \lambda_2$ and that it should be observed the basic restriction so that the resource should not exceed the necessary sum presented in the form ;

$$(x_{1N} + x_{2N} + x_{3N}) = r_N \tag{2—24}$$

The logic calculus diagram for the income determination of the expenses resulted from the stock management respectively is represented under a general form in the literature. The problems araising in the stock administration may be treated as special waiting problems as part of the operational research.

In the series production the production programming is sensibly influenced. by the waiting phenomena which requires their study by means of the determinist and probabilist mathematical models included into the general model of the organization administration.

A productions system where waiting rows appear, can be formed under the mathematical aspect taking into account the system unit arrival diagram, of the service stations and of the waiting raw discipline.

The arrival diagram is characterized by arrivals at equal or unequal time intervals with a determinist or probabilist character (stochastic). The duration between services can have either a determinist or a probabilist character.

The discipline of waiting row depends partly of the waiting phenomena structure.

The structure of the waiting phenomena within a production system may be characterized on the medium number of the units in the system basis (m) the part circulation intensity (ψ), the idle medium time of the stations ($\rho = 1 - \psi$); the waiting medium time before the machines (t_f) the probability of apparition and execution of the studied phenomena (n) the medium number of arrivals (λ) and the medium number of services (μ); n = the total number of the units in the system.

The mathematical relations covering the waiting phenomena are based on the considerations made by Erlang on the phons calls and telephonic messages. These considerations make possible the description of the cases of parking in continous or transitory regime and they are based on the Marcov's chain theory.

In order to characterise a Marcov's chain we have to consider a system which may be found in the states $S_i (i = 0,1 \ldots . N)$ the first test is noted with zero and the second with (1) at the moment t_j $(j = 0,1)$ In each of these discrete moments of time the system can be in one and only one of the states (S_i). The probability that the system can be found in the state (S_i) at the moment (t_j) is noted $p_i(t_j)$ The multitude of these probabilities for a given value of the (j) forms a stochastic vector $p(t_j)$ thus defined;

$$(2-22) \qquad p(t) = [p_0(t).p_1(t) \ldots p_j(t) \ldots p_N(t)]; \sum_{j=1}^{N} pj\ (t) = 1$$

If the system passing from a state to another depends only on the respective states and if each pair of states (S_i/S_j) is associated with a passing probability (p_{ij}) then we can say that a Marcov's chain with a finite number of states has been defined.

A Marov's chain under the matricial form is represented:

$$(2-23) \qquad p_j\ (t+1) = \sum_{i=0}^{N} p_i(t) || p_{ij} || = p(t).T$$

The square matrix (T) is formed of transition probabilities (p_{ij}) which are non-null and of which sum on each line is equal to the unit. A Marcov's chain is completely definite by the matrix (T) and the

probability of the first test (p_0). If the matrix (T) depends of time the phenomenon is nonsteady. If the matrix (T) is constant in probability, the system is called ergodic and in this case it is admitted a continuous rating. If the matrix (T) has all the lines identical, the system is completely ergodic and it does not depend on the initial state. The evolution of the systems discribed by the Marcov's chains can be represented by transition graphs where the states are indicated by points and the transition probabilities by curves. If the unit matrix (I) is substracted from the stochastic matrix (T) the dynamic matrix (D) of the system ($D = T - 1$) can be obtained. In this case the Marcov's chains may be written under the form;

$$[p(t+1) - p(t)] = p(t_1)D = p(t_1).(T-I)' \tag{2-24}$$

The processes of the Poisson's type in the waiting theory are based on the Marcov's chains from which can be derived the general mathematic models that characterize the waiting sources;

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} P_n(t) = \lambda p(t) + \mu p(t) - (\lambda - \mu)p(t); n > 0 \\ \dfrac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \end{cases} \tag{2-25}$$

The relations (2—25) show the mathematic model of the waiting wire when stations are unic and the arrivals are poissonin and services exponential. If the probability does not depend on time we may that the process is stationary and it allows a steady state regime.

The study of the steady state regime is made by the equalization with zero of the relations (2—25) and the following values are derived

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} \qquad p_{(t)}^n = \frac{(\lambda t)^n . e^{-\lambda t}}{n!} \; ; \; t_f = \frac{\psi}{2\mu(1-\psi)} \tag{2-26}$$

If the arrivals are of Poisson's type and the services of Erlang's type then we can calculate the values;

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} ; \qquad \bar{n} = \frac{k\psi(1+k)}{2(1-k\psi)} \; ; \; t_f = \frac{\bar{n}}{\mu} \tag{2-27}$$

For a waiting series with many stations the equation covering the phenomenon may be written in the form;

$$\begin{array}{ll} -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = 0 & \\ -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{N-1}(t) + (n+1)\mu p_{N+1}(t) = 0 & 1 \leqslant n < S \\ -(\lambda + S)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + S\mu p_{n+1}(t) = 0 & n \geqslant S \end{array} \tag{2-28}$$

From these relations are derived the probabilities

$$(2-29)\quad \begin{cases} p_n = p_0 \dfrac{\psi^n}{n!} & \text{for } 1 \leqslant n < S \\ p_n = p_0 \dfrac{\psi}{S!S^{n-s}} & \text{for } n \geqslant S \\ p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{\psi_S}{S!\left(1-\dfrac{\psi}{S}\right)} + \sum\limits_{n=0}^{s-1} \dfrac{\psi^n}{n!}} \end{cases}$$

$$\bar{\partial} = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)p_n \; ; \; \rho = \sum_{n=0}^{s} (s-n)\, pn \; ; \; t_f = \frac{\bar{\partial}}{\lambda}$$

In the cascade systems case the state equations which clothes the waiting phenomena within the technologic lines may be costructed on the physical model simulation basis They and have for form;

$$\lambda p_{00} - \mu p_{01} = 0, \; (\lambda + \mu)p_{01} - \mu p_{10} - \mu p_{01} = 0$$

(2—30)

$$\lambda p_{00} + \mu p_{11} - \mu p_{10} = 0 \; ; \; \mu(p_{11} + p_{01}) = 0 \; ; \; \lambda p_{01} - 2\mu p_{11} = 0$$

where :

p_{00} = the probability that the two stations are free

p_{10} = the probability that station 1 is occupied and station 2 is free.

p_{01} = the probability that station 1 is free and station 2 is occupied.

p_{11} = the probability that both stations are occupied.

p_{01} = the probability that station 2 is occupied and station one is blocked.

In this case the following elements are calculated

The mean number of units within the assembly of the two stations;

(2—31) $\quad if \; \psi \ll 1 \; ; \; n = \alpha\psi - 1{,}5 \; \psi^2$

$$\bar{n} = \frac{5\psi^2 + 4\psi}{3\,\psi^2 + 2\psi + 2} \qquad if \; \psi = 1 \; ; \; n = 1$$

$$if \; \psi > 1 \; ; \; n = \frac{5}{3} - \frac{32}{45\psi}$$

The mean number of the occupied stations is calculated by the relation;

(2—32) $$\bar{J} = 2(\psi - \psi^2) \text{when } \psi \geqslant 1$$

$$\bar{J} = \frac{4\psi^2 + 4\psi}{3\psi^2 + 3\psi + 2} \quad \bar{J} = 0{,}99 \text{ for } \psi = 1$$

$$\bar{J} = 1{,}33 - 0{,}44\ \psi^{-1} \text{ for } \psi > 1$$

The probability of service refuse is calculated by a relation of the form;

(2—33) $$p = \psi - 0{,}5\psi^2 \text{ for } \psi \ll 1$$

$$0_{\text{refuse}} = \frac{3\psi^2 - 2\psi}{3\psi^2 + 4\psi + 2} \quad p_{\text{ref}} = 0{,}55 \text{ when } \psi = 1$$

$$p_{\text{ref}} = 1 - 0{,}66\ \psi^{-1} \text{ when } \psi \ll 1$$

The waiting phenomena can be studied by applying either the indirect simulation method as the Monte Carlo method or by the direct simulation methods. The Monte-Carlo method called the random number method as well as the indirect simulation methods require the use of computers.

The simulation of a waiting cascade system is briefly described in literature (5), where the calculus logic diagram of the values which are rendering the principal aspects of the waiting in the technologic lines is also indicated.

Management Chair
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1 *N. Ceauşescu* Raport la cel de al X-lea Congres al P.C.R., Editura Politică Bucureti, 1969.
2 *Manea Mănescu*, ş.a. Metode matematice moderne aplicate în organizarea şi planificarea lucrărilor de construcţii şi montaje Editura Academiei R. S. România, 1969.
3 *Bîrlea Ştefan* — Entropia în sistemele cibernetice industriale Comunicare la sesiunea cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, mai 1970
4 *Penescu C.* ş.a. — Procese optimale Editura Academiei R. S. Română, Bucureşti 1970
5 *Oskar Longe* — Decizii optimale. Bazele programării Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1970.
6 *Onicescu Octav* — Principiile teoriei probabilităţilor Editura Academiei R. S. Română, Buc. 1970.
7 *Rusitoru Gh. şi Costache N.* — Contribuţii la studiul aplicării sistemului PROMT în întreprinderile constructoare de maşini — Comunicare la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti, 1970
8 *Anton Gheorghe, A. Carabulea* şi *Gh. Rusitoru* — Contributions to the Study of the Premises of Decisional Informaties În Buletinul Institutului politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti, nr. (1—2) 1971.
9 *A. Petrescu* — Calculatoare automate şi programare Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti 1971.

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

I.P.I. c. 3113

40 820

1973 DEC 14

1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV NUMĂRUL 5 ANUL 1973,
SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquees" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

CALEA GRIVIȚEI 123
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского сосрава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинсттитуских сотр дников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

CALEA GRIVITEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présenté, il reflécte en premier lieu l'activité scientifique du cors didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

CALEA GRIVITEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV—NUMĂRUL 5

SEPTEMBRIE—OCTOMBRIE
1973

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. ing. *Petru Baltă*; Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific); Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu*; Prof. ing. *Ștefan Mantea*; Prof. dr. ing. *Marius Preda*; Prof. ing. *Mihai Renert*; Conf. dr. ing. *Mircea Soare*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*.

Redactor responsabil

Rector

Prof. dr. docent *Radu Voinea*

membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

Liana Alexandra Popescu

O metodă aproximativă de construire efectivă a polinoamelor algebrice de cea mai bună aproximare a funcţiilor 21

CHIMIE

Agneta Bâtcă Cerbu, M. Ionescu

Determinarea argintului din soluţii cu ajutorul zeolitului sintetic de tip Na A 29

AVIAŢIE

C Berbente

Asupra unei metode pentru calculul aerodinamic al aripilor de anvergură finită în regim incompresibil 37

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru

Soluţii constructive, optime din punct de vedere dinamic, pentru motorul în V, în patru timpi, cu cilindri intercalaţi 51

TERMOTEHNICĂ

Vs. Radcenco

Determinarea pierderilor provocate de ireversibilitatea laminării gazelor şi vaporilor cu referiri la organele de distribuire ale maşinilor termice şi ventilele de reglare ale instalaţiilor frigorifice 69

REZISTENŢA MATERIALELOR

Vasilica Cosac

Vibraţiile laterale ale grinzilor suspendate pendular pe n reazeme, în cazul flambajului antisimetric 79

TEHNOLOGIA CONSTRUCŢIILOR DE MAŞINI

Z. Duca, I. Gheorghe, Al. Dorin, Fl. Ionescu

Impactul ca sursă de vibraţii la frezarea frontală de finisare 91

AUTOMATICA

Irina Athanasiu

Programul ACENC — pentru analiza circuitelor electronice neliniare în curent continuu 105

ELECTRONICA

D. Stanomir

Metodă de analiză a sistemelor cu parametrii distribuiţi, lucrînd în regim staţionar 113

TRANSPORTURI

A. Stoicescu

Asupra stabilităţii la perturbaţii mici a mişcării circulare a automobilului cu diferenţial autoblocabil 129

A. Cotoranu

Contribuţii la optimizarea tonajelor şi vitezelor trenurilor de marfă 137

MANAGEMENT

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru

Contributions to the Study of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions II 149

Резюме

Д. К. 512.8

Л. Попеску

Один из методов действительного строительства алгебраических многочленов Постпоение приближения функций.

Работа исследчет построеине многочленов наилучшего лучшего приближения дяя опредтленных функций. Построение основано на теореме Чербышева (метод Чебышева).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 661.183.6.:661.857

Агнета Бытка Чербу, М. Ионеску

Определение серебра из растворов с помощью синтетического цеолита типа На А

Дан весовый метод определения серебра, основанный на его извлечении из растворов путем ионного обмена в динамических условиях на порошкообразном цеолите типа NaA. Описывается прибор и методы работы. Даны параметры которые, влияют на точность определения. Метод позволяет рекуперацию серебра.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 533.6 :517

К. Бербенте

Метод для аэродинамического расчета крыльев конечного размаха в несжимаемом потоке.

Предполагается быстро сходящийся метод последовательных приближений для вычисления крыльев конечного размаха, в несжимаемом потоке, считаясь с влиянием фюзелажа и других деталей самолета. Дана расчетная программа, позволяютщая достижения результатов за очень короткий интервал времени.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Summary

D. C. 512.8

L. A. Popescu

An Effective Method for Construction of Algebric Polinomials of Best Approximation for Functions

The paper deals with the effective construction of some algebric polinomials of "best approximation" for usual real valued functions; the construction is based on Tchebishew's theorem (Tchebishev's Method).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 661.183.6:661.857

Agneta Bâtcă Cerbu, M. Ionescu

Silver Dosage from Solutions by Means of Synthetic NaA type Zeolite

The essay presents a method of gravimetric determination of silver based on the quantitative holding back of the ungranulated zeolit type NaA from solution by ionium exchange under dynamic conditions. It is described the apparatus and the working method. The parameters which influence the results of determination are discussed. The recovery of silver is possible.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 533.6:517

C. Berbente

On a Method for the Aerodynamic Calculation of Wings of Finite Span in Incompresible Flow.

An interation method to calculate wings of finite span, in incompressible flow, considering the interferences, is proposed. One gives a computat on program that provides very rapidly the numerical results.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 621.436.12

Анка Родика Бэрэцеску А. Маноле
К. Сильвестру

Конструктивные формы очень хорошие с динамической точки зрения для У-образных четырехтактных двигателей в вставленными цилиндрами

Представляется анализ конструктивных форм, очень хорошие с динамической точки зрения для У-образных четырехтактных двигателей с вставленными цилиндрами, равномерной раскладкой зажигания, с 2,4 и 6 цилиндрами. Устанавливаются формы цилиндров и порядок валов, угол между рядами цилиндров и порядок работы, которые удовлетворяют требование наилучшей уравновешенности двигателя. Получаются замечательные решения которые обеспечивают хорощую и полнюу уравновешенность.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 536.711.621.4

В. Радченко

Определение потерь от необратимости дросселирования газов и паров в случае систем газораспределения тепловых машин и регулирующих вентилей холодильных установок.

В работе устанавливается, при помощи эксергии, критерий для определения совершенства дросселирования. Доказывается, что уменьшение эксергии агента при дросселировании подразувает падение Δe_t эксергии при $T = ст$ и изменение Δe_p эксергии при $p = ст$. В случае идеального газа эксергетический к.п.д. обращается в нуль а в случае реального газа в области $T < T_0$ и $\alpha > 0$ он достигает большей величины. Анализируется влияние дросселирования на экономичность двигателя с воспламенением от сжатия, поршневого компрессора и холодильной паровой установки.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 539.4

В. Косак

Боковые вибрации маятникоподвешанных балок на „n" опорах в случае их антисиметричного выпучивания.

В работе изучаются боковые вибрации маятникоподвешанных балок с поперечной упругостью меньше вертикальной, гармонично возбужденные при их антисиметричном выпучивании.

Определяются расчетные отношения на определение главных полос динамической неустойчивости балок.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 621.436.12

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru

The Optimal Crankshaft Solutions from a Dynamic Point of Vue, for 4-Stroke V-Engine with Intercalated Cylinders

The paper analyzes the optimal crankshaft solutions, from a dynamic point of vue, for 4-stroke V-engines, with intercalated cylinders and uniform distributed ignitions, having 2,4 and 6 cylinders.

The crankshaft solutions, the V angle and the ignitions succession between the cylinder lines, for the best engine balancing, were established. Very advantageous solutions were got to insure a very good balancing or eaven a complete one.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 536.711.621.4

Vs. Radcenco

The Computation of the Losses Generated by the Irreversibility of the Gases and Vapour Drosell Effect in the Thermal Engines and Refrigeration Machines.

It is establisched, using the concept of exergie an cryterion of efficiency of the drosell effect. It is studies the influence of the drosell effect on the economicity of a Diesel engine, of a piston compression and of a refrigeration machine using vapour.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 539.4

V. Cosac

Lateral Vibrations of Hanging Pendular Beams with „n" Supports, in the Case of Antisymmetric Buckling

In the paper the lateral vibrations of pendular beams are studied, whose transverse rigidity is smaller than the vertical one.

Harmonic excitation in the case of antisymmetrical buckling is considered.

Relationships for the determination of the main dynamic instability zones of the beam are established.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 621.914

З. Дука, И. Георге, Ал. Дорин, Фл. Ионеску

Контактный удар, как источник вибраций при чистовом боковом фрезеровании

В работе определяется, аналитическим методом, оптимальная геометрия боковой фрезы для разных положений детали по отношению к оси фрезы, для того, чтобы получить минимальный контактный удар.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 681.31

И. Атанасиу

Программа АЧЕНК для анализа электронных нелинейных цепей в режиме постоянного тока

В статье рассматривается возможность использования ЭВМ для проектирования электронных цепей. Дается программа для анализа электронных цепей, содержащих биополярные транзисторы в режиме постоянного тока. Данная программа была реализована на кафедре Вычислительной техники Политехнического Института г. Бухареста в двух вариантах: одна для машины ИБМ 1130 и одна для Феликс С 256.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 625.24

А. Которану

К оптимизации тоннажа и скорости грузовых поездов

В данной работе рассматривается опред еление оптимального веса и скорости грузовых поездов соответствующих максимальной грузопровозной способности перегона.

Тяговой характеристикой считается полином Лагранжа 3-ей степени, коэффициенты которого определятся с помощью соответствующей формулы интерполирования.

Было принято, что прицепка грузовых поезд ов обеспечиется тепловозом 060—ДА и электровозом 060—ЕА, принадлежащих дело Румынской железнодороги.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 621.914

Z. Duca, I. Gheorghe, Al. Dorin, Fl. Ionescu

The Shock Sourse of Vibrations in the Frontal Finishing Milling

In the paper the authors presents an analytical method realised in order to obtain an optimal geometrie for the milling-cutter which makes possible to minimize the shock in the milling process for differend positions of the worked piece with the axis of the tool.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 681.31

I. Athanasiu

The Program ACENC-for the Analysis of Non-linear Electronic Circuits in d.c.

The paper describes a possibility to use computers in designing electronic circuits and presents the structure of a new program used for the d.c. analysis of bipolar transistor electronic circuits.

The program has been designed in the computer department of the Polytechnical Institute implemented in FORTRAN IV on IBM 1130 and FELIX C 256 computers.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 625.24

A. Cotoranu

Contributions to the Optimizing of the Tonnages and Speeds of the Goods Trains.

The paper deals with the determination of the goods trains weights and optimum speeds corresponding to the maximum transport capacity of the traffic section.

The engine traction characteristic is presented as a Lagrange polynom of IIIrd degree by uzing the corresponding interpolating formula.

There were taken into consideration the case of the goods trains trailed by Diesel 060-DA engines and by Electric 060-DA engines from the Romanian Railway.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 629.11

Д. Станомир

Метод для анализа систем с распределеннными параметрами, работающими в стационарном режиме

Дается метод для анализа систем с распределенными параметрами, работающими в стационарном режиме. Метод основан на использовании усредненной формы энергетической функции Лагранжа. Результаты применены для случаев механических и механоакустических систем.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 517.512.3

А. П. Стойческу

Относительно устойчивости при малых возмущениях стационарного циркулярного движения автомобиля с самоблокирующимся дифференциалом.

В работе рассматривается устойчивость при малых возмущениях стационарного циркулярного движения автомобиля с самоблокирующимсяди фференциалом. Исследуется случай, когда дифференциал блокирован как в невозмущенном, так и в возмущенном движении.

Кроме установлении условий устойчивости, выявляется принципиальная возможность экспериментально определить критическую скорость прямолинейно движущегося автомобиля с самоблокирующимся дифференциалом путем прохождения замкнутой окружности, угол поворота управляемых колес будучи равен нулю.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Д. К. 65.012.4

А. Карабулеа, Г. Рушитору, Г. Антон

К вопросу об изучении программирования производства в условиях уверенности и неуверенности

Составляются математические опредлительные и вероятные образцы с целью изучения программирования производства в условиях уверенности и неуверенности.

Составленный алгоритм имеет в основе концепты операционального исследования, облегчающие изменение структуры расчетных расчетов, имея в виду теорию хранение, теорию ожидания, теорию износа, наджености в эксплуатации, теорию рабочей силы, а также теорию распределения во времени капиталовложений в уверенных или неуверенных условиях программирования производства.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 629.11

D. Stanomir

A Method for the Analysis of the System with Distributed Parameters and Working in a Stationary Conditions

In the paper a method for the analysis of the systems whith distributed parameters is developed. The idea of the method is to use an averaged lagrangian of the system.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 517.512.3

A. P. Stoicescu

About the Stability on Small — Disturbances of the Steady Circular Motion of an Automobile Equiped with Self — Locking Differential

The paper deals with the stability on small — disturbances of the steady circular motion of an automobile wich owens self — locking (non — slip) differenţial. The author analyses the case in wich differenţial is locked as in the basic as in the disturbed motion.

Besides the establishment of stability conditions is evidenced the principial possibility of the experimental determination of the critical velocity in a straight movement of an automobile equiped with self — locking differenţial by means of the move in a circle with the unturned direction wheels.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. C. 65.012.4

A. Carabulea, Gh. Ruşitoru, Gh. Anton

Contributions to the Stuly of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions II

The paper shows the way to develop determinist and probabilist mathematical models whose application facilitates the optimitation of production programming in certainty conditions.

The conceived algorithm is based on theoperational research concepts for builiding the mathematical model structure by which such theories as storage. waiting, wear, production order, reliability, and production quality, general time bagged and investments theory are operating. These mathemtical models can be applied in certainty and uncertainty conditions of prodution programming.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Résumé

C. D. 512.8

L. A. Popescu

Une méthode de construction effective des polynomes algebriques de la meilleure approximation des fonctions.

L'article s'occupe de la construction effective de quelleques polynômes de la meilleure approximation pour des fonctions réelles usuelles, construction basée sur la théoreme de Thebycheff (La méthode de Thebycheff).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 661.183.6:661.857

Agneta Bâtcă Cerbu, M. Ionescu

Dosage de l'argent de divers solutions à l'aide des zéolites synthétiques

L'étude décrit une méthode gravimétrique de dosage de l'argent qui s'appuie sur la propriété des zéolites artificiels du type NaA de retenir, d'une manière selective, les ions d'argent d'une solution. On indique la méthode de travail avec la description de l'appareil employé. On examine les paramètres qui ont influencé sur les résultats des dosages, par la méthode déjà décrite .

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 533.6.:517

C. Berbente

Sur une méthode pour le calcul aerodynamique des ailes d'envergure finit en regime incompressible

On a proposé une méthode d'itération, rapidement convergente, pour calculer les ailes d'envergure finie, en régime incompressible, considerant d'influence du fuselage et des autres parts d'avion. On a donné un programme de calculation qui permit d'obtenir très rapidement les résultats numériques.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

Zusammenfassung

D. K. 512.8

L. A. Popescu

Eine Methode für den effektiven Bau der algebrischen Polinome von höchster Approximation der Funktionen

Der Artikel befasst sich mit dem effektiven Bau einiger algebrischen Polinome von besster Approximation für bestimmte reele und üblich Funktionen, Bau welcher auf grund der Tschebischew Teoreme gemacht wird (Tschebischew — Methode).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 661.183.6:661·857

Agneta Bîtcă-Cerbu, M. Ionescu

Die Ermittlung des Silbers aus Lösungen mit Hilfe des synthetischen Zeoliths — Type NaA.

Die wissenschaftliche Arbeit legt eine gravimetrische Bestimmungsmethode des Silbers dar, die sich auf die quantitative Rückbehaltung desselben aus Lösungen des ungekörnten Zeoliths — Type NaA durch ionischen Wechsel unter dynamischen Bedingungen stützt.

Es wird die Apparatur und Arbeitsmethode beschrieben.

Es werden die Parameter, die die Bestimmungsergebnisse beeinflussen, besprochen.

Die Methode erlaubt die Rückgewinnung des Silbers.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 533.6:517

C. Berbente

Über eine Methode zur Berechnung der aerodynamischen Charakteristiken der Tragflächen endlicher Spannweite in inkompressibler Strömung.

Ein Iterationsverfahren rascher Konvergenz, für die Berechnung der Tragflächen endlicher Spannweite in einer incompressiblen Strömung unter Beachtung des Einflusses verschiedener Flugzeugbauteile (Z.B. des Rumpfles) wird vorgeschlagen. Man gibt ein geeignetes Berechnunsprogramm das sofort zu den numerischen Resultaten führt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 621.436.12

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru

Solutions constructives optima du point de vue dynamique pour le moteur en V à quatre temps à cylindres intercalés.

L'ouvrage analyse les solutions constructives, optima du point de vue dynamiques pour les moteurs en V à cylindres intercalés, à quatre temps, à allumages uniformement repartisées, avec 2, 4 et 6 cylindres. On précise les solutions de vibrequins, l'angle entre les lignes des cylindres et la succéssion des allumages entre les deux lignes qui assurent le meilleur equilibrage du moteur. On obtient des solutions remarquables qui confèrent un equilibrage avancé ou même complet.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 536.711:621.4

Vs. Radcenco

La détermination des pertes provoquées par l'irreversibilité du laminage des gas et des vapeurs concernant les sistemes de distribution des machines thérmiques et les soupapes a détente des instalations frigorifiques.

L'étude a comme objet l'établissment à l'aide de l'éxergie, d'un criterium d'application de la perfection du proces du laminage. On montre que la diminution de l'éxergie de l'agent par laminage suppose une diminuation Δl_T de l'exergie à $T = \text{ct}$ et une variation Δl_T de l'exergie à $p = \text{ct}$. Les résultats montrent que le randement exergétique du laminage est nul aux gas parfaits et touche des valeurs importantes aux gas réels dans le domanie $T < T_0$ et $\alpha_i > 0$. L'étude s'occupe aussi de l'influence du laminage concérnant l'économicité d'un moteur Diesel, d'un compresseur à piston et d'un instalation frigorifique à vapeurs.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 539.4

V. Cosac

Vibrations latérales des poutres appuyées pendulairement sur „n" appuis, au cas du flambent antisymetrique.

On étudie les vibrations des poutres pendulaire, ayant la rigidité transversale plus petite que celle verticale, excitées sinusoidalement, au cas de leur flambemnt antisymetrique.

On établie des relations pour la détermination des principales zones d'instabilité dynamique de la poutre.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 621.436.12

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru

Die konstruktive Formen der kurbelwelle welche für Viertakt-verbrennungsmotoren in V-Form mit zwischengeschalteten Zylindern

In die Arbeit werden die konstruktive Formen der Kurbelwelle analisiert, welche für Viertaktverbrennungsmotoren in V-Form, mit 2,4 und 6 zwischengeschalteten Zylindern und mit uniform verteilte Entzündungen bestmöglich sind. Hier werden die Kurbelwellen Formen, der Winkel zwischen der Zylinderreihen und die Zündordung bestimmt die optimal für das Gleichgewicht des Verbrennungsmotors sind. Als Ergebnis, bekommen die Verfossern sehr vorteilhaften Formen die ein sehr guter oder ganzlicher Gleichgewicht versichert.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 536.711:621.4

Vs. Radcenco

Die Bestimmung der Nichtumkehrbarkeitsverluste bei der Drosselung der Gasen und des Dampfes in den Verteilungsventilen der thermischen Maschinen und in den Regelventilen der kälteanlagen.

In der Arbeit wird es bestimmt, mit Hilfe der Exergie, ein Einschätzungskriterium der Vollkommenheit des Drosselungsprozesses. Es wird bewiesen, dass die Verminderung der Exergie eines Kältemittels aus einer isothermischen Verkleinerung Δl_T, und einer isobaren Veränderung Δl_T der Exergie besteht.

Davon ergibt sich, dass der Wirkungsgrad der Drosselung im Falle der idealen Gasen gleich null ist, aber unvernachlässigbare Warte bei der realen Gasen im Bereich $T < T_0$ und $\alpha_i > 0$ hat. Es wird den Einfluss der Drosselung über die Wirtschaftlichkeit eines Dieselmotors, eines Kolbenverdichters und einer Kompressionskältemaschine untersucht.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 539.4

V. Cosac

Die Querschwingungen von „n" mal gelagerten Pendelbalken — für den Fall der antisymmetrischen knickung.

In der Arbeit werden die Querschwingungen der harmonisch erregten Pendelbalken, deren Quersteifigkeit kleiner ist als jene nach der Vertikalen, im Falle ihrer antisymmetrischen Knickung untersucht.

Es werden Beziehungen abgeleitet, mit Hilfe derer die dynamischen Instabilitätsbereiche des Balkens bestimmt werden konnen.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D 621.914

Z. Duca, I. Gheorghe, Al. Dorin, Fl. Ionescu

Le shock, sourse de vibrations dans le fraisage frontal de finition.

Le travail offre aux lecteurs une methôde analytique mise au point dans le but de déterminer la géometrie optimale de la fraise-outil et d'obtenir un shock minimum pour des différents positions de la piece a ousiner par rapport a l'axe de la fraise.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 681.31

I. Athanasiu

Le programme ACENC pour l'analyse des circuits éléctroniques nélineare en courant continu.

L'article décrit une possibilité d'utilssation des ordinateurs pour le calcul des circuits éléctroniques et présente la structure d'un nouveau programme pour l'analyse en courant continu des circuits éléctroniques a transistors bipolaires.

Le programme a été concu a la chaire d'Informatique de l'Institut et écrit en FORTRAN IV pour les ordinateurs IBM 1130 et FELIX C-256 (IRIS-50).

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 25.24

A. Cotoranu

Contributions a l'optimisation des tonnages et des vitesses des trains de marchandise

Dans le travail, on traite le probleme de la détermination des tonnages et des vitesses optimales des trains de marchandise correspondants à la capacité maximale de transport d'une section de circulation.

La caracteristique de traction de la locomotive est presentée sous la forme d'un polynome Lagrange du troisieme degré dont les coeficients sont determinés à l'aide d'une formule d'interpollation correspondante.

On a considéré les cas des remorgues des trains marchandise avec des locomotives Diesel 060-DA et des locomotives electriques 060-EA du parc C.F.R.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 621.914

Z. Duca, I. Gheorghe, Al. Dorin, Fl. Ionescu

Der Schoek-Schwingungsquelle im Frontalfrä-Prozess

In der voliegenden Arbeit wird dem Leser eine analytische Methode vorgestellt, mit hilfe derer die optimale Geometrie der Fräse getunden werden kann, welche für verschiedene Stellungen des Werkstückes gegenüber der Fräse-Axe zu möglichst kleine Schocken führt.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 681.31

I. Athanasiu

ACENC Programm-für die Analyse der nicht-linearen elektronischer Schaltungen für Gleichstrom

In der Arbeit werden die Einsatzmöglichkeiten der Elektron-rechner beim Entwurf elektronischer Schaltungen beschrieben und die Programmstruktur für die Analyse der, mit bipolaren Transistoren bestückten Schaltungen für Gleichstrom dargelegt.

Das Programm wurde beim Lehrstull für Elektron-rechner des Bukarester Polytechnikums entwickelt und in zwei Bauvarianten für die Rechner IBM 1130 und FELIX C 256 angepasst.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 625.24

A. Cotoranu

Beiträge zur Optimisierung der Ladungsfähigkei und Geschwindigkeiten den Güterzüge

In der Arbeit wird das Problem der Bestimmung der Ladungsfähigkeit und der optimalen Geschwindigkeiten der Güterzüge, mit höchster Transportkapazitäl in einem Fahrbezirk, behandelt.

Mit Hilfe eines Polinoms Lagrange dritten Grades, dessen Koefizienten mittels der Interpolierungsformel bestimmt werden können, wird die Ziehcharakteristig der Lokomotive dargestellt.

Die zur Beobachtung gewählten Lokomotiven sind elektrische Diesel — Loks 060-DA und elektrische Lokomotiven 060-EA aus dem C.F.R. — Park.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 629.11

A. Stoicescu

Sur la stabilité des petites perturbations du mouvement circulaire de l'automobile à differentier autobloquable

L'auteur étudie dans ce travail la stabilité aux petites perturbations du mouvement circulaire de l'automobile à différentiel autobloquable, lorsque ce dernier demeure bloqué tant dans le mouvement de base, que dans le mouvement perturbé.

En dehors de la détermination des conditions de stabilité, l'auteur met en évidence la possibilité principale de déterminer expérimentalement la vitesse critique dans le mouvement rectiligne de l'automobile à différentiel autobloqiable, par son déplacement circulaire, les rouse directrices n'étant pas braquées.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 517.512.3

D. Stanomir

Méthode d'analyse pour les systèmes à constantes réparties fonctionnant dans un régime stationnaire.

On done une méthode d'analyse pour les systèmes à constantes réparties fonctionnant dans un régime stationaire en utilisant une forme moyennée du lagragien du systeme. Les resultats sont appliqués aux systèmes mecano-acoustiques.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

C. D. 650.012.4

A. Carabulea, Gh. Ruşitoru, Gh. Anton

Contributions à l'étude de la programmation de la production dans des conditions de certitude et d'incertitude.

L'on construit des modéles mathématiques probabilistiques pour l'étude de la programmation de la production dans des conditions de certitude et d'incertitude.

L'algorithme ainsi conçu a pour base les concepts de la recherche opérationnelle qui rend plus facile le changement de la structure des dipenses de calcul, en tenant compte de la thèorie des stock, de la theorie de l'attente, de la théorie de l'usure et de l'assurance de fonnctionnement, de la theorie de la force de travail et de la theorie de l'échelonnement dones les temps des investitions dans des conditions certes ou incerts de programmation de la production.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D. K. 629.11

A. Stoicescu

Über die Beständigkeit der Kreis bewegung des Autos mit selbstklemmendem Diferential bei kleinen Störungen

Im Aufsatz wird die Beständigkeit der kreislaufenden Bewegungen des Autos mit selbstklemmende Differenzial bei kleine Störungen, im Falles dass es in seine Grundbewegungen, sowie in gestörte Bewegungen geklemmt bleibt, geprüft.

Ausser der Bestimmung der Beständikeitsbedingungen wird auch die Hauptmöglichkeit des durch erfahrungmässiges Feststellen der kritischen Geschwindigkeit der rechtlinearen Bewegung des Autos, mit selbstklemmbaren Differenzial durch kreislaufende Bewegung, ohne die Lenkrädern zu wenden, hervorgehoben.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D.K. 517.521.3

D. Stanomir

Eine Analysenmethode der im eingeschiwungenen Zustand arbeiteten Systeme mit verteilten Konstanten

Man gibt eine Analysenmethode, für die im eingeschiwungen Zustand arbeiten Systeme mit verteilten Konstanten, die eine medierte Form des Lagrangian des Systems benützt. Die Ergebnisse werden an die mechanischen und mechano-akustischen Systeme angewendet.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

D.K. 65.01.24

A. Carabulea, Gh. Ruşitoru, Gh. Anton

Beiräge zum Studium der Produktionsprogrammierung unter Sicherhits und Unsicherheits bedingungen

Es werden die mathematischen determinierenden und Modelle zur Untersuchung der Produktionsprogrammierung unter Sicherheits — und Unsicherheitsbedigungen konstruiert.

Der entworfene Algorithmus grundet sich auf die Begriffe der Operationsforschung, die Anderung der Struktur des Rechnungsanfroads unter Berücksichtigung der Vorats-Warte zeit-Abunkungs-Betriabsschurheits-Arbetiskraft-Zeitechelomeren therie der Investitionen unter Sicherheits—und Unsicherheits b dingungen ermöglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXXV Nr. 5/1973

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

MATEMATICĂ

C. Z.: 512.8

O METODĂ APROXIMATIVĂ DE CONSTRUIRE EFECTIVĂ A POLINOAMELOR ALGEBRICE DE CEA MAI BUNĂ APROXIMARE A FUNCȚIILOR*

LIANA ALEXANDRA POPESCU

Cerința impusă de practică, ca matematica să elaboreze metode de aproximare cît mai riguroasă a funcțiilor, a devenit mai stringentă și în același timp metodele respective au devenit mai utile practicii, odată cu apariția mașinilor electronice de calcul care permit efectuarea unui volum enorm de operații, într-un interval de timp minim, cu condiția ca respectivele operații, oricît de numeroase, să prezinte un anumit grad de automatism, să aibă un caracter ciclic, repetitoriu.

Vom aminti mai întîi cîteva noțiuni din teoria aproximărilor și a sistemelor Cebîșev.

Problema aproximării unei funcții f, constă în posibilitatea de înlocuire a acesteia cu o funcție de o *formă particulară mai simplă* (de ex. un polinom de un anumit grad n, ale cărui valori pot fi ușor calculate de mașină printr-un număr mic de operații elementare și ocupînd puține celule de memorie) și ale cărei valori să fie suficient de apropiate de valorile funcției f pe tot domeniul comun de definiție (*să poată aproxima valorile lui f cu o precizie oricît de mare* dorim).

În cuprinsul enunțurilor teoremelor și definițiilor ce vor fi amintite în continuare vom utiliza notațiile :

$$\mathscr{R}_{[a,b]} = \{f \mid f : [a,\ b] \to R\}$$

$$\mathscr{C}_{[a,b]} = \{f \mid f \in \mathscr{R}_{[a,b]};\ f \text{ continuă}\}$$

$$\mathscr{D}^{(n+1}_{[a,b]} = \{f \mid f \in \mathscr{R}_{[a,b]};\ f \text{ de } (n+1) \text{ ori derivabilă}\}$$

DEFINIȚIE : Sistemul de funcții $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ cu $I = \{1, 2, \ldots, (n+1)\}$ și $\varphi_i \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ formează un *sistem Cebîșev* dacă nici o combinație liniară de tipul : $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \varphi_i(x) = 0$ unde $c_i \in R$ și $\sum_{i=1}^{n+1} c_i^2 > 0$, nu are mai mult de n rădăcini distincte pe $[a,\ b]$.

* Manuscris predat redacției la data de 15 februarie 1972.

TEOREMA : Sistemul $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{D}^{(n+1)}_{[a,b]}$ pentru care toți Wronskienii: $W(\varphi_1, \ldots \varphi_k) = 0$ pe $[a, b]$ oricare ar fi $k \in I$ formează un sistem Cebîșev.

CONSECINȚA : Sistemul $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ este un sistem Cebîșev.

Vom considera în continuare că $\mathscr{C}_{[a,b]}$ care formează un spațiu liniar peste corpul R, este și normat, prin relația :

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

DEFINIȚIE : Numim *polinom generalizat* pe $\mathscr{C}_{[a,b]}$ în raport cu un sistem independent oarecare de funcții : $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{C}_{[a,b]}$ o funcție de forma : $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varphi_i(x)$ unde $a_i \in R$ or.$i \in I$.

Vom nota cu $\mathscr{H}$ mulțimea polinoamelor generalizate astfel definite, adică: $\mathscr{H} = \left\{ \Phi \mid \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varphi_i(x) \right\}$.

DEFINIȚIE : $\Phi_0 \in \mathscr{H}$ este un *polinom de cea mai bună aproximare* pentru $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ dacă : $\|f - \Phi_0\| = \inf_{\Phi\in\mathscr{H}} \|f - \Phi\|$.

TEOREMA : Pentru orice $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ există un polinom generalizat de cea mai bună aproximare $\Phi_0(x)$ (teorema e valabilă și pentru $f \in R_{[a,b]}$ cu $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{R}_{[a,b]}$).

TEOREMA LUI HAAR : $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ are ca element de cea mai bună aproximare un polinom generalizat unic dacă și numai dacă $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{C}_{[a,b]}$ formează un sistem Cebîșev.

TEOREMA LUI CEBÎȘEV : $\Phi_0(x)$ este un polinom generalizat de cea mai bună aproximare pentru $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ dacă și numai dacă există cel puțin $(n+2)$ puncte : $x_1 x_2, \ldots, x_{n+2}$; $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} < b$ în care : $f(x_i) - \Phi_0(x_i) = (-1)^i \alpha \|f - \Phi_0\|$ unde $\alpha = \pm 1$.

Observație : Teorema lui Haar și teorema lui Cebîșev rămîn adevărate și dacă vom considera f definită nu pe un interval $[a, b]$ ci pe o mulțime finită care conține cel puțin $n+2$ puncte distincte.

Rezultatele anterioare le vom particulariza pentru sistemul Cebîșev : $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$

Notăm : $\mathscr{H}_n = \{$polinoame algebrice de grad $\leqslant n\}$

$$E_n(f, P_n) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$$

$$E_n(f) = \inf_{P_n\in\mathscr{H}_n} E_n(f, P_n)$$

$E_n(f)$ poartă numele de „abatere minimă".

TEOREMA LUI WEIERSTRASS : Pentru orice $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ și orice $\varepsilon > 0$, există un polinom $P(x)$ cu proprietatea : $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ oricare ar fi $x \in [a, b]$.

Din teorema lui Weierstrass rezultă că : $\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0$, deci putem obține teoretic o precizie oricît de mare.

Prin urmare, pentru orice funcție $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ există un polinom algebric de cea mai bună aproximare, unic $Q_n \in \mathscr{H}_n$ pentru care $E_n(f, Q_n) = E_n(f)$, dacă și numai dacă există pe $[a, b]$ $n+2$ puncte distincte : $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$; $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \leqslant b$ în care $[f(x) - Q_n(x)]$ să ia succesiv valorile $\pm E_n(f)$.

Particularizînd afirmațiile de mai sus pentru o mulțime G finită :

TEOREMA : Un polinom algebric P_n este un polinom de cea mai bună aproximare pentru o funcție reală f, definită pe o mulțime finită G, dacă și numai dacă există $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ din G, cu proprietățile :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \tag{1}$$

$$f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i \alpha E_n(f, G) \tag{2}$$

unde $\alpha = \pm 1$ și $E_n(f, G) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$.

Punctele $x_1, \ldots, x_{n+2}$ vom spune că formează o „alternanță Cebîșev".

Nu există o metodă de construire exactă a polinomului algebric de cea mai bună aproximare, din care cauză se folosesc procedee de construcție aproximativă. Vom analiza un asemenea procedeu.

Facem observația că din punct de vedere practic sîntem interesați ca polinomul să aibă cel mai mic grad posibil, astfel că ne vom opri la acea mulțime $\mathscr{H}_n$ al cărei indice n satisface condiția : $E_n(f) \leqslant \varepsilon < E_{n-1}(f)$. unde ε indică precizia dorită.

Fie $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomul de cea mai bună aproximare al funcției $f : G \to R$ și fie $E_n(f, G)$ determinată prin valorile lui f în punctele alternanței Cebîșev, prin relațiile (2).

Definim :

$$D_{n,i} = D_{n,i}(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_{n+2}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^n \\ 1 & x_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+2} & \ldots & x_{n+2}^n \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$D_{n,i} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n+2} (x_k - x_j), \text{ deci } D_{n,i} > 0.$$

De asemenea :

$$\sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} x_i^k D_{n,i} = 0. \tag{4}$$

Înmulțind relația (2) cu $(-1)^{i-1}D_{n,i}$ și sumînd de la 1 la $(n+2)$ obținem:

$$\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^{i-1}D_{n,i}[f(x)-P_n(x_i)]=-\alpha E_n(f,G)\sum_{i=1}^{n+2}D_{n,i}$$

$$\sum_{i=1}^{n+2}[(-1)^{i-1}f(x_i)+\alpha E_n(f,G)]D_{n,i}=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^{i-1}x_i^kD_{n,i}=0$$

$$-\alpha E_n(f,G)\sum_{i=1}^{n+1}D_{n,i}=\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^{i-1}f(x_i)D_{n,i}$$

Notăm

$$D_n=\sum_{i=1}^{n+2}(-1)^{i-1}f(x_i)D_{n,i} \tag{5}$$

$$-\alpha E_n(f,G)=\frac{D_n}{\sum_{i=1}^{n+2}D_{n,i}} \quad \text{și} \tag{6}$$

$$E_n(f,G)=\frac{|D_n|}{\sum_{i=1}^{n+2}D_{n,i}} \tag{7}$$

iar din (2) și (6) rezultă:

$$\text{sign}\,[f(x_i)-P_n(x_i)]=\text{sign}\,(-\alpha)=\text{sign}\,D_n \tag{8}$$

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}(n+2)$ puncte arbitrare ale mulțimii G cu proprietatea: $y_1<y_2<\ldots<y_{n+2}$.

Dacă notăm cu:

$$\rho(y_1,y_2,\ldots,y_{n+2})=\frac{D_n(y_1,\ldots,y_{n+2},f)}{\sum_{i=1}^{n+2}D_{n,i}(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_{n+2})}$$

se demonstrează în [1] că:

(a) $\rho(y_1,\ldots,y_{n+2})\leqslant E_n(f,G)$

(b) există $n+2$ puncte: $x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}$ din G cu proprietatea că: $\rho(x_1,,x_2,\ldots.x_{n+2})=E_n(f,G)$, sistem ce reprezintă o alternanță Cebîșev și deci:

sign $[f(x_1)-P_n(x_1)]=$ sign $D_n(x_1,\ldots,x_{n+2},f)$, unde P_n este polinomul de cea mai bună aproximare al lui f pe G.

Raţionamentele prealabile ne permit ca, printr-un număr finit de paşi, să construim polinomul de cea mai bună aproximare al lui $f(x)$ în $\mathscr{H}_n$ pe G, unde G este o mulţime formată dintr-un număr finit de m ($m \geqslant n+2$ puncte distincte. Polinomul obţinut îl vom nota cu $P_{n,m}$.

CAZUL $m = n+2$

(a) Aşezăm punctele mulţimii G în ordine crescătoare : $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ şi calculăm $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = E_n(f, G)$ folosind relaţiile (3), (5),(7).

(b) Determinăm sign α = —sign D_n.

(c) Din relaţiile (2) determinăm complet coeficienţii lui $P_{n,m}(x)$ (de fapt utilizăm numai $n+1$ ecuaţii , a $(n+2)-a$ fiind o relaţie de control).

CAZUL $m > n+2$

Considerăm toate cele C_m^{n+2} posibilităţi de alegere a punctelor : $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ ale lui G. Alegem ca alternanţă Cebîşev punctele : $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ care verifică relaţia :

$$\rho(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \max_{(i_1, \ldots i_{n+2})} \rho(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n+2}})$$

şi construim polinomul de cea mai bună aproximare pentru aceste puncte ca în cazul $m = n + 2$.

Justificarea procedeului constă în valabilitatea relaţiei :

$$\Delta(f, P_{n,m}) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{n,m}(x)| \leqslant E_n(f) + \varepsilon_m$$

unde $\varepsilon_m \to 0$ cînd $m \to \infty$ şi a teoremei :

„Dacă $f \in \mathscr{C}_{[ab]}$ şi $\{P_{n,k}\}_{k \in N}$ satisfac condiţia : $\Delta(f, P_{n,k}) = E_n(f) + \varepsilon_k$ unde $\varepsilon_k \to 0$ cînd $k \to \infty$, atunci $P_{n,k}(x)$ converge uniform pe $[a,b]$ către polinomul $P_n(x)$ de cea mai bună aproximare al lui f pe $[a, b]$."[1]

Aceasta înseamnă că procesul descris este convergent, adică cel puţin teoretic ne putem apropia oricît de mult de polinomul algebric de cea mai bună aproximare al lui $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$, prin mărirea numărului de puncte ale mulţimii G, căci :

$$\lim_{k \to \infty} P_{n,k} = P_n.$$

EXEMPLUL 1.

„Să se construiască $P_{5,7}(x)$ pentru funcţia $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$, definită pe intervalul : $[-1, 1]$"

Fie $G = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

$n = 7 \qquad m = n + 2 = 7$

$x_1 = -1 \qquad f(x_1) = -1 \qquad D_{5.1} = 2^4/3^5\, W$

$x_2 = -2/3 \qquad f(x_2) = -\sqrt{3}/2 \qquad D_{5.2} = 2^5/3^4\, W$

$$x_3 = -1/3 \quad f(x_3) = -1/2 \quad D_{5,3} = 5 \cdot 2^4/3^4\, W$$
$$x_4 = 0 \quad f(x_4) = 0 \quad D_{5,4} = 5 \cdot 2^6/3^5\, W$$
$$x_5 = 1/3 \quad f(x_5) = 1/2 \quad D_{5,5} = 5 \cdot 2^4/3^4\, W$$
$$x_6 = 2/3 \quad f(x_6) = \sqrt{3}/2 \quad D_{5,6} = 2^5/3^4\, W$$
$$x_7 = 1 \quad f(x_7) = 1 \quad D_{5,7} = 2^4/3^5\, W$$

$$\text{unde } W = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3^3 & 1/3^5 \\ 2/3 & 2^3/3^3 & 2^5/3^5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \sum_{i=1}^{7} (-1)^{i-1} f(x_i) \quad D_{5,i} = 0$$

$$E_5 f,\ G) = \frac{D_5}{\sum_{i=1}^{7} D_{5,i}} = 0$$

Fie $P_{5,7}(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$
Coeficienţii lui $P_{5,7}(x)$ se obţin prin rezolvarea sistemului

$$f(x_i) - P_{3,5}(x_i) = \alpha(-1)^i\, E_5(f,\ G) = 0$$

pentru $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Obţinem :

$$P_{5,7}(x) = \frac{3^4(7 - 4\sqrt{3})}{2^4 \cdot 5} x^5 - \frac{3^2(15 - 8\sqrt{3})}{2^4} x^3 + \frac{47 - 9\sqrt{3}}{2^2 \cdot 5} x$$

iar graficele lui $f(x)$ şi $P_{5,7}(x)$ sînt trasate în figura 1.

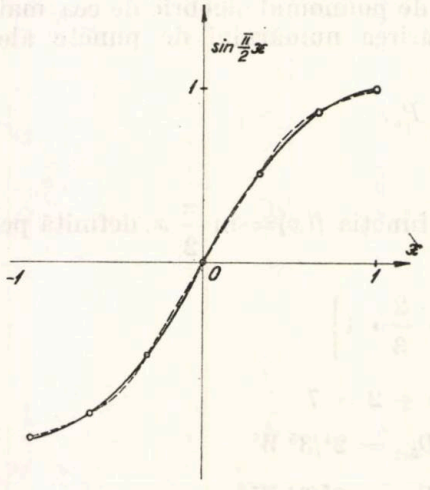


Fig. 1

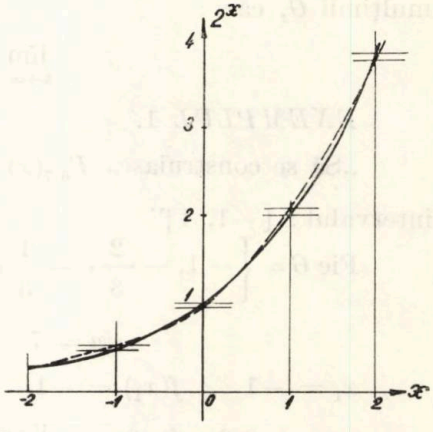


Fig. 2

EXEMPLUL 2.

„Să se construiască $P_{3,5}(x)$ pentru funcţia $f(x) = 2^x$ definită pe intervalul $[-2, 2]$.

Fie $G = \{-2, -1, 0, 1, 2\{ \quad n = 3 \quad m = n + 2 = 5$

$x_1 = -2$	$f(x_1) = 1/4$	$D_{3,1} = 12$
$x_2 = -1$	$f(x_2) = 1/2$	$D_{3,2} = 48$
$x_3 = 0$	$f(x_3) = 1$	$D_{3,3} = 72$
$x_4 = 1$	$f(x_4) = 4$	$D_{3,4} = 48$
$x_5 = 2$	$f(x_3) = 4$	$D_{3,5} = 12$

$$D_3 = \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} f(x_i)\, D_{3,i} = 3 \quad D_3 > 0 \quad \text{deci} \quad \alpha = -1$$

$$E_3(f, G) = \frac{D_3}{\sum_{i=1}^{5} D_{3,i}} = \frac{1}{64}$$

Fie $P_{3,5}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Coeficienţii lui $P_{3,5}(x)$ se obţin prin rezolvarea sistemului :

$$f(x_i) - P_{3,5}(x_i) = \alpha(-1)^i E_2(f,G) = (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{64}.$$

Rezultă :

$$P_{3,5}(x) = \frac{x^3}{16} + \frac{9x^2}{32} + \frac{11x}{16} + \frac{63}{64}$$

iar graficele lui $f(x)$ şi $P_{3,5}(x)$ sînt reprezentate în figura 2.

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Berezin* şi *Jidkov* Metode de calcul (ED. 2-a Moscova 1962)
2. *Demidovici, Maron, Subalova* Metode numerice în analiză (ed. 2-a Moscova 1963)
3. *Antony Ralston, Herbert Wilf* Mathematical Methods for Digital Computers (New Jersey1955)
4. *Georges Hronecker* Approximation rationnelle voisines de la meilleur approximation au sens de Tchebycheff (Comptes Rendu tome 249 no. 10 sept. 1959)
5. *Ugo Barbuti* Sulla teoria della migliore approssimazione nel senso di Tchebychev (Rendiconti del Saminario Matematico della Universita di Padova Vol XXX—1960)
6. *Ion Cuculescu,* Analiza numerică Ed. Tehnică Bucureşti 1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

CHIMIE

C. Z.: 661.183.6:661.857

DETERMINAREA ARGINTULUI DIN SOLUȚII CU AJUTORUL ZEOLITULUI SINTETIC DE TIP NaA*

AGNETA BÂTCĂ-CERBU, M. IONESCU

Determinarea cantitativă a argintului se poate face prin metode gravimetrice, volumetrice (prin reacții de precipitare) sau fizico-chimice (spectrografie, colorimetrie, polarografie, electrogravimetrie, ș. a.).

În prezenta lucrare se descrie o metodă gravimetrică de determinare a argintului din soluții, bazată pe reținerea acestuia, prin schimb ionic, în zeolitul sintetic de tip NaA.

Zeolitul de tip A este un aluminosilicat cristalin sintetic cu o rețea tridimensională rigidă, cuprinzînd cavități legate între ele, care formează canale intracristaline de dimensiuni constante conținînd cationi și molecule de apă. Diametrul cavităților este de 11,8 Å, iar cel al inelelor de intrare în cavități, respectiv porii zeolitului, de 4—5 Å, funcție de cationul zeolitic.

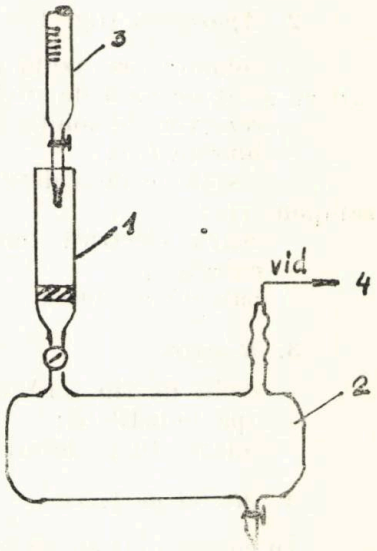


Fig. 1

Formula celulei elementare a zeolitului de tip NaA este :

$$Na_{12}[(SiO_2.AlO_2)_{12}].27H_2O.$$

Cationii aflați în cavități neutralizează sarcinile negative ale rețelei de aluminosilicat determinate de prezența tetraedrilor $[AlO_4]^{5-}$ care înlocuiesc parțial, izomorf, pe cei de $[SiO_4]^{4-}$ și care imprimă rețelei zeolitice un caracter acid. Cationii sînt legați de rețeaua de aluminosilicat prin forțe electrostatice, dar au o mobilitate relativ mare, putînd fi schimbați cu alți cationi a căror rază în stare hidratată este cel mult de 4 Å. Datorită acestui fapt, zeoliții în general și cel de tip NaA în particular, se comportă ca schimbători de ioni selectivi.

*)Lucrare comunicată la Conferința națională a cercurilor științifice studențești, Iași noiembrie 1971.

Din studii publicate în literatură asupra echilibrului de schimb ionic dintre cationii zeolitici şi diferiţi cationi aflaţi în soluţie apoasă, rezultă că zeolitul de tip A prezintă o afinitate deosebit de mare faţă de ionul de argint (Ag^+), ceea ce rezultă şi din compararea coeficienţilor de selectivitate (S) pentru diferiţi cationi monovalenţi. Astfel: S = 451,00 pentru Ag^+, faţă de 63,3 pentru Tl^+, 0,92 pentru K^+ şi 0,18 pentru Li^+ [1].

Într-o lucrare asupra cineticii schimbului ionic [2], se arată că reţinerea ionului de argint din soluţii de către zeolitul de tip NaA se face cu viteză mare, echilibrul stabilindu-se într-un interval de timp de ordinul secundelor. Această comportare deosebită a zeolitului de tip NaA faţă de cationul argint (Ag^+) a determinat alegerea acestuia pentru determinarea argintului.

Metoda experimentală

1. *Principiul metodei*

În principiu, metoda propusă constă în trecerea unei soluţii ce conţine ioni de argint de determinat sub formă de sare solubilă, peste o cantitate cîntărită de pulbere zeolitică (a), cu o viteză astfel aleasă încît argintul să fie total reţinut în stratul de zeolit. După spălare cu apă, zeolitul se aduce la greutate constantă (b) prin uscare şi răcire. Din diferenţa de greutate (*b-a*) se determină masa de argint conţinută în probă, folosind formula de calcul stabilită.

2. *Aparatura* (fig. 1):

— coloniţă prevăzută cu placă de sticlă fritată sau cu strat de vată de sticlă (1);
— rezervor de soluţie (2);
— biuretă (3);
— instalaţie de vidare (pompă de vid sau trompă de apă cu vas tampon) (4);
— etuvă electrică termoreglabilă (105°C);
— exicator;
— balanţă analitică.

3. *Reactivi*:

— zeolit de tip NaA negranulat;
— apă bidistilată;
— soluţie 10% clorură de sodiu.

4. *Modul de lucru*

În coloniţa (1) adusă în prealabil la greutate constantă, se introduce o cantitate de zeolit NaA pulbere, de aproximativ 0,3—0,5 g, astfel încît să formeze un strat de aproximativ 10 mm înălţime.

Coloniţa astfel pregătită se usucă în etuvă la 105°C timp de 1/2 oră, apoi să răceşte în exicator prevăzut cu $CaCl_2$ şi se cîntăreşte cu precizia de 0,1 mg. Operaţiile de uscare şi răcire se repetă pînă la greutate constantă.

Coloniţa de zeolit în greutate totală „A" g se fixează la rezervorul (2) prin intermediul unui tub de cauciuc prevăzut cu robinet sau clemă Hoffmann.

Rezervorul de soluţie împreună cu coloniţa se fixează într-un stativ. În acelaşi stativ se fixează o biuretă (3) conţinînd soluţia de analizat. În rezervorul de soluţie se introduc cîteva picături de soluţie de clorură de sodiu, care au rolul de a indica prezenţa argintului în efluent. Dacă în soluţia din rezervor apare o tulbureală sau un precipitat alb (AgCl) înseamnă că zeolitul nu reuşeşte să reţină total ionii de Ag şi determinarea trebuie repetată.

Pentru o mai bună observare a unei eventuale tulbureli (de AgCl) în spatele rezervorului de soluţie se fixează o hîrtie neagră care să permită o mai bună vizibilitate.

Toate operaţiunile prealabile îndeplinite, rezervorul (2) se leagă la o trompă sau pompă de vid prin intermediul unui tub de cauciuc şi se pune în funcţiune instalaţia de vidare. Se tratează zeolitul cu apă bidistilată pînă ce toată masa de zeolit se umectează uniform. După ce apa a fost îndepărtată se începe trecerea soluţiei de azotat de argint.

Viteza de trecere trebuie astfel reglată încît să asigure reţinerea totală a ionilor Ag^+ din soluţie de către zeolit.

Din determinările preliminare, viteza de trecere a fost stabilită la 2 ml/minut (a se vedea mai departe).

Viteza depinde şi de concentraţia argintului în probă. Ea trebuie să fie de cel mult $5 \cdot 10^{-4}$ echiv-g Ag/10 ml soluţie (respectiv soluţie 0,05 n).

În tot timpul trecerii soluţiei prin coloană se observă să nu apară tulbureală (AgCl) în efluentul din rezervor.

Dacă este necesară o verificare mai precisă, după terminarea procesului de schimb ionic, se barbotează hidrogen sulfurat în efluent, apoi se încălzeşte puţin soluţia. Sulfura de argint de culoare neagră, avînd un produs de solubilitate mult mai scăzut decît clorura ($P.S.Ag_2S = 6{,}0 \cdot 10^{-50}$; $P.S.AgCl = 1{,}8 \cdot 10^{-10}$) reacţia cu hidrogenul sulfurat este mai sensibilă.

După terminarea trecerii soluţiei de analizat zeolitul se spală de 2—3 ori cu apă bidistilată. Se detaşează apoi coloniţa şi se usucă într-o etuvă la 105°C timp de 1/2 h, se răceşte într-un exicator prevăzut cu $CaCl_2$ şi se cîntăreşte. Se repetă operaţia pînă la greutate constantă.

Discuţii

Fiind o metodă nouă de analiză, în experienţele efectuate s-a urmărit stabilirea condiţiilor de lucru optime care să asigure o precizie cît mai mare a determinărilor, reproductibilitatea lor, precum şi o durată minimă posibilă. S-au urmărit:

1) Viteza de trecere a soluţiei de determinat prin coloană.
2) Cantitatea de zeolit pentru o probă.
3) Volumul soluţiei de determinat şi concentraţia ei.
4) Condiţiile de uscare (temperatura, durata uscării şi modul de răcire a zeolitului).
5) Metoda de calcul al rezultatului analizei.
6) Durata totală a determinării.
7) Posibilitatea valorificării argintului reţinut.

1) Viteza de curgere a soluției prin stratul de zeolit a fost determinată măsurînd timpul de trecere prin coloană a soluției de analizat. S-a urmărit continuu starea efluentului, respectiv dacă apar ioni de argint în efluent.

S-a lucrat cu viteze de 0,25 ml/minut, 0,5 ml/minut, 1 ml/minut, și 2 ml/minut (la o înălțime a stratului de zeolit de 10 mm pentru 0,5 g pulbere).

S-a pornit inițial cu viteze mici de trecere a soluțiilor prin coloniță, apoi, după ce s-a stabilit că la viteza respectivă ionii de Ag^+ se reține integral s-au făcut determinări la viteze din ce în ce mai mari. S-a adoptat viteza de 2 ml/min, care este satisfăcătoare și din punct de vedere al duratei determinării.

2) În urma determinărilor preliminare s-a adoptat cantitatea de aproximativ 0,5 g zeolit, cîntărită cu precizia de 0,1 mg.

Înălțimea stratului de pulbere în coloniță 8—10 mm asigură reținerea totală a argintului la viteza de 2 ml/min și nu opune o rezistență prea mare trecerii lichidului prin coloană.

Diametrul interior al coloniței este de 8—10 mm.

3) S-a lucrat cu soluții standard, variind concentrația ionilor de argint de determinat. Pentru a stabili limita superioară de concentrație admisibilă s-a calculat cantitatea de ioni de Ag^+ ce pot fi reținuți de zeolit (respectiv capacitatea de schimb a zeolitului) care, așa cum rezultă din analiza conținutului de sodiu în zeolit, este de 4.10^{-3} echiv-g Ag/g zeolit (pentru zeolitul utilizat).

1 g zeolit . . . . . 0,004 echiv-g Ag^+

0,5 g zeolit . . . . . 0,002 echiv-g Ag^+

Se adoptă un coeficient de siguranță de 0,5. În aceste condiții s-au trecut 10 ml soluție de $AgNO_4$ cu un conținut de 0,001 moli Ag^+ (soluție 0,1 n). Nu s-a observat apariția Ag^+ în efluent. La concentrații mai mari, în condițiile de lucru adoptate (înălțimea stratului 10 mm și viteza soluției de 2 ml/min) se produc scăpări ale ionilor de argint în efluent. Ca urmare, se adoptă ca limită superioară de concentrație soluția 0,1 n.

De obicei, probele ce conțin argint sînt mai diluate ; pentru siguranță se face o diluare a lor, pînă la concentrația de —0,05 n.

Cantitatea minimă de argint ce poate fi determinată prin metoda elaborată, depinde în mare măsură de precizia de cîntărire. La o precizie de 0,1 mg, eroarea de cîntărire scade cu creșterea mărimii probei (tabelul 1). Ca urmare, cantitatea optimă de argint în probă este cuprinsă între 50 și 100 mg, ceea ce reprezintă aproximativ 0,5—1,0 mechiv-g Ag.

Precizia determinărilor poate fi simțitor crescută, mărind precizia cîntăririi.

Astfel, pentru precizia de 0,01 mg, la o cantitate de 50 mg Ag, eroarea maximă de cîntărire este de numai 0,18 %.

4) Condițiile de uscare și răcire ale zeolitului încărcat cu argint au cauzat cele mai mari dificultăți datorită variației puternice a gradului de hidratare a zeolitului, funcție de temperatura de uscare și modul de răcire, fiind necesar să se refacă starea inițială de hidratare a zeolitului.

Astfel s-a încercat mai întîi o uscare a zeolitului la 150°C dar în acest caz zeolitul pierde o cantitate prea mare de apă și se descompune parțial eliberînd argint sau oxid de argint coloidal care obturează porii zeolitului

Tabelul 1

Eroarea de cîntărire la precizia de 0,1 mg.

Greutatea argintului în probă (mg) (X)	Abaterea minimă(ΔX)	Eroarea elativă $\frac{\Delta X}{X}$ 100 (%)
1	0,9	90
10	0,9	9
20	0,9	4,0
50	0,9	1,8
100	0,9	0,9

și împiedică rehidratarea după uscare. Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 2.

Tabelul 2

Rezultatele determinărilor la uscarea la 105°C timp de 1/2 oră

Nr. crt.	Greutatea Ag luat în lucru (mg)	Greutatea Ag calculat din rez. determinărilor (mg)	Condiții de răcire
1.	53,9	11,5	în exiator prevăzut cu $CaCl_2$
2.	53,9	11,8	în exiator prevăzut cu $CaCl_2$ apoi menținut 1 oră în vapori de apă
3.	53,9	16,9	în atmosferă de vapori de apă
4.	53,9	0,5	spălat cu alcool în atmosferă de vapori de apă

Pentru a preîntîmpina acest fenomen s-a uscat zeolitul la 60°C. În acest caz pierderea umidității nu se face complet. Apa remanentă fiind în proporție mare, rezultă erori în plus. Rezultatele sînt cuprinse în tabelul 3.

Tabelul 3

Rezultatele determinărilor la uscarea la 60°C

Nr. crt.	Greutatea de argint luată în lucru	Durata uscării (ore)	Greutatea argintului calculată (mg)
1.	53,9	1	245,6
2.	53,9	2	219,1
3.	53,9	3	196,5
4.	53,9	10	116,3
5.	53,9	20	89,8

S-au făcut încercări la 105°C. La această temperatură zeolitul NaAgA nu se descompune şi totodată uscarea la greutate constantă se poate face în decurs de circa 30—45 minute, urmată de răcirea în exicator prevăzut

Tabelul 4

Rezultatele determinărilor pentru uscarea la 105°C

Nr. determinării	mg Ag luat în probă	mg Ag determinat	Condiţii iniţiale de prelucrare a zeolitului NaA	Condiţiile finale de prelucrare a zeolitului NaAgA
1.	53,9	109,3	Saturat cu vapori de apă la greutate constantă	în vapori de apă 1 oră, apoi în exicator cu $CaCl_2$ 1 oră
2.	53,9	226,2	idem	în vapori de apă timp de 2 ore
3.	53,9	0,8	idem	în exicator cu $CaCl_2$ timp de 1/2 ore
4.	53,9	52,6	Uscat la 105°, în exicator cu $CaCl_2$, pînă la greutate constantă	uscat la 105°, răcit în exicator cu $CaCl_2$ pînă la greutate constantă
5.	53,9	55,4	idem	idem
6.	53,9	54,2	idem	idem

cu $CaCl_2$ (timp de 1/2 oră). Rezultatele determinărilor sînt cuprinse în tabelul 4.

Cum se vede, rezultate satisfăcătoare se obţin numai în cazul în care condiţiile de uscare şi răcire ale zeolitului NaAgA coincid cu tratamentul preliminar al zeolitului NaA.

5) Formula de calcul a cantităţii de Ag^+ din probă a fost stabilită luînd în considerare că la înlocuirea unui ion de Na^+ cu unul de Ag^+ greutatea zeolitului creşte cu 107,88—22,99 = 84,89 g.

Formula dedusă este:

$$X_{Ag} = (B-A) \cdot \frac{107,88}{84,89} = 1,2707\,(B-A)\,10^3 \text{ mg}$$

în care:

X_{Ag} — cantitatea de Ag^+ din probă în mg;

B — greutatea finală a coloniţei cu zeolit (după trecerea soluţiei în g;

A — greutatea iniţială a coloniţei cu zeolit (înainte de trecerea soluţiei în g).

Rezultatele determinărilor în condiţiile de lucru adoptate sînt cuprinse în tabelul 5.

În tabelul 6 se dau rezultatele calculului erorilor efectuat pentru 3 din determinările cuprinse în tabelul 4 (determinările nr. 4, 5 şi 6) şi în tabelul 5 (determinările nr. 2 şi 3).

Din datele cuprinse în tabelul 6 se calculează funcţia t:

$$t = \frac{\bar{X}-A}{s_{\bar{X}}} = \frac{(5,41-5,39).10^{-2}}{3,8.10^{-4}} = 0,52$$

Tabelul 5

Rezultatele determinărilor în condițiile de lucru adoptate

Nr. determinării	Cantitatea de Ag din probă (mg)	Cantitatea de Ag calculată din rezultatele analizei			Diferența dintre Ag introdus și cel găsit (mg)
		$A(g)$	$B(g)$	X(mg)	
1.	27,0	4,5409	4,5630	28,1	−1,1
2.	53,9	5,8955	5,9391	55,5	−1,6
3.	53,9	5,8553	5,8967	52,8	+0,9
4.	107,8	5,9393	6,0455	110,0	−3,8
5.	161,7	5,9193	6,0485	164,9	−3,2
6.	161,7	5,8633	5,9894	160,2	+1,5

Tabelul 6

Calculul erorilor

	Nr. determinării				
	1	2	3	4	5
Conținutul de Ag în probă X în g.10^{-2}	5,26	5,54	5,42	5,55	5,28
Valoarea medie X (g)			$5{,}41.10^{-2}$		
$X - X_i$	+0,015	−0,013	−0,001	− 0,014	+0,013
$s^2 = \frac{\Sigma(X-X_i)^2}{n-1}$			$1{,}9.10^{-3}$		
$s_x = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$			$3{,}8.10^{-4}$		

Din tabelă (3), pentru $P = 95\,\%$ și pentru $k = n-1 = 4$, $t_{95\%} = 2{,}78$. Intervalul de siguranță (ε) în acest caz este:

$$\varepsilon = \pm t s_{\overline{X}} = \pm(2{,}78.3{,}8.10^{-4}) = \pm 1{,}05.10^{-3}$$

Rezultă că $\overline{X} - A = 2{,}0.10^{-4} < t s_{\overline{X}} = 1{,}05.10^{-3}$ deci determinările nu sînt afectate de erori sistematice, exactitatea metodei elaborate fiind satisfăcătoare.

Valoarea determinată este: $5{,}41.10^{-2} \pm 1{,}05.10^{-3}$ gAg^+.

6) Durata totală a determinării este dată de însumarea operațiilor și reprezintă aproximativ 2 ore.

Metoda se pretează la analiza în serie, ceea ce reduce durata medie a fiecărei determinări cu cît seria este mai mare.

7) Valorificarea argintului reținut de zeolit se face sau prin folosirea zeolitului de argint ca indicator de umiditate (culoarea zeolitului arătînd gradul de umiditate din atmosferă), sau argintul poate fi scos din zeolit

cu o soluţie de NaCl, apoi tratată cu amoniac formîndu-se astfel complexul respectiv solubil. Recuperarea argintului din zeolit se poate face în proporţie de cel puţin 95 %.

Concluzii

Metoda de analiză elaborată este precisă, rapidă (durata este aproximativ 2 ore) şi necesită numai operaţii simple. Ea se poate utiliza pentru analize în serie, durata determinării micşorîndu-se astfel. Ea se aplică deasemenea în cazurile în care, pentru determinarea concomitentă şi a altor cationi este necesară îndepărtarea prealabilă a argintului.

Reactivii necesari sînt puţini şi uşor accesibili. Zeolitul sintetic de tipul NaA se produce şi la noi în ţară. Cantitatea de zeolit necesară unei probe este foarte mică; cu un kg de zeolit se pot face 2 000—3 000 determinări. Argintul din probe este recuperabil în proporţie de cel puţin 95 %.

Precizia metodei depinde în principal de precizia cîntăririi. Ea permite determinarea unor cantităţi de argint de ordinul a 5.10^{-3} g (la o cîntărire cu precizia de 10^{-4} g), ceea ce corespunde la aproximativ 5.10^{-5} echiv-g Ag în probă.

Laboratorul de chimie anorganică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *F. Wolf, H. Fürlid, Kolloid* — Z. Z. Polymere, *205* (1) 48—55 (1965).
2. *F. Wolf, U. Hädicke, Tonindî* Z. u. Keramische Rundsch., *91* (2) 41—55 (1967).
3. *C. Liteanu,* Chimie analitică cantitativă Volumetria. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1969.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

AVIAȚIE

C.Z.: 533. 6: 517

ASUPRA UNEI METODE PENTRU CALCULUL AERODINAMIC AL ARIPILOR DE ANVERGURĂ FINITĂ IN REGIM INCOMPRESIBIL*

CORNEL BERBENTE

Introducere. Calculul aripilor finite, de alungire nu prea mică ($\lambda > 3$) se bazează pe teoria liniei portante a lui Prandtl. În principiu dificultățile constau în rezolvarea ecuației integro-diferențiale care dă variația circulației în lungul anvergurii. Prin dezvoltarea circulației în serie Fourier, această ecuație se reduce la un sistem infinit de ecuații lineare pentru coeficienții dezvoltării.

Una din primele metode, datorite lui Glauert [1], constă în reținerea unui număr oarecare de ecuații din sistem și determinarea numerică a coeficienților din condiția ca acestea să fie verificate într-un număr de puncte de pe aripă, egal cu al coeficienților necunoscuți. Metoda lui Glauert devine laborioasă cînd numărul de ecuații crește iar, pe de altă parte, nu se obțin expresii explicite. O altă metodă devenită clasică, în care se deduc formule explicite pentru distribuția circulației ca și pentru caracteristicile aerodinamice, se datorește lui Carafoli [1]. Metoda se bazează pe reprezentarea printr-un polinom trigonometric a corzii ceea ce permite exprimarea coeficienților circulației în funcție de coeficienții de formă ai aripii, gradul de precizie fiind foarte ridicat. Valorile obținute pentru coeficienții circulației sînt foarte apropiate de valorile furnizate de metodele Glauert, Betz sau Fuchs [1].

În cele ce urmează ne propunem să găsim o metodă care să îmbine caracterul explicit cu posibilitățile de calcul existente la ora actuală, fiind aplicabilă fără modificări și în cazurile cînd forma aripii și/sau variația incidenței sînt foarte complicate.

În această metodă nu este necesară reprezentarea aripii sau incidenței prin polinoame trigonometrice, integralele care apar putînd fi calculate exact pentru cazurile curente. Se procedează prin interații succesive; în prima aproximație se obțin expresii explicite iar pentru aproximațiile următoare este dat un program de calcul simplu.

* Manuscris predat redacției la data de 15 mai 1972

Metoda de calcul.

Vom urma calea obişnuită şi vom pune circulaţia sub forma

$$\Gamma = 2bU_\infty \sum_1^\infty A_n \sin n\theta\,; \quad y = -\frac{b}{2}\cos\theta \tag{1}$$

unde U_∞ reprezintă viteza curentului neperturbat, paralel la infinit b anvergura aripii iar y variabila în lungul acesteia (fig. 1).

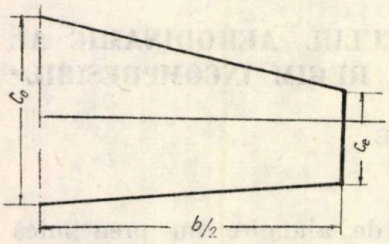


Fig. 1

Coeficinţii circulaţiei A_n se determină utilizînd ecuaţia:

$$\sum_1^\infty A_n \sin n\theta = \mu\left(\alpha - \sum_1^\infty \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta}\right), \tag{2}$$

unde α reprezintă incidenţa curentului. Am notat cu

$$\mu = \frac{kc}{2b}, \tag{3}$$

c fiind coarda iar k o constantă ($k \approx 0{,}9\ \pi$). Înmulţind ecuaţia (2) membru cu membru cu $\sin n\theta$, integrăm apoi de la $\theta = 0$ la $\theta = \pi$ şi obţinem:

$$\frac{\pi}{2} A_n = I_n - \sum_{p=1}^\infty p H_{np} A_p, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

sau, separînd termenul A_n

$$\left(\frac{\pi}{2} + nH_{nn}\right) A_n = I_n - \sum_{p=1}^\infty p(1-\delta_{np}) H_{np} A_p, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Am notat cu

$$I_n = \int_0^\pi \mu\alpha \sin n\theta\, d\theta\,; \quad H_{np} = H_{pn} = \int_0^\pi \frac{\mu \sin n\theta \sin p\theta}{\sin\theta}\, d\theta, \tag{6}$$

iar δ_{np} este simbolul lui Kronecker:

$$\delta_{np} = \begin{cases} 0 \text{ pt. } & n \neq p \\ 1 \text{ pt. } & n = p \end{cases} \tag{7}$$

Se observă că integralele I_n şi H_{np} se pot calcula direct oricît ar fi de complicate distribuţiile de coardă şi incidenţe, fără a fi necesare dez-

voltările Fourier ale acestora. Mai mult, așa cum vom vedea ulterior, cuadraturile se pot efectua exact pentru cazurile mai importante întîlnite în practică.

În cele ce urmează vom ține seamă că, în realitate, aripa este simetrică și deci avem :

$$\mu(\theta) = \mu(\pi-\theta); \quad H_{np} = 0 \text{ pt. } n+p = \text{impar} \tag{8}$$

Aceasta permite separarea calculului coeficienților A_n după paritatea indicelui. Notînd cu

$$L_n = \frac{\pi}{2} + n\, H_{nn} \tag{9}$$

sistemul (5) se descompune în următoarele două :

$$L_{2m-1}A_{2m-1} = I_{2m-1} - \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1)(1-\delta_{mp})H_{2m-1,2p-1}A_{2p-1}, \tag{10a}$$

$$L_{2m}A_{2m} = I_{2m} - \sum_{p-1}^{\infty} 2p(1-\delta_{mp})H_{2m,2p}A_{2p}, \ (m = 1,2,3\ldots) \tag{10b}$$

Pentru găsirea coeficienților A_{2m-1} (sau A_{2m}) vom folosi următorul șir de aproximații succesive :

a) în prima aproximație vom neglija termenul A_{2m+3} și următorii în raport cu A_{2m-1}

b) în aproximația de ordinul $S \geqslant 2$ vom calcula termenul A_{2m-1} luînd în considerație toți termenii calculați în aproximația anterioară pînă la $A_{2m+4s-3}$ inclusiv.

În acest scop vom scrie pe baza ecuației (10—a), în prima aproximație :

$$L_{2m-1}A_{2m-1} + (2m+1)H_{2m+1,2m-1}A_{2m+1} = I_{2m+1} -$$

$$- \sum_{p=1}^{m-1} (2p-1)H_{2m-1,2p-1}A_{2p-1}, \tag{11a}$$

$$(2m-1)H_{2m+1,2m-1}A_{2m-1} + L_{2m+1}A_{2m+1} = I_{2m+1} -$$

$$- \sum_{p-1}^{m-1} (2p-1)H_{2m+1,2p-1}A_{2p-1}, \tag{11b}$$

de unde rezultă

$$A^{(1)}_{2m-1} = \frac{M_{2m-1} - \sum_{p=1}^{m-1} N_{2m-1,2p-1}A^{(1)}_{2p-1}}{P_{2m-1}}, \tag{12}$$

indicele superior (1) indicînd prima aproximație. Am notat cu :

$$P_{2m-1} = L_{2m-1}L_{2m+1} - (4m^2-1)H^2_{2m+1,2m-1}, \tag{13a}$$

$$N_{2m-1,2p-1} = (2p-1)[L_{2m+1}H_{2m-1,2p-1} - (2m+1)H_{2m+1,2m-1}H_{2m+1,2p-1}], \tag{13b}$$

$$M_{2m-1} = I_{2m-1}L_{2m+1} - (2m+1)H_{2m+1,2p-1}\, I_{2m+1}. \tag{13c}$$

În aproximația de ordinul s ($S \geqslant 2$) vom calcula din (10-a)

$$A^{(s)}_{2m-1} = \frac{I_{2m-1} - \sum_{p=1}^{m+2s-1}(2p-1)(1-\delta_{mp})H_{2m-1,2p-1}A^{(s-1)}_{2p-1}}{L_{2m-1}} \tag{14}$$

Pentru coeficienții A_{2m} se obțin formule similare înlocuind în (12), (13) și (14) $(2m-1)$ cu $(2m)$ și $(2p-1)$ cu $(2p)$

Deoarece coeficienții A_n scad repede procedeul este rapid convergent și chiar prima aproximație dă o foarte bună acuratețe, așa cum vom vedea din aplicații. Pentru cazuri foarte complicate se poate trece la a doua aproximație ori de cîte ori este necesar.

3. Exemple de calcul

a) Aripa trapezoidală cu incidență constantă (fig. 1)
În acest caz coarda variază după legea

$$c = c_0 - \frac{2}{b}(c_0 - c_e)|y| \tag{15}$$

unde c_0, c_e reprezintă coarda la încastrare și la extremitatea aripii, respectiv. Din (15) se deduce variația lui :

$$\mu = \mu_0[1-q|\cos\theta|]; \quad q = 1 - \frac{c_e}{c_0}; \quad \mu = \frac{kc}{2b}, \tag{16}$$

q fiind raportul de trapezoidalitate. Incidența se consideră constantă și egală cu α_0.

Este de remarcat că în cazul în care variațiile corzii și incidenței sînt date de polinoame în $\cos\theta$ sau $\sin\theta$ integralele pot fi efectuate exact. Pentru situația considerată avem :

$$I_{2m} = 0, \quad A_{2m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

fiind necesar să calculăm doar coeficienții de indice impar. În acest scop vom calcula întîi integralele :

$$\frac{I_{2m-1}}{\mu_0\alpha_0} = \frac{H_{2m-1,1}}{\mu_0} = \frac{2}{2m-1} - q\frac{2m-1+\cos m\pi}{2m(m-1)}. \tag{18}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

Celelalte integrale se calculează imediat din (18) cu ajutorul relației de recurență:

$$\frac{H_{2m-1,2p-1}}{\mu_0} = \frac{H_{2p-1,2m-1}}{\mu_0} = \frac{H_{2m-1,2p-3}}{\mu_0} + \frac{4(2m-1)}{(2m-1)^2-4(p-1)^2} - \\ - q\left[\frac{(m-1)(1-\cos m\pi\cos p\pi)}{(m-1)^2-(p-1)^2} + \frac{m(1+\cos m\pi\cos p\pi)}{m^2-(p-1)^2}\right], \tag{19}$$

$$(m = 1, 2, \ldots; p = 2, 3, \ldots)$$

Pentru $m = p$ în (19) se ține cont că

$$\lim_{p\to m} \frac{1-\cos m\pi\cos p\pi}{(m-1)^2-(p-1)^2} = 0.$$

Pentru coeficienții $A_1^{(1)}$ și $A_3^{(1)}$ se obțin expresii destul de simple, în funcție de raportul de trapezoidalitate:

$$\frac{A_1^{(1)}}{\mu_0\alpha_0} = \frac{30\pi(2-q)+16\mu_0(64-72q+15q^2)}{15\pi^2+48\pi\mu_0(7-5q)+16\mu_0^2(64-72q+15q^2)}, \tag{20a}$$

$$\frac{A_3^{(1)}}{\mu_0\alpha_0} = \frac{\left(1-\frac{A_1^{(1)}}{\alpha_0}\right)\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}-q\right)+\frac{2\mu_0}{9}\left(\frac{4352}{105}-\frac{688}{7}q+52q^2\right)\right]}{\frac{\pi^2}{4}+\mu_0\pi\left(\frac{4267}{315}-\frac{32}{3}q\right)+4\mu_0^2\left(\frac{15104}{441}-\frac{14912}{315}q+\frac{44}{3}q^2\right)}, \tag{20b}$$

Următorii 2 coeficienți rezultă aplicînd formula (12) și făcînd unele înlocuiri pe baza relației (18):

$$\frac{A_5^{(1)}}{\mu_0\alpha_0} = \frac{\left(1-\frac{A_1^{(1)}}{\alpha_0}\right)M_5 - N_{53}A_3^{(1)}}{\mu_0\alpha_0 P_5}, \tag{20c}$$

$$\frac{A_7^{(1)}}{\mu_0\alpha_0} = \frac{\left(1-\frac{A_1^{(1)}}{\alpha_0}\right)M_7 - N_{73}A_3^{(1)} - N_{75}A_5^{(1)}}{\mu\alpha_0 P_7}, \tag{20d}$$

coeficienții M_{3m-1}, $N_{2m-1,2p-1}$, P_{2m-1} $(m = 3, 4; p = 2, 3)$ fiind dați de expresiile (13). În general, pentru aplicații sînt suficienți primii 4 coeficienți ai circulației.

În tabelul I sînt date valorile coeficienților în prima și a doua aproximație pentru aripi de două alungiri. Se observă că a doua aproximație

Tabelul 1

Coeficienții $A_{2m-1}/\mu_0\alpha_0$ pentru aripa trapezoidală

Coeficienții	$q=0$				$q=0{,}5000$	
	$\mu_0=0{,}5000$		$\mu_0=0{,}1667$		$\mu_0=0{,}3333$	
	Aproximația				Aproximația	
	1	2	1	2	1	2
A_1/μ_0	0,752	0,750	1,018	1,012	0,722	0,717
A_3/μ_0	$6{,}08\times10^{-2}$	$6{,}00\times10^{-2}$	$1{,}58\times10^{-3}$	$1{,}57\times10^{-3}$	$2{,}86\times10^{-2}$	$2{,}65\times10^{-2}$
A_5/μ_0	$1{,}01\times10^{-2}$	$0{,}982\times10^{-2}$	$4{,}19\times10^{-2}$	$4{,}02\times10^{-2}$	$2{,}97\times10^{-2}$	$2{,}83\times10^{-2}$
A_7/μ_0	$2{,}52\times10^{-3}$	$2{,}42\times10^{-3}$	$1{,}35\times10^{-2}$	$1{,}32\times10^{-2}$	$4{,}10\times10^{-1}$	$3{,}57\times20^{-1}$

introduce corecții foarte mici ceea ce dovedește convergența rapidă a metodei.

Remarcă. Pentru formele curente de aripi formulele explicite [1] dau coeficienții A_n cu un grad înalt de acuratețe, așa cum se vede din tabelul I.

Pentru comparație au fost utilizate ecuațiile (18.5) de la pag. 222 din „Aerodinamica" (1), în care au fost neglijați unii termeni de ordin secundar. Practic, valorile coeficienților furnizați de cele două metode coincid.

b. *Aripa trapezoidală cu incidență antisimetrică.*

Să presupunem o variație liniară de incidență între limitele α_0 și $(-\alpha_0)$, sub forma :

$$\alpha = -\alpha_0 \frac{2}{b} y = \alpha_0 \cos\theta, \tag{21}$$

distribuția de coardă fiind dată de (16)

Vom avea în acest caz

$$I_{2m-1} = 0, \quad A_{2m-1} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

și vom avea de calculat coeficienții de rang par. În acest scop vom calcula integralele :

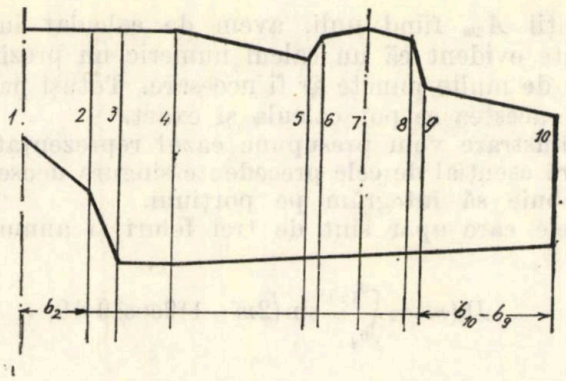


Fig. 2

$$\frac{I_{2m}}{\mu_0\alpha_0}=\frac{H_{2m,2}}{2\mu_0}=\frac{4m}{4m^2-1}-q\left[\frac{1-\cos m\pi}{2m}+\frac{m(1+\cos m\pi)}{2(m^2-1)}\right], \tag{23}$$

$$\frac{H_{2m,2p}}{\mu_0}=\frac{H_{2p,2m}}{\mu_0}=\frac{8m}{4m^2-(2p-1)^2}$$

$$-mq\left[\frac{1-\cos m\pi\cos p\pi}{m^2-p^2}+\frac{1+\cos m\pi\cos p\pi}{m^2-(p-1)^2}\right], \tag{24}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,;\ p=2,\ 3,\ \ldots)$$

Plecînd de la relaţia (22) şi utilizînd formula de rezistenţă (24) se pot calcula cu uşurinţă integralele pînă la indicele dorit.

c) *Aripa dublu trapezoidală.*

Vom considera în exemplul care urmează un caz mai complicat de aripă dublu trapezoidală avînd 2 nacele precum şi o decupare în dreptul fuzelajului (fig. 2). Incidenţa aripii poatesă varieze atît în dreptul nacelelor cît şi în dreptul fuzelajului.

În cele ce urmează vom considera incidenţa variind ca în fig. 3.

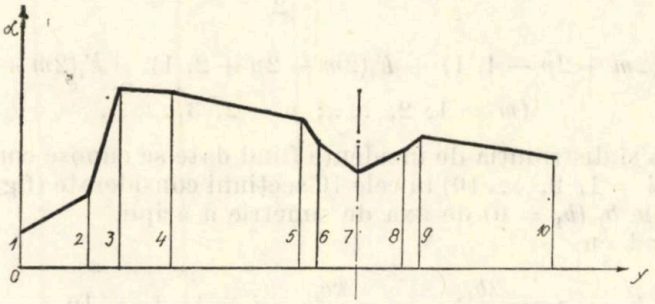


Fig. 3

Coeficienții A_{2m} fiind nuli, avem de calculat integralele I_{2m-1}, $H_{2m-1,2p-1}$. Este evident că un calcul numeric nu prezintă nici o dificultate, oricît de multe puncte ar fi necesare. Totuși pentru cazurile de interes practic acestea se pot calcula și exact.

Pentru ilustrare vom presupune cazul reprezentat în fig. 2. Calculele nu diferă esențial de cele precedente singura deosebire constînd în faptul că trebuie să integrăm pe porțiuni.

Integralele care apar sînt de trei feluri și anume:

$$D_i(m)=\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sin(2m-1)\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{25a}$$

$$F_i(2m-1p)=\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sin(2m-1)\theta\sin(2p-1)\theta\operatorname{cosec}\theta\mathrm{d}\theta, \tag{25b}$$

$$G_i(m,p)=\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sin(2m-1)\theta\sin(2p-1)\theta\operatorname{ctg}\theta\mathrm{d}\theta, \tag{25c}$$

$$(m,\ p=1,\ 2,\ \ldots),$$

toate putînd fi calculate exact. Astfel avem:

$$F_i(n,1)=\frac{\cos n\theta_i-\cos n\theta_{i+1}}{n},\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{26a}$$

$$D_i(m)=\frac{1}{2}F_i(2m-1,\ 1)+\frac{1}{4}[F_i(2m+1,1)+F_i(2m-3,1)], \tag{26b}$$

$$F_i(2m-1,\ p)=F_i(2m-1,\ p-1)+F_i(2m+2p-3,\ 1)+F_i(2m-2p+1,\ 1) \tag{26c}$$

$$G_i(m,1)=\frac{1}{2}[F_i(m,\ 1)+F_i(2m-2,1)] \tag{26d}$$

$$G_i(m,p)=G_i(m,p-1)+\frac{1}{2}[F_i(2m+2p-2,1)+ \tag{26e}$$

$$+F_i(2m+2p-4,1)+F_i(2m-2p+2,1)+F_i(2m-2p,1)]$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots;\ p=2,\ 3,\ \ldots).$$

Aripa și distribuția de incidențe fiind date se cunosc corzile c_i și incidențele $\alpha_i(i=1,\ 2,\ \ldots 10)$ în cele 10 secțiuni considerate (fig. 2,3) situate la distanțele b_i ($b_1=0$) de axa de simetrie a aripii.

Notînd cu

$$a_i=\frac{2b_i}{b};\quad \mu_i=\frac{kc_i}{2b},\quad i=1,\ 2,\ \ldots 10, \tag{27}$$

rezultă unghiurile θ_i și coeficienții unghiulari m_j și q_j ai variației de coardă și incidență :

$$\theta_i = \pi - \arccos a_i, \quad i = 1, 2, \ldots 10, \tag{28a}$$

$$m_j = \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{a_{j+1} - a_j}, \tag{28b}$$

$$q_j = \frac{k}{4} \frac{c_{j+1} - c_j}{b_{j+1} - b_j}, \quad j = 1,2,\ldots 9. \tag{28c}$$

Pe porțiunea de aripă cuprinsă între secțiunile j, $j+1$ vom avea următoarele legi de variație ale corzii și incidenței, respectiv

$$\mu = \mu_j - a_j q_j + q_j |\cos\theta|, \tag{29}$$

$$\alpha = \alpha_j - a_j m_j + m_j |\cos\theta|, \quad j = 1, 2, \ldots 9. \tag{30}$$

Cu acestea integralele capătă expresiile :

$$I_{2m-1} = 2 \sum_{j=1}^{9} \{(\mu_j - a_j q_j)(\alpha_j - a_j m_j) F_j(2m-1,1) + m_j q_j D_i(m) - \\ - [q_j(\alpha_j - a_j m_j) + m_j(\mu_j - a_j q_j)] G_j(m,1)\}, \tag{31}$$

$$H_{2m-1,1} = 2 \sum_{j-1}^{9} [(\mu_j - a_j q_j) F_j(2m-1,1) - q_j G_j(m,1)], \tag{32a}$$

$$H_{2m-1,2p-1} = 2 \sum_{j=1}^{9} [(\mu_j - a_j q_j) F_j(2m-1,p) - q_j G_j(m,p)],$$

$$m = 1,2,\ldots; \quad p = 2,3,\ldots \tag{32-b}$$

Avem în acest moment toate elementele necesare pentru a trece la calculul coeficienților circulației. Deoarece există un număr foarte mare de parametrii variabili nu vom da tabele ci un program de calcul în limbaj FORTRAN IV (vezi mai jos).

d) *Aripi de tip eliptic.* Am considerat pînă acum aripi în care variațiile corzii și incidenței sînt lineare în y, deci în $\cos\theta$. Considerațiile făcute sugerează că integralele pot fi calculate exact și pentru variații date de un polinom de un grad oarecare în $\cos\theta$. În cele ce urmează vom considera o variație de coardă dată de un polinom de gradul 2 în $\sin\theta$, de forma

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \sin\theta + \mu_2 \sin^2\theta \tag{33}$$

incidența fiind constantă. Deoarece aripa eliptică se obține ca un caz particular am denumit aripile cu variația corzii dată de un polinom în $\sin\theta$, aripi de tip eliptic.

Integralele se efectuează imediat:

$$\frac{I_{2m-1}}{\alpha_0} = H_{2m-1,1} = \frac{2\mu_0}{2m-1} + \frac{\pi}{2}\mu_1\delta_{m1} - \frac{4\mu_2}{(2m-3)(4m^2-1)}, \tag{34a}$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

$$H_{2m-1,2p-1} = H_{2p-1,2m-1} = H_{2m-1,2p-3} + \frac{4\mu_0(2m-1)}{(2m-1)^2 - 4(p-1)^2} + \tag{34b}$$

$$+ \frac{\pi}{2}\mu_1(\delta_{mp} - \delta_{m,p-1}) + \mu_2\left[\frac{2m-1}{4p^2-(2m-1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(2m-1)}{4(p-1)^2-(2m-1)^2} + \frac{2m-1}{4(p-2)^2-(2m-1)^2}\right],$$

$$(m = 1,2,\ldots;\ p = 2,3,\ldots),$$

δ_{mp} fiind simbolul lui Kronecker. Pentru $\mu_0 = \mu_2 = 0$ se regăsește aripa eliptică cu incidență constantă:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\mu_1;\quad I_{2m-1} = 0,\quad m = 2,3,\ldots \tag{35a}$$

$$H_{2m-1,2p-1} = \frac{\pi}{2}\mu_1\delta_{mp},\quad m,\ p = 1, 2, 3,\ldots \tag{35b}$$

$$A_1 = \frac{\mu_1}{1+\mu_1};\quad A_{3m-1} = 0,\quad m = 2, 3,\ldots \tag{35c}$$

e) *Aripa de formă oarecare.* În general orice variație a corzii sau incidenței poate fi aproximată printr-o linie poligonală, alegînd un număr convenabil de puncte. Prin urmare un program de calcul pentru o variație poligonală este larg utilizabil. Pe lîngă aceasta este preferabil să calculăm integralele exact, sub formele (26) și nu prin puncte deoarece variațiile funcțiilor care conțin $\sin m\theta \sin p\theta$ devin foarte rapide cînd p și m cresc și ar necesita un număr mult mai mare de secțiuni de calcul decît cel impus de variația corzii.

Considerațiile de la aripa dublu trapezoidală rămîn valabile cu deosebirea că numărul de secțiuni este oarecare. Faptul că pantele de variație ale corzii și incidenței se pot schimba în puncte diferite nu introduce dificultăți suplimentare, ducînd numai la mărirea în mod corespunzător a număruluï de secțiuni de calcul.

Elementele principale ale programului de calcul sînt date în ANEXA.

ANEXA

Dăm mai jos un program de calcul în limbaj FORTRAN presupunînd o variaţie poligonală a corzii şi incidenţei. Acest program furnizează coeficienţii circulaţiei mergînd pînă la a treia aproximaţie inclusiv. De asemenea este calculată cantitatea:

$$\delta = \sum_{i=2}^{m} \frac{(2i-1)A_{2i-1}^2}{A_1^2} \tag{A1}$$

care intră în expresia coeficientului de rezistenţă.

Avem respectiv M, M−3 şi M−8 coeficienţi de calculat în prima, a doua şi a treia aproximaţie. S-a notat cu N numărul secţiunilor de calcul.

```
      READ (L, 10) (B(I),C(I), ALFA (I), I=1,N), CK, CB
      T(N) = 3.1459
10    FORMAT (2X, .... ..)
      AMIC(1) = 0
      DO 12 I = 1, (N−1)
      AMIC(I + 1) = 2*B(I+1)/CB
      MIU (I) = (CK*C(I))/(2*CB)
      CM(I)=(ALFA(I+1)−ALFA(I))/(AMIC(I+1)−AMIC(I))
      Q(I) = (CK*(C(I+1)−C(I)))/4./(B(I+1)−B(I))
      QAM(I) = MIU(I)−AMIC(I)*Q(I)
      AAM(I) = ALFA(I)−AIMC(I)*CM(I)
      T(I)=T(N)−ARCOS(AMIC(I))
12    CONTINUE
```

În acest stadiu am calculat datele iniţiale. Pentru funcţia $F_i(n, 1)$ dată de relaţia (26-a) vom prevede un subprogram:

```
      FUNCTION F1(J, I, U)
      DIMENSION U(N);
      IF J.EQ.0 GO TO 2
      X = J
      F1(J, I, U) = (COS(X*U(I))−COS(X*U(I+1)))/X
      GO TO 3
2     F1(J, I, U) = 0.
3     CONTINUE
      RETURN
      END
```

Această funcţie subprogram va fi utilizată mai jos. Vom transcrie mai multe comenzi succesive pe un singur rînd pentru economie de spaţiu. Vom calcula mai întîi expresiile mai simple date de relaţiile (26-b), 26-d) şi (31).

```
      DO 14 J = 1, M
      X = 0; Y = 0
      J1=2*J-1; J2=2*J+1; J3=2*J-3;  J4=2*J;  J5=J4-2
      DO 16 I = 1, (N-1)
      D = F1(J1, I, T)/2.(J2,I,T)/4+F1(J3,I,T)/4.
      G1=F1(J4,I,T)/2.+F1(J5,I,T)/2.
      SI = QAM(I) * AAM(I)*F1(J1,I,T)-Q(I)*AAM(I)+
      /CM(I)*QAM(I))*G1+CM(I)*Q(I)*D
      SH = QAM(I)*F1(J1, I, T) - Q(I)*G1
      X = X + SI
      Y = Y + SH
16    CONTINUE
      INT(J) = 2.*X
      H(J, 1) = 2.*Y
      H(1, J) = H(J, 1)
      L(1) = 1,5708 + H(1, 1)
14    CONTINUE
```

În acest moment au fost calculate integralele I_{2J-1} notate cu INT(J) şi integralele $H_{2J-1,1}$ notate cu $H(J, 1)$. Continuăm cu calculul integralelor $H_{2J-1,2K-1}$ notate cu $H(J, K)$.

```
      DO 18 J =2,M
      DO 20 K =2,J
      Y =0.0, J1=2*J-1; J2=2*(J+K)-3; J3=2*(J-K)+1,
      J4=J2+1; J5=J2-1), J6 = J3+1; J7=J3-1; L=J1+1
      DO 22 I =1, (N-1)
      F(1)=F1(J1,I,T); G(1)=(F1(L,I,T)+F1(J1-1),I,T))/2.
      F(K) = F(K-1) + F1(J2, IT) + F1(J3, I, T)
      G(K) = G(K-1) + (F1(J4, I, T) + F1(J5, I, T) + F1(J6,I,T)+
+F1(J7, I, T))/2.
      SH = QAM(I)*F(K) - Q(I)*G(K)
      Y =Y + SH
22    CONTINUE
      H(J, K) =Y*2.
      H(K, J) =H(J, K)
20    CONTINUE
      L(J) =1.5708 + J1*H(J, J)
18    CONTINUE
```

În acest moment se poate trece la calculul coeficienţilor circulaţiei în primă aproximaţie, notaţi $A1(J)$. În acest scop se calculează mai întîi $A1(1)$.

```
      A1(1)=(INT(L)*L(2)-3*H(2,1)*INT(2))/(L(1)*L(2)-3*H(2,1)
**2 DELTA1 =0.
```

```
      DO 24 J = 2; M
      Y = 0; K = J + 1; R1 = 4 * J * J - 1; R = 2 * J + 1
      P = L(J)*L(K)-R1*(H(L, J))**2
      KM = (INT(J)*L(K)-R * H(K, J)*INT(K)
      DO 26 I = 1, (J-1); R2 = 2*I-1
      SN = R2*(L(K).H(J, I)-R*H(K, I)*Al(I))
      Y = Y + SN
26    CONTINUE
      A1(J) = (KM-Y)/P
      DELTA 1=(R-2)*(Al(J)/A1(1))**2+DELTA1
24    CONTINUE
      DELTA 2 = -1.
```

În final trecem la calculul coeficienţilor şi a lui δ în a doua şi a treia aproximaţie.

```
      DO 28 J = 1, (M-3)
      Y = 0.0, X = 2*J-1
      DO 30 I = 1, (J + 3)
      IF (I-J) 31, 30, 31
31    R = 2 * I-1
      SN2 = R*H(J, I)*Al(I)
      Y = Y + SN2
30    CONTINUE
      A2(J) = (INT(J)-Y)/L(J)
      DELTA 2 = X*(A2(J)/A2(1))**2+DELTA2
28    CONTINUE
      DELTA 3 = -1
      DO 32 J = 1, (M-8)
      Y = 0.; X = 2*J-1
      DO 34 I = 1, (J+5)
      IF (I-J) 33, 34, 33
      R = 2 * I - 1
33    SN3 = R*H(J, I)*A2(I)
      Y = Y + SN3
34    CONTINUE
      A3(J) = (INT(J)-Y)/L(J)
      DELTA2 = X*(A3(J)/A3(1))**2 + DELTA3
32    CONTINUE
      STOP
      END
```

Catedra de aviaţie
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. E. *Carafoli* Aerodinamica Ed. Tehnică 1951

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C. Z.: 621.436.12

SOLUŢII CONSTRUCTIVE, OPTIME DIN PUNCT DE VEDERE DINAMIC, PENTRU MOTORUL IN V, IN PATRU TIMPI, CU CILINDRI INTERCALAŢI

ANCA RODICA BĂRĂNESCU, A. MANOLE, C. SILVESTRU

1. Motorul în V cu cilindri intercalaţi reprezintă o soluţie de dispunere a cilindrilor caracterizată prin avantaje însemnate din punctul de vedere al gabaritului motorului precum şi din punct de vedere dinamic. Acest motor este mai scurt decît un motor în linie, dar mai lung decît un motor în V normal; în schimb, posibilităţile de echilibrare a forţelor de inerţie şi a momentelor acestor forţe sînt mai mari.

În lucrare se stabilesc soluţiile de arbori cotiţi, unghiul dintre liniile de cilindri şi succesiunea aprinderilor între liniile de cilindri care asigură cel mai bun echilibraj al motorului în V cu 2, 4 şi 6 cilindri intercalaţi. Se presupune că aprinderile sînt uniform repartizate pentru întregul motor. Sînt folosite următoarele rezultate din lucrările [1], [2]:

— Cu privire la echilibrajul forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie

Dacă forţa de inerţie de ordinul p are o rezultantă în fiecare linie de cilindri ea produce, în general, trepidaţii în planele bisectoare ale unghiului dintre liniile de cilindri. Mărimea acestor trepidaţii în planul bisector interior şi în planul bisector exterior este

$$X_{\mathfrak{F}_p} = A_{\mathfrak{F}_p} \cos(p\alpha + \sigma_p), \tag{1}$$

$$Y_{\mathfrak{F}_p} = B_{\mathfrak{F}_p} \sin(p\alpha + \sigma_p), \tag{2}$$

unde

$$A_{\mathfrak{F}_p} = iT_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{1}{2} p\,(k-1)\frac{4\pi}{i}, \tag{3}$$

$$B_{\mathfrak{F}_p} = iT_p \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{1}{2} p(k-1)\frac{4\pi}{i}, \tag{4}$$

$$\sigma_p = \varphi_p - \frac{1}{2} p(k-1)\frac{4\pi}{i}. \tag{5}$$

În aceste formule notaţiile au următoarea semnificaţie:

α, unghiul descris de manivela cilindrului aflat în linia din stînga la extremitatea motorului de la care un observator vede arborele cotit rotindu-se în sensul pozitiv ales;

i, numărul total de cilindri;

T_p, mărimea vectorului care interpretează termenul de ordinul p al forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie pentru un cilindru;

k, numărul de ordine al aprinderii în cilindrul aflat în linia din dreapta la extremitatea motorului dinspre observatorul definit mai sus.

În fiecare linie de cilindri trebuie folosiţi arbori cotiţi care asigură cel mai bun echilibraj al forţelor de inerţie şi al momentelor acestor forţe. Dacă manivelele unei linii sînt uniform distribuite în jurul axei lor de rotaţie, în fiecare linie au o rezultantă numai termenii

$$p = \lambda \frac{i}{2}, \quad i = 2(\rho+1); \quad \rho=1,2,3,\ldots; \quad \lambda=1,2,3,\ldots \tag{6}$$

Dacă manivelele liniei sînt două cîte două în fază, grupele de manivele în fază fiind uniform distribuite în jurul axei lor de rotaţie, în fiecare linie au o rezultantă numai termenii

$$p = \lambda \frac{i}{4}, \quad i = 4\rho; \quad \rho = 1,2,3,\ldots; \quad \lambda = 1,2,3,\ldots. \tag{7}$$

În aceste condiţii, dacă aprinderile sînt uniform repartizate, poziţiile relative distincte ale celor doi arbori cotiţi corespund următoarelor valori ale numărului k.

— dacă se folosesc arbori cotiţi pentru care este valabilă relaţia (7), k poate avea numai valori pare $2, 4, 6, \ldots \frac{i}{2}$;

— dacă se folosesc arbori cotiţi pentru care este valabilă relaţia (6), k poate avea valori pare sau impare din domeniul $2, 3, 4, \ldots \frac{i}{2}+1,$.

Cilindrii sînt numerotaţi consecutiv în fiecare linie, începînd de la extremitatea la care se găseşte observatorul, iar aprinderile sînt numerotate consecutiv, pentru întregul motor, începînd cu aprinderea din cilindrul 1 al liniei din stînga.

Rezultanta termenilor de ordinul p (cînd aceşti termeni au o rezultantă în fiecare linie de cilindri) poate fi echilibrată dacă motorul are cilindri opuşi, adică

$$\gamma = \pi \tag{8}$$

şi dacă termenii au ordinele

$$p = \frac{\lambda i}{2(k-1)}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Dintre termenii care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri, produc trepidații numai în planul bisector interior cei al căror ordin satisface condiția (9); produc trepidații în planul bisector exterior termenii al căror ordin satisface condiția

$$p = \frac{(2\lambda-1)i}{4(k-1)}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

Din formulele precedente se poate preciza echilibrajul motorului în V normal cu biele articulate direct pe manetoanele arborelui cotit dacă se fac înlocuirile

$$k = \frac{i}{4}\frac{\gamma}{\pi} + 1 \tag{11}$$

$$\gamma = \eta\frac{4\pi}{i}, \quad \eta = 1, 2, 3, \ldots, \leqslant \frac{i}{4} \tag{12}$$

La motorul în patru timpi formula (12) este valabilă pentru $i > 2$.

— *Cu privire la echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție*

Datorită decalării longitudinale a liniilor de cilindri, termenii care au o rezultantă în planul bisector interior al unghiului dintre cele două linii produc în planul bisector exterior momentul variabil

$$\mathfrak{M}_{p_y} = \Delta\frac{i}{2} T_p \sin\frac{\gamma}{2}\cos(p\alpha + \varphi_p), \tag{13}$$

iar termenii care au o rezultantă în planul bisector exterior produc în planul bisector interior momentul variabil

$$\mathfrak{M}_{p_x} = \Delta\frac{i}{2} T_p \cos\frac{\gamma}{2}\cos(p\alpha + \varphi_p); \tag{14}$$

în aceste relații Δ reprezintă decalajul dintre liniile de cilindri.

Componentele în planul bisector exterior și în planul bisector interior ale momentului extern rezultant produs de momentele externe de același ordin care există în fiecare din cele două linii de cilindri sînt respectiv

$$X_{\mathfrak{M}_p^*} = A_{\mathfrak{M}_p^*}\sin(p\alpha + \varepsilon_p), \tag{15}$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p^*} = B_{\mathfrak{M}_p^*}\cos(p\alpha + \varepsilon_p), \tag{16}$$

unde

$$A_{\mathfrak{M}_p^*} = -2M_p \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{4\pi}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right], \tag{17}$$

$$B_{\mathfrak{M}_p^*} = 2M_p \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{4\pi}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right], \tag{18}$$

$$\varepsilon_p = \mu_p - \frac{1}{2}p\left[(k-1)\frac{4\pi}{i} - \frac{a\xi_p}{p}\right], \tag{19}$$

relații în care s-a notat:

M_p, momentul vectorilor T_p din oricare din cele două linii de cilindri;

μ_p, unghiul care precizează poziția vectorului M_p în momentul $\alpha = 0$;

a, un coeficient care are valoarea 0 dacă arborii cotiți ai celor două linii de cilindri sînt identici, și valoarea 1 dacă arborii cotiți ai celor două linii de cilindri sînt simetrici în oglindă;

ξ_p, unghiul dintre vectorii M_p din cele două linii de cilindri, măsurat în sensul de rotație al manivelelor, de la vectorul M_p al liniei din stînga; acest unghi se calculează din relația

$$\xi_p = \pi - 2\beta_{p_s}, \tag{20}$$

în care β_{p_s} este unghiul pe care îl face în linia din stînga vectorul M_p cu vectorul T_{p_1} care interpretează termenul de ordinul întîi pentru cilindrul numărul 1, unghi măsurat de la vectorul T_{p_1} în sensul de rotație al manivelelor și calculat într-o poziție oarecare a arborelui cotit.

Momentele externe rezultante pot fi echilibrate dacă motorul este cu cilindri opuși ($\gamma = \pi$) și dacă au ordinele

$$p = \frac{\left(2\rho + \frac{a\xi_p}{p}\right)i}{4(k-1)}, \qquad \rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{21}$$

Momentul extern rezultant al termenilor de ordinul întîi poate fi echilibrat cu mase atașate arborelui cotit dacă unghiul dintre liniile de cilindri are valoarea

$$\gamma = \mp\pi\left[2\rho - 1 - \frac{4(k-1)}{i} + \frac{a\xi_1}{\pi}\right]. \tag{22}$$

În această formulă se pot considera valorile factorului ρ și semnul din fața parantezei pentru care se obține $0 < \gamma < \pi$. Dintre valorile posibile ale numă-

rului întreg k pot fi considerate în (22) numai cele care satisfac condiția

$$a\frac{\xi_1}{\pi}\frac{i}{4}+1<k<\left(1+a\frac{\xi_1}{\pi}\right)\frac{i}{4}+1, \tag{23}$$

Formula (22) dă aceleași valori ale unghiului γ pentru următoarele valori ale lui k:

$$k \text{ și } \frac{i}{2}-k+2. \tag{24}$$

Momentul extern rezultant acționează numai în planul bisector interior pentru termenii al căror ordin satisface formula (21) dacă $\gamma \neq \pi$. El acționează numai în planul bisector exterior dacă $\gamma = \pi$, sau pentru termenii care au ordinele

$$p=\frac{\left(2\rho-1+a\frac{\xi_p}{\pi}\right)i}{4(k-1)}, \quad \rho=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{25}$$

Momentul extern rezultant al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație este echilibrat cînd unghiul dintre liniile de cilindri are valorile date de formula

$$\gamma=-\pi\left[1-\frac{4(k-1)}{i}+a\frac{\xi_1}{\pi}\right]. \tag{26}$$

Deoarece $\gamma > 0$ formula (26) poate fi îndeplinită dacă

$$k>\left(1+a\frac{\xi_1}{\pi}\right)\frac{i}{4}+1. \tag{27}$$

Echilibrajul momentelor forțelor de inerție la motorul în V normal cu biele articulate direct pe manetoanele arborelui cotit se poate deduce din formulele precedente, în care se înlocuiesc condițiile (11) și (12) precum și condiția $a = 0$.

★

Se presupune că cilindrii motoarelor analizate în continuare alternează între cele două linii, soluție care asigură cea mai mică lungime a motorului cu cilindri intercalați. La precizarea arborilor cotiți din fiecare linie de cilindri sînt folosite rezultatele obținute în lucrarea [3]. Aprinderile sînt considerate uniform repartizate în perioada funcțională a motorului.

2. Motorul cu doi cilindri în patru timpi

Decalajul dintre cele două aprinderi este $4\pi/2 = 2\pi$. La motorul în patru timpi cu aprinderi uniform repartizate trebuie realizate simultan cîte două puncte moarte interioare; în cazul cercetat, această condiţie este îndeplinită dacă unghiul dintre cele două manivele este egal cu unghiul dintre liniile de cilindri (fig. 1).

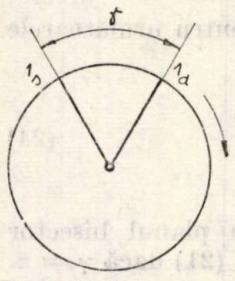


Fig. 1. Steaua manivelelor care asigură repartiţia uniformă a aprinderilor la motorul în V în patru timpi cu doi cilindri intercalaţi.

Forţele de inerţie ale maselor cu mişcare de rotaţie se echilibrează reciproc dacă $\gamma = \pi$; în caz contrar, arborele cotit trebuie prevăzut cu masele corespunzătoare.

Forţele de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie sînt complet echilibrate dacă $\gamma = \pi$, deoarece, la motorul analizat relaţia (9) este satisfăcută pentru toate ordinele. Dacă $\gamma \neq 0$, toţi termenii forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie produc trepidaţii numai în planul bisector interior al unghiului dintre axele cilindrilor (fiindcă este satisfăcută relaţia (9)), trepidaţii cu atît mai mici cu cît γ este mai mare.

Momentul forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de rotaţie trebuie echilibrat cu mase ataşate arborelui cotit.

Întrucît toţi termenii forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie au rezultante numai în planul bisector interior, fiecare produce în planul bisector exterior un moment a cărui mărime este dată de relaţia (13). Se observă că mărirea unghiului dintre liniile de cilindri în vederea reducerii intensităţii trepidaţiilor în planul bisector interior măreşte momentele din planul bisector exterior.

3. Motorul cu patru cilindri în patru timpi

Decalajul dintre două aprinderi consecutive este $\frac{4\pi}{4} = \pi$. Pentru fiecare linie de cilindri se poate folosi soluţia cu cele două manivele în fază sau în opoziţie. În primul caz aprinderile pot fi uniform repartizate dacă grupa de manivele în fază a liniei din dreapta este decalată în urmă cu unghiul $\pi - \gamma$ faţă de grupa de manivele în fază a liniei din stînga (fig. 2a); în al doilea caz cei doi arbori trebuie decalaţi între ei cu unghiul γ (fig. 2b, 2c).

Forţele de inerţie ale maselor cu mişcare de rotaţie trebuie echilibrate cu mase ataşate arborelui cotit în cazul din figura 2a; dacă manivelele sînt repartizate ca în figurile 2b sau 2c aceste forţe de inerţie se echilibrează reciproc.

Potrivit relaţiei (7), în cazul arborelui cotit din figura 2a, toţi termenii forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie au o rezultantă în fiecare linie de cilindri. Totodată, pentru acest arbore cotit este posibilă numai valoarea $k=2$. Dacă $\gamma = \pi$, conform relaţiei (9) sînt

echilibrați toți termenii multiplu de $\frac{i}{2}$ deci toți termenii de ordin par: în schimb din (4) se deduce că termenii de ordinul întîi dau o rezultantă

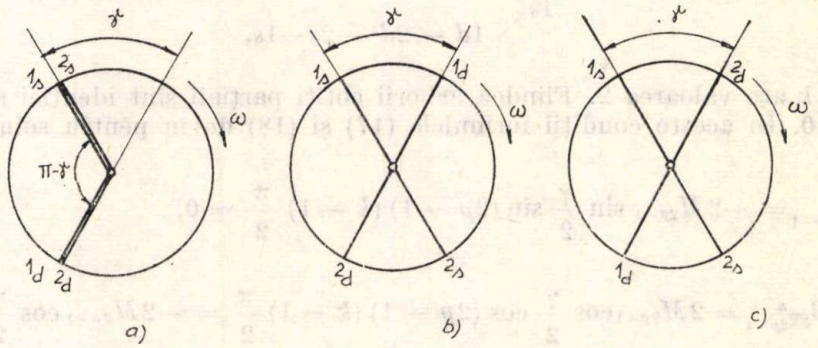


Fig. 2. Steaua manivelelor care asigură repartiția uniformă a aprinderilor la motoru în V în patru timpi cu patru cilindri intercalați.

de patru ori mai mare decît mărimea acestui termen pentru un cilindru, motiv pentru care soluția nu poate fi luată în considerare.

Din relația (6) rezultă că la arborii cotiți din figurile 2b și 2c au o rezultantă în fiecare linie numai termenii de ordin par. Dacă $\gamma = \pi$ se constată din (9) că forțele de inerție ale maselor cu mișcare de translație sînt complet echilibrate.

În cazul soluției din figura 2a forțele de inerție nu produc momente în liniile de cilindri. Pentru ansamblul celor două linii apar momente externe datorită decalării liniilor. Potrivit relațiilor (9) și (10) fiecare termen de ordin par are o rezultantă în planul bisector interior, iar fiecare termen de ordin impar are o rezultantă în planul bisector exterior. Conform relațiilor (13) și (14) momentele din cele două plane bisectoare, cauzate de decalarea liniilor de cilindri au expresiile

$$\mathfrak{M}_{2p_y} = 2\Delta T_{2p} \sin\frac{\gamma}{2} \cos(2p\alpha + \varphi_{2p}),$$
$$\mathfrak{M}_{2p-1_x} = 2\Delta T_{2p-1} \cos\frac{\gamma}{2} \cos[(2p-1)\alpha + \varphi_{2p-1}]. \tag{28}$$

În cazul soluțiilor de arbori cotiți din figurile 2b și 2c, decalarea liniilor de cilindri face să apară momentele termenilor de ordin par, a căror expresie este dată tot de formula (28). Totodată în fiecare linie există momentele termenilor de ordin impar deoarece arborele cotit fiind semisimetric momentele termenilor de ordin par sînt echilibrate. Pentru arborele cotit din figura 2b ordinele de aprindere posibile sînt

$$1s \begin{cases} 2s - 1d - 2d - 1s \\ 2d - 1d - 2s - 1s, \end{cases}$$

prin urmare $k = 3$. Pentru arborele cotit din figura 2c ordinele de aprindere posibile sînt

$$1s \begin{cases} 2s - 2d - 1d - 1s \\ 1d - 2d - 2s - 1s, \end{cases}$$

deci k are valoarea 2. Fiindcă arborii cotiți parțiali sînt identici rezultă $a = 0$. În aceste condiții formulele (17) și (18) devin pentru soluția 2b

$$A^*_{\mathfrak{M}_{2p-1}} = -2M_{2p-1} \sin\frac{\gamma}{2} \sin(2p-1)(k-1)\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$B^*_{\mathfrak{M}_{2p-1}} = 2M_{2p-1}\cos\frac{\gamma}{2} \cos(2p-1)(k-1)\frac{\pi}{2} = -2M_{2p-1}\cos\frac{\gamma}{2};$$

aceste relații arată că momentul rezultant al oricărui termen de ordin impar acționează numai în planul bisector exterior. Dacă $\gamma = \pi$ se obține $B^*_{\mathfrak{M}_{2p-1}} = 0$.

Pentru soluția 2c se deduce din (17) și (18) ținînd seama că numărul k are valoarea 2

$$A^*_{\mathfrak{M}_{2p-1}} = -2M_{2p-1} \sin\frac{\gamma}{2} \sin(2p-1)(k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^p \cdot 2M_{2p-1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B^*_{\mathfrak{M}_{2p-1}} = 2M_{2p-1}\cos\frac{\gamma}{2} \cos(2p-1)(k-1)\frac{\pi}{2} = 0.$$

Se constată că momentul rezultant al oricărui termen de ordin par acționează numai în planul bisector exterior; mărirea unghiului dintre liniile de cilindri determină creșterea amplitudinilor momentelor rezultante.

Din cele de mai sus rezultă că soluția cea mai avantajoasă este cea din figura 2b cu $\gamma = \pi$. La această soluție arborele cotit are plan central de simetrie, împrejurare care asigură și echilibrarea momentului rezultant al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație.

Dacă motorul este în V normal din (12) se obține $\gamma = \pi$, iar din (11), $k = 2$. Echilibrajul acestui motor este deci cel al soluției 2c pentru $\gamma = \pi$.

4. Motorul cu șase cilindri în patru timpi

Decalajul dintre două aprinderi consecutive este $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Deoarece numărul de cilindri în fiecare linie este impar, arborele cotit al fiecărei linii are cele trei manivele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație; în fiecare linie punctele moarte interioare se produc succesiv

cîte unul. Pentru realizarea punctelor moarte interioare cîte două simultan cei doi arbori cotiţi trebuie decalaţi între ei cu unghiul dintre liniile de cilindri; arborii cotiţi pot fi identici (fig. 3) sau simetrici în oglindă (fig.

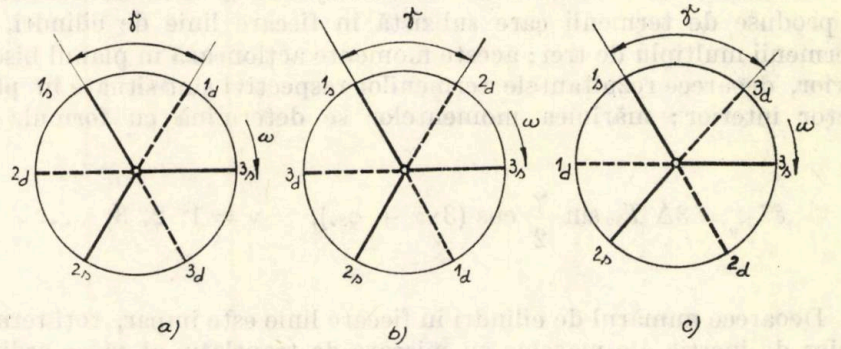


Fig. 3. Soluţii de arbori cotiţi cu arbori parţiali identici, care asigură repartiţia uniformă a aprinderilor la motorul în V în patru timpi cu şase cilindri intercalaţi.

4). Deoarece la fiecare din aceste soluţii există trei variante de calare a celor doi arbori cotiţi, în total sînt şase soluţii distincte de arbori cotiţi. Datorită dispoziţiei manivelelor în fiecare linie forţele de inerţie ale

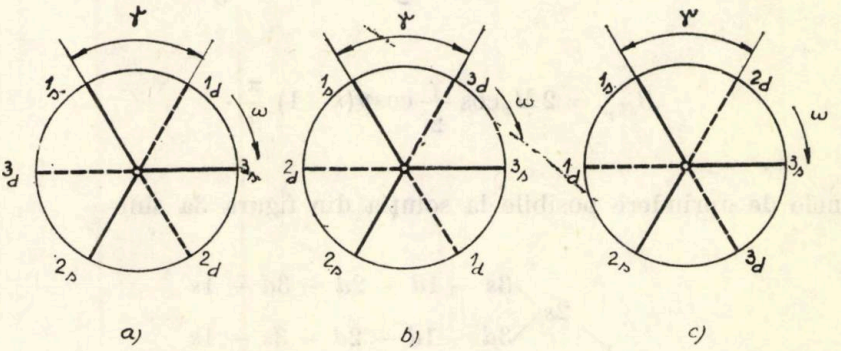


Fig. 4. Soluţii de arbori cotiţi cu arbori parţiali simetrici în oglindă, care asigură repartiţia uniformă a aprinderilor la motorul în V în patru timpi cu şase cilindri intercalaţi.

maselor cu mişcare de rotaţie se echilibrează reciproc dacă echipajele mobile ale cilindrilor sînt identice.

Ordinele termenilor care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri sînt date de relaţia (6). Subzistă deci în fiecare linie termenii al căror ordin este un multiplu de trei. Dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, lipsesc termenii de ordin impar începînd cu termenii de ordinul trei; în acest caz subzistă în fiecare linie termenii al căror ordin este un multiplu de şase.

Se observă că toţi termenii care subzistă în cele două linii de cilindri satisfac condiţia (9), oricare ar fi valoarea lui k; prin urmare, ei produc

trepidații numai în planul bisector interior. Din (3) se constată că amplitudinile acestor trepidații sînt cu atît mai mici cu cît unghiul γ este mai mare; la $\gamma = \pi$ toate forțele de inerție sînt complet echilibrate.

Momentele externe cauzate de decalajul axial al liniilor de cilindri sînt produse de termenii care subzistă în fiecare linie de cilindri, deci de termenii multiplu de trei; aceste momente acționează în planul bisector exterior, deoarece rezultantele termenilor respectivi sînt situate în planul bisector interior; mărimea momentelor se determină cu formula (13).

$$\mathfrak{M}_{3\nu_y} = 3\Delta\, T_{3\nu} \sin\frac{\gamma}{2} \cos(3\nu\alpha + \varphi_{3\nu}), \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Deoarece numărul de cilindri în fiecare linie este impar, toți termenii forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație al căror ordin nu este un multiplu de 3 produc momente în fiecare linie de cilindri.

Pentru arborii cotiți din figura 3, $a = 0$ și prin urmare relațiile (17) și (18) devin

$$A_{\mathfrak{M}_p^*} = -2M_p \sin\frac{\gamma}{2} \sin p(k-1)\frac{\pi}{3}, \tag{29}$$

$$B_{\mathfrak{M}_p^*} = 2M_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos p(k-1)\frac{\pi}{3}. \tag{30}$$

Ordinele de aprindere posibile la soluția din figura 3a sînt

$$1s \begin{cases} 2s \begin{cases} 3s - 1d - 2d - 3d - 1s \\ 3d - 1d - 2d - 3s - 1s \end{cases} \\ 2d \begin{cases} 3s - 1d - 2s - 3d - 1s \\ 3d - 1d - 2s - 3s - 1s \end{cases} \end{cases}$$

și prin urmare k poate lua numai valoarea 4. La soluția din figura 3b se obțin ordinele de aprindere

$$1s \begin{cases} 2s \begin{cases} 3s - 2d - 3d - 1d - 1s, \\ 1d - 2d - 3d - 3s - 1s, \end{cases} \\ 3d \begin{cases} 3s - 2d - 2s - 1d - 1s, \\ 1d - 2d - 2s - 3s - 1s, \end{cases} \end{cases}$$

deci k poate lua valoarea 3. La soluția din figura 3c ordinele de aprindere sînt

$$1s \begin{cases} 2s \begin{cases} 3s - 3d - 1d - 2d - 1s, \\ 2d - 3d - 1d - 3s - 1s, \end{cases} \\ 1d \begin{cases} 3s - 3d - 2s - 2d - 1s, \\ 2d - 3d - 2s - 3s - 1s, \end{cases} \end{cases}$$

prin urmare $k = 2$.

Înlocuind aceste valori ale lui k în formulele (29) și (30) se obține în cazul soluției din figura 3a, la care $k = 4$

$$A_{\mathfrak{M}_p^*} = 0,$$

$$B_{\mathfrak{M}_p^*} = (-1)^p \cdot 2 M_p \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Toate momentele rezultante acționează în planul bisector interior. Dacă $\gamma = \pi$ momentele care subzistă în fiecare linie de cilindri sînt echilibrate.

În cazul soluției din figura 3b, la care $k=3$, rezultă din (29) și (30)

$$A_{\mathfrak{M}_{3\nu+1}^*} = -\sqrt{3}\, M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}_{3\nu+1}^*} = -M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2};$$

$$A_{\mathfrak{M}_{3\nu+2}^*} = +\sqrt{3}\, M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}_{3\nu+2}^*} = -M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2};$$

La soluția din figura 3c ($k=2$) se obține

$$A_{\mathfrak{M}_{3\nu+1}^*} = -(-1)^\nu \sqrt{3}\, M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}_{3\nu+1}^*} = (-1)^\nu M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2};$$

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = (-1)^\nu \sqrt{3}\, M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = -(-1)^\nu M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2};$$

În formulele precedente $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Pentru soluțiile de arbori cotiți din figura 4, $a=1$ și deci formulele (17) și (18) devin

$$A_{\mathfrak{M}^*_p} = -2M_p \sin\frac{\gamma}{2} \sin\left[p(k-1)\frac{\pi}{3} - \frac{\xi_p}{2}\right], \tag{31}$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_p} = 2M_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos\left[p(k-1)\frac{\pi}{3} - \frac{\xi_p}{2}\right]. \tag{32}$$

Procedînd ca în cazul soluțiilor din figura 3 se obține $k=4$ la soluția 4a, $k=3$ la soluția 4b și $k=2$ la soluția 4c.

În vederea aplicării formulelor (31) și (32) este necesar să se determine unghiul ξ_p. Conform relației (20) determinarea unghiului ξ_p revine la precizarea unghiului β_{p_s}. Avînd în vedere definiția acestui unghi, dată în legătură cu relația (20), rezultă că determinarea unghiului ξ_p reclamă pe de o parte stabilirea stelei vectorilor T_p, iar pe de altă parte precizarea unghiului β_{p_s}.

Potrivit celor arătate în lucrarea [3] steaua vectorilor T_p într-o poziție oarecare a arborelui cotit se determină reprezentînd vectorul T_{p_1} pentru cilindrul 1 într-o poziție oarecare și figurînd în raport cu acesta vectorii celorlalți cilindri, ținînd seama că — pentru cilindrul q — unghiul dintre vectorii T_{p_1} și T_{p_q}, măsurat în sensul de rotație al arborelui cotit, este de p ori mai mare decît unghiul dintre manivelele 1 și q.

Procedînd în acest mod pentru arborele cotit al liniei din stînga se constată că există trei stele distincte de vectori forță și anume o stea pentru ordinele $p = 3\nu + 1$, alta pentru ordinele $p = 3\nu + 2$ și a treia pentru ordinele $p = 3\nu + 3$ ($\nu = 0, 1, 2, 3\ldots$) (fig. 5). Ordinele $p = 3\nu + 2$ nu intră în discuție deoarece termenii avînd aceste ordine nu produc momente în fiecare linie de cilindri.

Potrivit figurii 5, valorile căutate ale unghiului β_{p_s} sînt $\beta_{3\nu+1_s} = \frac{4\pi}{3}$ și $\beta_{3\nu+2_s} = \frac{5\pi}{3}$. Din formula (20) se obține

$$\xi_{3\nu+1} = \pi - 2\beta_{3\nu+1} = -\frac{5\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3},$$

$$\xi_{3\nu+2} = \pi - 2\beta_{3\nu+2} = -\frac{7\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}.$$

Fig.5

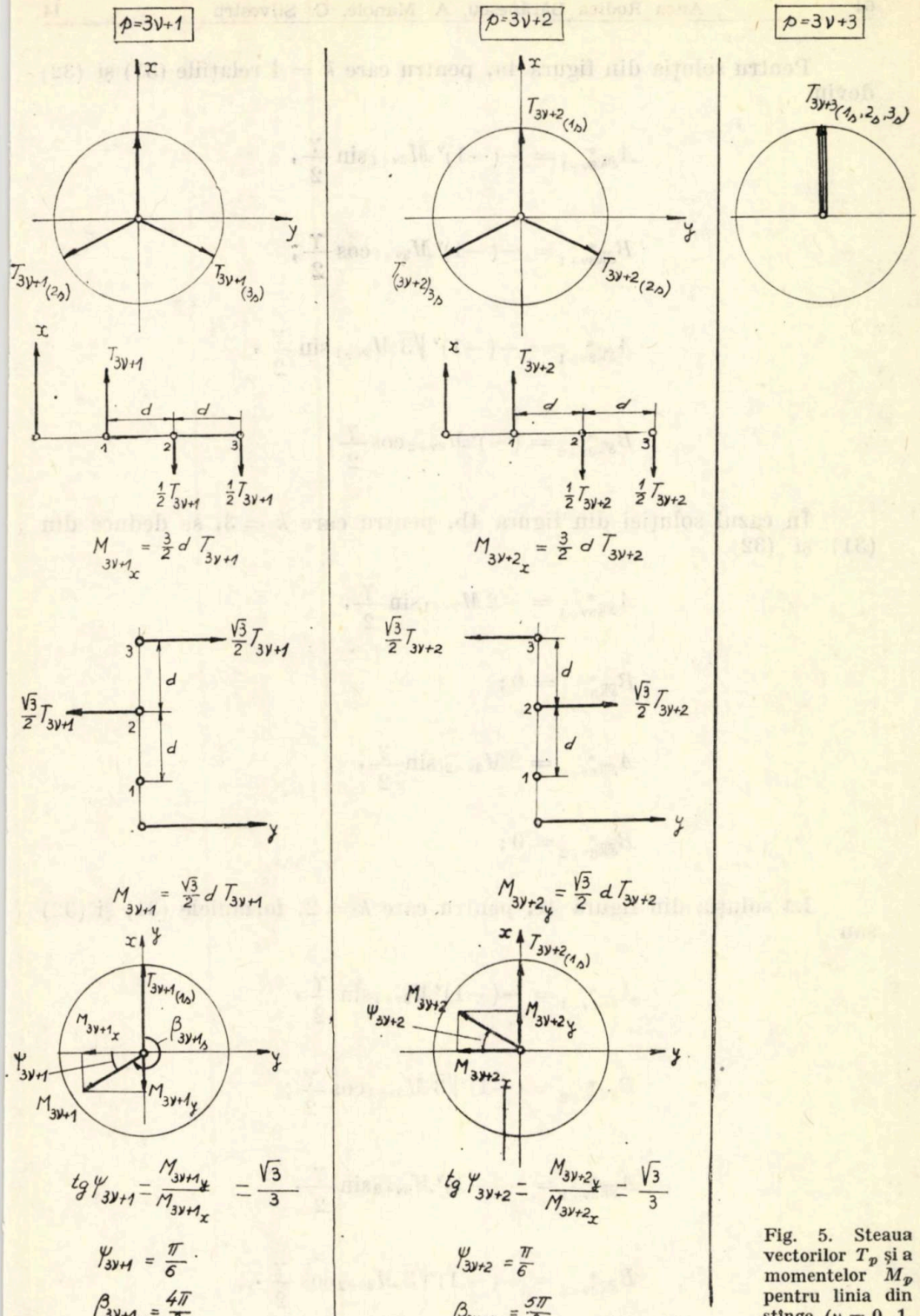


Fig. 5. Steaua vectorilor T_p și a momentelor M_p pentru linia din stînga ($\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots$).

Pentru soluția din figura 4a, pentru care $k = 4$ relațiile (31) și (32) devin

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = -(-1)^\nu M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = -(-1)^\nu M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2};$$

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = -(-1)^\nu \sqrt{3}\, M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = (-)^\nu M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2};$$

În cazul soluției din figura 4b, pentru care $k = 3$, se deduce din (31) și (32)

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = -2M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = 0;$$

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = 2M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = 0;$$

La soluția din figura 4c, pentru care $k = 2$, formulele (31) și (32) sau

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = -(-1)^\nu M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = (-1)^\nu \sqrt{3}\, M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2};$$

$$A_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+1}} = -(-1)^\nu M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}^*_{3\nu+2}} = -(-1)^\nu \sqrt{3}\, M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Rezultatele precedente au fost trecute în tabelul 1. Se observă că soluțiile din figurile 3 și 4 sînt diferențiate numai în privința echilibrajului momentelor externe care subzistă în fiecare linie de cilindri. Dintre soluțiile analizate, cea mai bună este soluția din figura 3a pentru $\gamma = \pi$, deoarece singurul ei dezechilibru este cel produs de decalarea liniilor de cilindri. Soluțiile din figurile 3b și 3c sînt echivalente din punctul de vedere al echilibrajului; aceeași constatare este valabilă pentru soluțiile din figurile 4a și 4c. La soluția din figura 4b este indicat ca unghiul γ să aibă o valoare cît mai mică.

Dacă din diferite motive nu se poate adopta $\gamma = \pi$, la toate soluțiile echilibrajul momentelor externe este nesatisfăcător în principal din cauză că subzistă momentul extern al termenilor de ordinul întîi. Acest moment poate fi echilibrat cu mase atașate arborelui cotit prin adoptarea pentru unghiul dintre liniile de cilindri a valorii dată de formula (22), în care numărul k poate lua numai valorile care satisfac condiția (23). Atît în cazul soluțiilor din figura 3, pentru care $a = 0$, cît și în cazul soluțiilor din figura 4, pentru care $a=1$ și $\xi_1 = \frac{\pi}{3}$ condiția (23) este verificată numai pentru valoarea $k = 2$; în consecință momentul extern al termenilor de ordinul întîi se poate echilibra cu mase atașate arborelui cotit numai la soluțiile din figurile 3c și 4c.

Din formula (22) se obține în cazul $k = 2$ valoarea $\gamma = \frac{\pi}{3}$ pentru soluția din figura 3c și valoarea $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ pentru soluția din figura 4c.

Momentul extern rezultant al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație este echilibrat dacă unghiul dintre liniile de cilindri are valorile date de relația (26) în care numărul k trebuie să verifice condiția (27.) Din această ultimă condiție se deduce atît pentru soluțiile din figura 3 cît și pentru cele din figura 4, $k > 3$; prin urmare, momentul extern rezultant al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație se poate echilibra prin alegerea unghiului dintre liniile de cilindri numai la soluțiile din figurile 3a și 4a. În cazul soluției 3a se obține din (26) $\gamma = \pi$, iar în cazul soluției 4a se obține $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. Prin urmare, soluția 3a cu $\gamma = \pi$ asigură echilibrajul complet al forțelor de inerție și al momentelor acestor forțe.

★

Pentru motorul în V normal echilibrajul poate fi precizat folosind în formulele din primul paragraf valorile pentru k și γ care rezultă din relațiile (11) și (12) și anume $k = 2$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$; totodată $a = 0$.

În fiecare linie de cilindri au o rezultantă numai termenii al căror ordin este un multiplu de trei. Pentru aceste ordine, relația (9) este satisfăcută oricare ar fi valoarea lui k; prin urmare, toți termenii care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri provoacă trepidația motorului în planul bisector interior al unghiului dintre liniile de cilindri.

Echilibrajul motorului în V în patru

Steaua manivelelor	Echilibrajul forţelor de inerţie					Echilibrajul momente-		
	Rezultanta[1]) şi ordinul termenilor neechilibraţi din fiecare linie	$\gamma \neq \pi$		$\gamma = \pi$		Momentul extern produs de decalajul dintre liniile de cilindri	Rezul-	
		$A_{\mathfrak{F}_{3\nu}}$	$B_{\mathfrak{F}_{3\nu}}$	$A_{\mathfrak{F}_{3\nu}}$	$B_{\mathfrak{F}_{3\nu}}$		k	p^2)
Fig. 3a	$3T_{3\nu}$	$\pm 6T_{3\nu}\cos\frac{\gamma}{2}$	0	0	0	$3\Delta T_{3\nu}\sin\frac{\gamma}{2}\cos(3\nu\alpha+\varphi_{3\nu})$	4	$\frac{3\nu+1}{3\nu+2}$
Fig. 3b	$3T_{3\nu}$	$\pm 6T_{3\nu}\cos\frac{\gamma}{2}$	0	0	0	$3\Delta T_{3\nu}\sin\frac{\gamma}{2}\cos(3\nu\alpha+\varphi_{3\nu})$	3	$\frac{3\nu+1}{3\nu+2}$
Fig. 3c	$3T_{3\nu}$	$\pm 6T_{3\nu}\cos\frac{\gamma}{2}$	0	0	0	$3\Delta T_{3\nu}\sin\frac{\gamma}{2}\cos(3\nu\alpha+\varphi_{3\nu})$	2	$\frac{3\nu+1}{3\nu+2}$
Fig. 4a	$3T_{3\nu}$	$\pm 6T_{3\nu}\cos\frac{\gamma}{2}$	0	0	0	$3\Delta T_{3\nu}\sin\frac{\gamma}{2}\cos(3\nu\alpha+\varphi_{3\nu})$	4	$\frac{3\nu+1}{3\nu+2}$
Fig. 4b	$3T_{3\nu}$	$\pm 6T_{3\nu}\cos\frac{\gamma}{2}$	0	0	0	$3\Delta T_{3\nu}\sin\frac{\gamma}{2}\cos(3\nu\alpha+\varphi_{3\nu})$	3	$\frac{3\nu+1}{3\nu+2}$
Fig. 4c	$3T_{3\nu}$	$\pm 6T_{3\nu}\cos\frac{\gamma}{2}$	0	0	0	$3\Delta T_{3\nu}\sin\frac{\gamma}{2}\cos(3\nu\alpha+\varphi_{3\nu})$	2	$\frac{3\nu+1}{3\nu+2}$

1) $\nu = 1, 2\ 3, \ldots$
2) $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Tabela 1

timpi cu șase cilindri intercalați

lor externe ale forțelor de inerție

tanta momentelor care subzistă în fiecare linie de cilindri

$\gamma \neq \pi$		$\gamma = \pi$	
$A_{\mathfrak{M}_p^*}$	$B_{\mathfrak{M}_p^*}$	$A_{\mathfrak{M}_p^*}$	$B_{\mathfrak{M}_p^*}$
0	$(-1)^p \cdot 2M_p \cos\frac{\gamma}{2}$	0	0
$-\sqrt{3}\,M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2}$	$-M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2}$	$-\sqrt{3}\,M_{3\nu+1}$	0
$\sqrt{3}\,M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2}$	$-M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2}$	$\sqrt{3}\,M_{3\nu+2}$	0
$-(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2}$	$(-1)^\nu M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+1}$	0
$(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2}$	$(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+2}$	0
$-(-1)^\nu M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu M_{3\nu+1}$	0
$-(-1)^\nu M_{3+2} \sin\frac{\gamma}{2}$	$(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu M_{3\nu+2}$	0
$-2M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2}$	0	$-2M_{3\nu+1}$	0
$2M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2}$	0	$2M_{3\nu+2}$	0
$-(-1)^\nu M_{3\nu+1} \sin\frac{\gamma}{2}$	$(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+1} \cos\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu M_{3\nu+1}$	0
$-(-1)^\nu M_{3\nu+2} \sin\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu \sqrt{3}\,M_{3\nu+2} \cos\frac{\gamma}{2}$	$-(-1)^\nu M_{3\nu+2}$	0

Dacă motorul are ambielaj normal, liniile de cilindri trebuie decalate între ele. În acest caz, termenii care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri, termenii al căror ordin este un multiplu de trei, produc în planul bisector exterior un moment extern a cărui mărime se determină cu formula (13).

Termenii al căror ordin nu este un multiplu de trei produc momente în fiecare linie de cilindri. Mărimile componentelor în cele două plane bisectoare ale momentelor rezultante sînt date de relaţiile (17) şi (18); în cazul cercetat se obţine

$$\left.\begin{aligned} |A_{\mathfrak{M}_p^*}| &= \frac{3}{2} M_p \\ |B_{\mathfrak{M}_p^*}| &= \frac{1}{2} M_p \end{aligned}\right\} \quad p = 3\nu+1, \quad p = 3\nu + 2 \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Se constată că toţi termenii care dau momente în fiecare linie de cilindri produc momente rezultante în cele două plane bisectoare; motorul în V normal cu 6 cilindri şi aprinderi uniform repartizate este deci nesatisfăcător din punctul de vedere al echilibrajului momentelor externe ale forţelor de inerţie.

Concluzii

Din analiza precedentă rezultă că motorul cu cilindri intercalaţi prezintă avantaje din punctul de vedere al echilibrajului. Există soluţii care asigură un echilibraj foarte bun sau chiar complet.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Bărănescu G., Silvestru C.*, Echilibrajul forţelor de inerţie la motorul în V cu cilindri intercalaţi. Studii şi cercetări de mecanică aplicată,
2. *Bărănescu G., Silvestru C.*, Echilibrajul momentelor forţelor de inerţie la motorul în Vcu cilindri intercalaţi Studii şi cercetări de mecanică aplicată,
3. *Bărănescu G., Apostolescu N., Grünwald B.*, Solutions de vilbrequins, optima du point de vue de l'equilibrage Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

TERMOTEHNICĂ

C. Z.: 536.711:621.4

DETERMINAREA PIERDERILOR PROVOCATE DE IREVERSIBILITATEA LAMINĂRII GAZELOR ȘI VAPORILOR CU REFERIRI LA ORGANELE DE DISTRIBUȚIE ALE MAȘINILOR TERMICE ȘI VENTILELE DE REGLARE ALE INSTALAȚIILOR FRIGORIFICE*

VSEVOLOD RADCENCO

1. Aspecte generale

Deplasarea agentului termic sau frigorific prin organe care prezintă variații importante de secțiune este însoțită de scăderea presiunii. În cazul cînd agentul de lucru se comportă ca un gaz perfect iar variația energiei cinetice a acestuia este neglijabilă, reducerea presiunii nu este însoțită de o modificare a temperaturii. Aceasta înseamnă că, în cazul organelor de distribuție ale motoarelor cu ardere internă și compresoarelor cu piston laminarea agentului termic care se manifestă în procesele de transfer de gaze prin secțiunile oferite de supape este un fenomen care influențează negativ performanțele acestor mașini. Aceasta este și o consecință a faptului că micșorarea, prin laminare, a presiunii unui gaz perfect în procesele de admisie-aspirație și evacuare-refulare nu conduce la o variație a temperaturii gazului adică nu este însoțită de efecte calorice sau frigorifice (în acest caz efectul Joule-Thomson $\alpha_i = 0$).

Spre deosebire de gazele perfecte, laminarea gazelor reale și implicit a vaporilor este însoțită de variații de temperatură care prezintă o importanță deosebită mai ales pentru tehnica frigului ($\alpha_i > 0$).

Faptul că scăderea presiunii vaporilor prin laminare determină și o reducere a temperaturii conduce la concluzia că, în această situație apare un efect util care poate fi precizat pe cale de calcul. Aceasta înseamnă de asemenea că, pentru aceeași scădere a presiunii, pierderile provocate de ireversibilitatea laminării vaporilor sînt mai reduse decît cele ale gazelor perfecte.

2. Studiul ireversibilității laminării adiabate

Ținînd seama că în procesul de laminare adiabată schimburile de căldură și de lucru mecanic cu exteriorul sînt nule rezultă că:

$$\Delta i = 0 \qquad (1)$$

* Manuscris predat redacției la data de 10 iulie 1972

Creşterea entropiei agentului laminat în condiţii adiabatice este numai o consecinţă a ireversibilităţii procesului adică :

$$\Delta s = \Delta s_{ir_l} \tag{2}$$

Se aplică teorema Gouy-Stodola care precizează valoarea pierderii cauzate de ireversibilitatea internă a unui proces termodinamic :

$$\pi_{ir} = T_0 \cdot \Delta s_{ir} \tag{3}$$

unde T_0 este temperatura mediului ambiant.

Variaţia exergiei unui agent de lucru aflat în curgere continuă este precizată de expresia :

$$\Delta e = \Delta i - T_0 \cdot \Delta s \tag{4}$$

Corelînd relaţiile (1) ... (4) se ajunge la ecuaţia :

$$\Delta e + \pi_{ir_l} = 0 \tag{5}$$

Deoarece $\Delta s_{ir_l} > 0$ rezultă că $\pi_{ir_l} > 0$ iar $\Delta e < 0$. Cu alte cuvinte, scăderea capacităţii de a efectua lucru mecanic al unui fluid serveşte la acoperirea pierderii π_{irl} provocate de ireversibilitatea laminării. Este evident că, această capacitate este condiţionată de valorile presiunii şi temperaturii la care se află agentul de lucru. Ca urmare, variaţia exergiei unui agent poate fi privită ca fiind compusă dintr-o variaţie a exergiei în funcţie de presiune şi respectiv în funcţie de temperatură :

$$\Delta e = \Delta e_p + \Delta e_T \tag{6}$$

În consecinţă, ecuaţia (5) devine :

$$\Delta e_p + \Delta e_T + \pi_{ir_l} = 0$$

Deoarece în timpul laminării presiunea se micşorează rezultă că şi exergia în funcţie de presiune a fluidului scade astfel că $\Delta e_p < 0$. Rezultă imediat că, ultima relaţie poate fi scrisă şi sub forma :

$$|\Delta e_p| = \Delta e_T + \pi_{ir_l} \tag{7}$$

Se notează cu :

$$\eta_{E_l} = \frac{\Delta e_T}{|\Delta e_p|} \tag{8}$$

randamentul exergetic al procesului de laminare (în cazul $\Delta e_T > 0$);

$$\bar{\pi}_{ir_l} = \frac{\pi_{ir_l}}{|\Delta e_p|} \tag{9}$$

ponderea pierderii provocate de ireversibilitatea laminării în scăderea exergiei în funcţie de presiune a agentului de lucru.

În consecinţă, rezultă :

$$\eta_{E_l} = 1 - \bar{\pi}_{ir_l} \tag{10}$$

3. Cazul organelor de distribuţie ale motoarelor şi compresoarelor cu piston

Se presupune că agentul de lucru se comportă ca un gaz perfect astfel că :

$$\Delta e = \Delta i - T_0 \cdot \Delta s = c_{pm}(T_2 - T_1) - T_0 \left(c_{pm} \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \right) =$$

$$= \left[c_{pm}(T_2 - T_1) - T_0 c_{pm} \ln \frac{T_2}{T_1} \right] + RT_0 \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{11}$$

Comparînd relaţiile (6) şi (11) se ajunge la concluzia că :

$$\Delta e_T = c_{pm} \left(T_2 - T_1 - T_0 \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \tag{12}$$

$$\Delta e_p = RT_0 \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{13}$$

c_{pm} fiind căldura specifică izobară medie în intervalul de temperaturi considerat iar R constanta gazului.

Deoarece, la gazele perfecte $T_2 = T_1$ rezultă că $\Delta e_T = 0$ şi $\eta_{E_l} = 0$ astfel că :

$$\pi_{ir_l} = |\Delta e_p| = RT_0 \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{14}$$

unde $\Delta s_{ir_l} = R \ln \frac{p_1}{p_2}$ reprezintă creşterea entropiei agentului laminat.

Semnificaţia grafică a pierderii cauzate de ireversibilitatea laminării unui gaz perfect este precizată în diagrama $T-s$ din fig. 1.

Este interesant de observat că mărimea $|\Delta e_p|$ reprezintă de fapt lucrul mecanic izotermic de destindere a unui gaz la temperatura mediului

ambiant, în intervalul de presiuni $p_1 \ldots p_2$. În cazul laminării gazului perfect acest lucru mecanic este consumat integral pentru acoperirea pierderii datorită ireversibilității procesului, efectul util apreciat prin randamentul exergetic fiind nul.

Notînd cu

$$\Delta p = p_1 - p_2 \tag{15}$$

scăderea absolută a presiunii în organul de distribuție considerat și cu

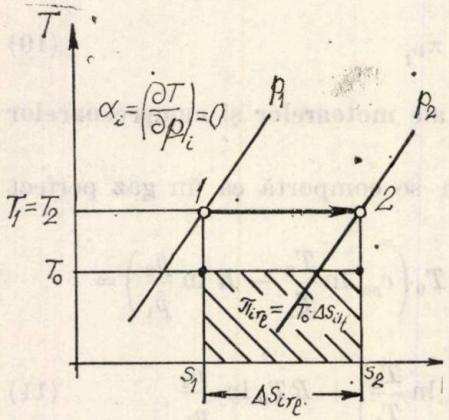


Fig. 1

$$\psi_p = \frac{\Delta p}{p_1} \tag{16}$$

coeficientul pierderilor relative de presiune se ajunge la expresia:

$$\pi_{ir_l} = RT_0 \ln \frac{p_1}{p_1 - \Delta p} =$$

$$= RT_0 \ln \frac{1}{1 - \psi_p} \qquad \left[\frac{J}{kg}\right] \tag{17}$$

Trebuie subliniat că valoarea pierderii specifice de exergie depinde nu numai de coeficientul ψ_p dar și de temperatura mediului ambiant. Importanța pierderii datorită ireversibilității laminării este funcție atît de forma energiei consumate de mașina termică cît și de energia care revine unității de cantitate de agent de lucru.

Exemplu: se consideră un motor cu aprindere prin comprimare și un compresor cu piston pentru aer în care procesele de admisie și aspirație au loc la aceeași presiune. Apreciind că $\Delta p_a = 0{,}12$bar iar presiunea atmosferică este $p_0 = 1$ bar rezultă $\psi_a = 0{,}12$. Pentru $T_0 = 288°K$ și $R_a = 0{,}287 \frac{kJ}{kg.grd}$ se determină pierderea specifică de exergie la trecerea aerului prin secțiunea oferită de organul de admisie al motorului și al treptei I-a a compresorului:

$$\pi_{ir_a} = R_a T_0 \ln \frac{1}{1-\psi_a} = 0{,}287.288 \ln \frac{1}{1-0{,}12} = 10{,}4 \frac{kJ}{kg}$$

Pierderea de exergie care revine masei de aer admise respectiv aspirate în cilindru este $\Pi_{ir_a} = m_{aer} \cdot \pi_{ir_a}$. Ponderea acestei pierderi în energia chimică E_{cb_i} corespunzătoare puterii calorifice inferioare H_i a masei de combustibil m_{cb} consumate de motor pentru realizarea unui ciclu de funcționare este:

$$\pi^*_{ir_a} = \frac{\Pi_{ir_a}}{E_{cb_i}} = \frac{m_{aer} \cdot \pi_{ir_a}}{m_{cb} \cdot H_i} = \frac{\pi_{ir_a}}{H_i / \lambda L_0} \tag{18}$$

unde L_0 este aerul minim necesar arderii unui kg de combustibil iar λ coeficientul excesului de aer.

Se observă că raportul $H_i/\lambda L_0$ caracterizează încărcarea energetică a unui kg de aer admis în cilindrul motorului. Presupunînd cazul motorului D-103 fabricat de uzinele „Tractorul"-Braşov la care arderea motorinei are loc cu $\lambda = 1{,}5$ iar $L_0 = 14{,}3 \frac{\text{kg aer}}{\text{kg comb}}$ şi $H_i = 42{,}5 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$ rezultă :

$$\frac{H_i}{\lambda L_0} = \frac{42{,}5}{1{,}5 \cdot 14{,}3} = 1{,}98 \frac{\text{MJ}}{\text{kg aer}} = 1980 \frac{\text{kJ}}{\text{kg aer}}.$$

În consecinţă ponderea procentuală a pierderii cauzate de ireversibilitatea laminării în supapa de admisie a motorului D-103 are valoarea :

$$\pi^*_{ir_a} = \frac{\pi_{ir_a}}{H_i/\lambda L_0} 100 = \frac{10{,}3 \cdot 100}{1980} = 0{,}52\,\%$$

Aproximativ aceeaşi valoare a pierderii caracterizează şi supapa de evacuare a motorului astfel că ponderea pierderilor cauzate de ireversibilitatea laminării în organele de distribuţie ale motorului D-103 se ridică la 1,04 %. Amplificarea excesului de aer sau creşterea temperaturii mediului ambiant reprezintă factori care măresc ponderea acestor pierderi.

Dacă se fac referiri la compresorul cu piston în două trepte de tip C 5 fabricat de uzinele „Timpuri Noi" — Bucureşti se constată că puterea efectivă necesară antrenării este $P_e = 52{,}7$ kW la un debit volumic de aer aspirat $D_v = 5{,}6 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$, în condiţiile unei presiuni de livrare $p_l = 7$at. Pentru $p_0 = 1$ bar şi $T_0 = 288°\text{K}$ rezultă densitatea aerului aspirat $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m³ astfel că debitul masic al compresorului este $D = 5{,}6 \cdot 1{,}2 = 6{,}7$ kg/min. În consecinţă încărcarea energetică a unui kg de aer refulat de compresor este:

$$\frac{60\,P_e}{D} = \frac{60 \cdot 52{,}7}{6{,}7} = 470 \frac{\text{kJ}}{\text{kg aer}}$$

Rezultă deci, că ponderea procentuală a pierderii cauzate de laminarea aerului la trecerea prin supapa de aspiraţie a treptei I-a a compresorului are valoarea :

$$\pi^*_{ir_a} = \frac{\pi_{ir_a}}{60Pe/D} 100 = \frac{10{,}4 \cdot 100}{470} \approx 2{,}2\,\% \qquad (19)$$

În ceea ce priveşte supapa de refulare a treptei a I-a se constată că, pentru aceeaşi scădere a presiunii $\Delta p_r = \Delta p_a$ coeficientul pierderilor relative de presiune este sensibil mai redus datorită presiunii iniţiale, la

refulare, mari. Considerînd că $p_r = \sqrt{p_l} = 2{,}7$ bar rezultă $\psi_r = \frac{0{,}12}{2{,}7} \cong$ $\cong 0{,}044$. În consecinţă

$$\pi_{ir_r} = R_a T_0 \ln \frac{1}{1-\psi_r} = 0{,}287 \cdot 288 \ln \frac{1}{1-0{,}044} \cong 3{,}8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

iar ponderea procentuală a pierderii în supapa de refulare este:

$$\pi^*_{ir_r} = \frac{\pi_{ir_r}}{60 Pe/D} 100 = \frac{3{,}8 \cdot 100}{470} \approx 0{,}8\,\%$$

Se constată deci că pierderile cauzate de ireversibilitatea laminării în supapele treptei a I-a se ridică la 3 %. Aceste pierderi sînt sensibil mai mari decît cele care caracterizează motorul cu ardere internă datorită încărcării energetice mai reduse a agentului de lucru. Desigur că, la pierderile care revin treptei a I-a se adaogă cele cauzate de treapta a II-a a compresorului. Este evident de asemenea că, pe măsură ce rangul treptei creşte, influenţa ireversibilităţii laminării în organele de distribuţie se atenuează datorită scăderii coeficientului ψ_p. Aceasta înseamnă că, în operaţiile de proiectare ale compresoarelor cu mai multe trepte trebuie acordată o atenţie deosebită, în primul rînd, distribuţiei primei trepte de comprimare. În cazul motoarelor cu ardere internă această grijă trebuie să se manifeste mai ales atunci cînd arderea combustibilului are loc cu excese de aer mari.

4. Cazul ventilelor de laminare ale instalaţiilor frigorifice

În mod obişnuit laminarea agentului frigorific are loc în domeniul efectului Joule-Thomson pozitiv fiind însoţită deci de o scădere a temperaturii. În continuare se presupune că temperatura iniţială a agentului este inferioară temperaturii mediului ambiant ($T_1 < T_0$). Procesul de laminare în care temperatura scade de la T_1 la T_2 este reprezentat în diagrama $T - s$ arătată în fig. 2.

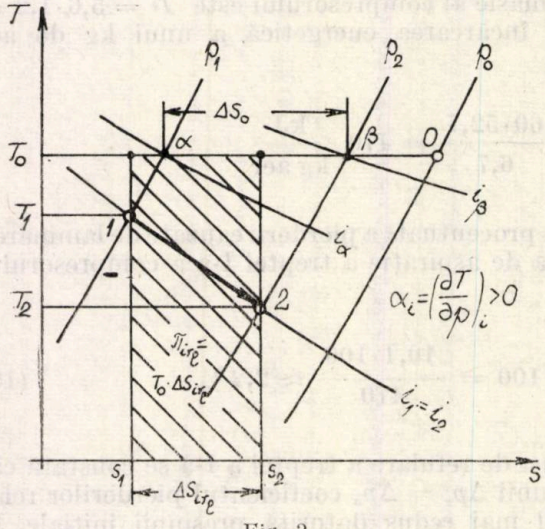


Fig. 2

Ţinînd seama de semnificaţia scăderii exergiei în funcţie de presiune ca lucru mecanic izotermic de destindere la temperatura T_0 de la p_1 la p_2 rezultă că (fig. 2):

$$|\Delta e_p| = l_{iz_0} = T_0(s_\beta - s_\alpha) - (i_\beta - i_\alpha) = T_0 \Delta s_0 - \Delta i_T. \quad (20)$$

unde :

$\Delta s_0 = s_\beta - s_\alpha$ reprezintă creşterea entropiei specifice a agentului în procesul izotermic de destindere la temperatura T_0;

$\Delta i_{T_0} = i_\beta - i_\alpha$ — efectul izotermic de laminare la temperatura mediului ambiant în acelaşi interval de presiuni $p_1 \ldots p_2$.

Deoarece exergia în funcţie de temperatură e_T a unui agent are semnificaţia exergiei căldurii schimbate de agent într-un proces izobar de variaţie a temperaturii de la T_0 la o temperatură T dată rezultă că variaţia exergiei în funcţie de temperatură în procesul de laminare este dată de :

$$\Delta e_T = e_{T_2} - e_{T_1} = i_2 - i_\beta - T_0(s_2 - s_\beta) - [i_1 - i_\alpha - T_0(s_1 - s_\alpha)] =$$

$$= T_0(s_\beta - s_\alpha) - T_0(s_2 - s_1) - (i_\beta - i_\alpha) = \tag{21}$$

$$= T_0 \Delta s_0 - T_0 \cdot \Delta s_{ir_l} - \Delta i_{T_0} = |\Delta e_p| - \pi_{ir_l}$$

unde $\Delta s_{ir_l} = s_2 - s_1$ reprezintă creşterea entropiei specifice a agentului datorită ireversibilităţii laminării.

În consecinţă, randamentul exergetic al laminării gazului real sau vaporilor este precizat de expresia :

$$\eta_{E_l} = 1 - \frac{\pi_{ir_l}}{l_{iz_0}} = 1 - \frac{T_0 \cdot \Delta s_{ir_l}}{T_0 \cdot \Delta s_0 - \Delta i_{T_0}} \tag{22}$$

Exemplu : se consideră o instalaţie frigorifică echipată cu agregat 2AV—10 având puterea frigorifică $Q_f = 20000$ kcal/h la temperatura de vaporizare $t_v = -10°C$ şi de condensare $t_c = +25°C$. Puterea de antrenare a agregatului este $P_e = 10$ kW. În aceste condiţii, presiunea de vaporizare este $p_v = 2{,}9$ bar iar cea de condensare $p_c = 10$ bar. Cu ajutorul diagramei i—lgp a amoniacului se determină următoarele mărimi necesare calculului randamentului exergetic al laminării NH_3-ului de la $p_1 = 10$ bar la $p_2 = 2{,}9$ bar în condiţiile $t_0 + 15°C$ şi $p_0 = 1$ bar:

$$\Delta i_{T_0} = i_\beta - i_\alpha = 1728 - 483 = 1245 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\Delta s_0 = s_\beta - s_\alpha = 9{,}13 - 4{,}43 = 4{,}7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg°K}}$$

$$\Delta s_{ir_l} = s_2 - s_1 = 4{,}62 - 4{,}576 = 0{,}044 \frac{\text{kJ}}{\text{kg°K}}$$

Rezultă :

$$l_{iz_0} = |\Delta e_p| = 288 . 4{,}7 - 1245 = 105 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\pi_{ir_l} = T_0 \cdot \Delta s_{ir_l} = 288 \cdot 0{,}044 = 12{,}7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\Delta e_T = |\Delta e_p| - \pi_{ir_l} = 105 - 12{,}7 = 92{,}3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\bar{\pi}_{ir_l} = \frac{\pi_{ir_l}}{l_{iz_0}} 100 = \frac{12{,}7 \cdot 100}{105} = 12{,}2\,\%$$

$$\eta_{E_l} = \frac{\Delta e_T}{|\Delta e_p|} 100 = \left(1 - \frac{\bar{\pi}_{ir_l}}{100}\right)100 = (1 - 0{,}122)100 = 87{,}8\,\%$$

Pentru a determina ponderea pierderii provocate de laminare se calculează debitul de amoniac necesar:

$$D = \frac{Q_f}{q_f} = \frac{20000}{270{,}58} = 74 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

q_f fiind puterea frigorifică specifică a agentului, în $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

Încărcarea energetică a amoniacului rezultă din:

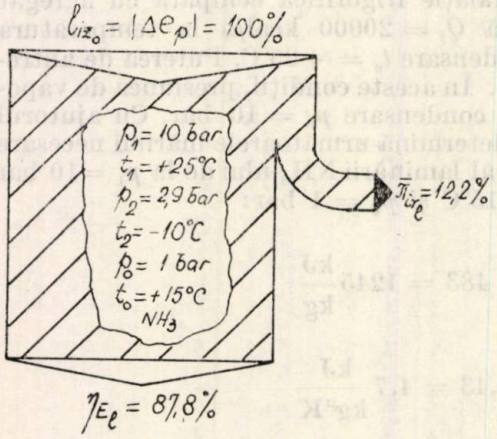


Fig. 3

$$3600 \frac{P_e}{D} = 3600 \frac{10}{74} = 487 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

În consecință, ponderea pierderii cauzate de ventilul de laminare se obține astfel:

$$\pi^*_{ir_l} = \frac{\pi_{ir_l}}{3600\, P_e/D} 100 = \frac{12{,}7 \cdot 100}{487} = 2{,}6\,\% \qquad (23)$$

Bilanțul exergetic al procesului de laminare a amoniacului este arătat în fig. 3. Se observă că eficiența laminării din punctul de vedere al ponderii frigului, apreciată prin randamentul exergetic depășește 85 % pentru instalațiile cu o singură treaptă de comprimare. Deși scăderea presiunii amoniacului este mult mai mare decît cea corespunzătoare pierderilor de presiune în supapa de aspirație a compresorului de aer ponderile pierderilor sînt apropiate în condițiile unor încărcări energetice ale agentului compara-

bile. Aceasta este o consecință a faptului că laminarea vaporilor în domeniul $\alpha_i > 0$ este însoțită de un efect frigorific foarte important în care temperatura amoniacului scade cu $\Delta t_l = 25 - (-10) = 35$ grd.

Observație. Relațiile (8) și (22) de definire a randamentului exergetic al laminării sînt aplicabile numai atunci cînd prin laminare exergia în funcție de temperatură a agentului de lucru crește. Se constată că $\Delta e_T > 0$ în domeniul $\alpha_i > 0$ pentru temperaturi inițiale $T < T_0$ și respectiv în domeniul $\alpha_i < 0$ în cazul $T > T_0$. Cu alte cuvinte, laminarea este însoțită de un efect util numai atunci cînd determină o scădere a temperaturii în domeniul temperaturilor situate sub temperatura mediului ambiant T_0 sau o creștere a acesteia în domeniul $T > T_0$.

Dacă prin laminare $\Delta e_T < 0$ înseamnă că temperatura agentului crește în zona $T < T_0 (\alpha_i < 0)$ sau scade în domeniul $T > T_0$ $(\alpha_i > 0)$; în această situație, prin laminare nu apar efecte utile astfel că bilanțul exergetic definit de relația (5) trebuie scris sub forma:

$$|\Delta e| = |\Delta e_p| + |\Delta e_T| = \pi_{ir_l} \tag{24}$$

Rezultă deci că, în acest caz care caracterizează, printre altele, ventilele de reglare ale turbinelor cu abur scăderea exergiei agentului, compusă din scăderea exergiei în funcție de presiune și a celei în funcție de temperatură este consumată pentru acoperirea pierderilor provocate de ireversibilitatea laminării. În consecință, în această situație, randamentul exergetic al laminării gazului real este, ca și în cazul gazului perfect, nul adică $\eta_{E_l} = 1 - \frac{\pi_{ir_l}}{|\Delta e|} = 0$.

În concluzie, laminarea este însoțită de un efect util numai atunci cînd amplifică diferența de temperatură între agent și mediul ambiant ceea ce se reflectă în creșterea exergiei în funcție de temperatură a agentului laminat.

5. Concluzii

În lucrare este prezentată o metodologie originală de studiu a pierderilor cauzate de ireversibilitatea laminării adiabate pe baza teoremei Gouy-Stodola și a noțiunilor de exergie în funcție de temperatură și în funcție de presiune a agentului de lucru. A fost analizat cazul laminării gazelor perfecte în organele de distribuție ale motoarelor și compresoarelor cu piston stabilindu-se factorii care condiționează ponderea pierderilor provocate de acest proces în încărcarea energetică a agentului. S-a demonstrat că, pentru aceeași scădere de presiune în supape, ponderea pierderilor datorită laminării este sensibil mai mare în cazul compresoarelor decît în cel al motoarelor consecință a deosebirilor importante între încărcările energetice ale agentului termic în cele două categorii de mașini. A rezultat de asemenea că influența pierderilor datorită ireversibilității laminării gazului în organele de distribuție asupra economicității motoarelor se atenuează pe măsură ce coeficientul excesului de aer și temperatura mediului ambiant înregistrează o scădere. În cazul compresoarelor s-a desprins concluzia că influența pierderilor de presiune în supape se atenuează pe măsură ce

rangul treptei creşte, fiind necesar deci să se acorde o atenţie deosebită distribuţiei primei trepte de comprimare.

Studiul laminării vaporilor a scos în evidenţă că randamentul procesului atinge valori importante ca urmare a variaţiei exergiei în funcţie de temperatură a agentului. Spre deosebire de randamentul exergetic al laminări gazelor perfecte care este nul cel al vaporilor poate depăşi 85 % în domeniul efectului Joule-Thomson pozitiv, valori comparabile cu randamentele celor mai perfecţionate maşini detentoare.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Vs. Radcenco, Tr. Nicolescu, Al. Dănescu* — Analiza exergetică a procesului de laminare Comunicare prezentată la a X-a sesiune ştiinţifică a I. P. B., 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

REZISTENŢA MATERIALELOR

C.Z.: 539.4

VIBRAŢIILE LATERALE ALE GRINZILOR SUSPENDATE PE n REAZEME, IN CAZUL FLAMBAJULUI ANTISIMETRIC *

VASILICA COSAC

1. Introducere

O grindă suspendată pe mai multe reazeme pendulare echidistante poate flamba simetric (fig. 1) sau antisimetric (fig. 2).

În cazul flambajului simetric [4], [5] influenţa răsucirii atît din punct de vedere al solicitării cît şi al deformaţiei este neglijabilă, faţă de solicitarea de încovoiere laterală, pe cînd la cel antisimetric această neglijare nu mai poate să fie făcută.

Grinda flambată antisimetric se deformează astfel încît în secţiunile transversale ce trec prin punctele de suspendare nu apar deformaţii de răsucire şi nici deplasări laterale. Deci un interval al grinzii cuprins între două reazeme $i-1$, i, se comportă ca şi o grindă sprijinită pe două reazeme, ce nu permit nici răsucirea, nici încovoierea laterală a capetelor.

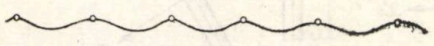


Fig. 1

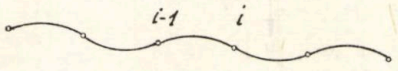


Fig. 2

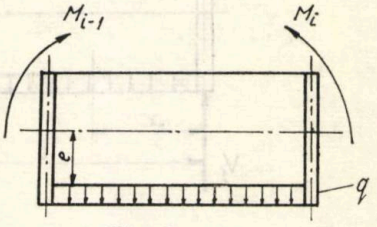


Fig. 3

Studiul vibraţiilor grinzii suspendată pendular în mai multe puncte, se va reduce la cel al unei grinzi sprijinită la capete, aşa cum s-a specificat mai sus (fig. 3).

Deoarece grinda se izolează dintr-una pe mai multe reazeme, trebuie, ca pe lîngă încărcarea q dintre reazeme, să se introducă momentele pe reazeme M_{i-1}, M_i.

Încărcarea care acţionează asupra grinzii este de forma $q = q_0 + q_t \cos \theta t$ şi este aplicată la distanţa $-e-$ sub axa grinzii. Amplitudinea

* Manuscris predat redacţiei la data de 29 februarie 1972

sarcinii este mai mică decît valoarea sarcinii critice de flambaj static și în consecință sistemul ar trebui să execute oscilații verticale forțate.

S-a constatat însă, că pentru anumite valori ale raportului dintre pulsația θ a forței excitatoare și pulsația proprie a vibrației transversale ω_y sau de răsucire ω_x, forma dreaptă a barei devine nestabilă (fig. 4): ca urmare apar vibrații de încovoiere — răsucire a căror amplitudine crește foarte repede, pînă la valori mari.

Avînd în vedere că sistemul este conservativ, amplitudinile oscilațiilor laterale și de răsucire nu cresc simultan. Energia este transferată între cele două oscilații, pentru anumite frecvențe predomină oscilațiile laterale și sînt mici cele de răsucire și invers.

Raportul frecvențelor la care apare această rezonanță se deosebește de cel la care apare rezonanța obișnuită, în cazul vibrațiilor forțate [2]. Pentru valori mici ale amplitudinii încărcării acest raport are valoarea 2.

2. Ecuațiile de mișcare

Înaintea pierderii stabilității (fig. 4) singura deformație a grinzii, era produsă de momentul încovoietor M_z. După pierderea stabilității deformațiile grinzii sînt:

w — deplasarea laterală după direcția axei z;
v — deplasarea după direcția axei y;
φ — deformația unghiulară de răsucire.

Deoarece grinda are secțiune dreptunghiulară cu înălțimea h, mult

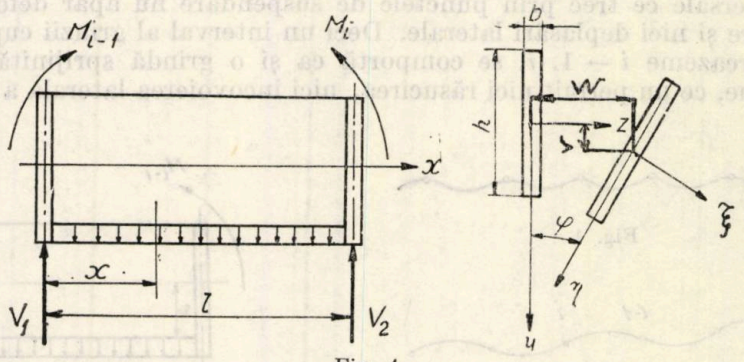


Fig. 4

mai mare ca lățimea b, și deci I_z mult mai mare ca I_y, se poate neglija deplasarea pe direcția axei y.

În această situație, ecuațiile de mișcare după pierderea stabilității grinzii sînt [1]:

$$\left.\begin{aligned} EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(M_z \varphi) + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ -M_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + qe\varphi + J\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

unde :

m — masa unității de lungime ;

$J = mr^2$ — momentul de inerție mecanic al grinzii, calculat față de centrul de greutate al secțiunii transversale ;

r — raza de inerție a secțiunii ;

EI_y — rigiditatea la încovoiere față de axa y ;

M_z — momentul încovoietor scris într-o secțiune oarecare x, înaintea pierderii stabilității grinzii.

Pentru încărcarea grinzii ca în fig. 4 reacțiunea V_1 se poate scrie

$$V_1 = \frac{M_i - M_{i-1}}{l} + \frac{ql}{2}$$

iar expresia momentului încovoietor este :

$$M_z = \frac{M_i - M_{i-1}}{l} x + \frac{q}{2}(lx - x^2) + M_{i-1} \tag{2}$$

Momentele M_i și M_{i-1} pot fi exprimate în funcție de încărcarea q de pe intervalul studiat, cît și de încărcările de pe celelalte intervale ; ele se pot scrie sub forma :

$$\begin{aligned} M_i &= k_1 ql^2 \\ M_{i-1} &= k_2 ql^2 \end{aligned} \tag{3}$$

unde k_1, k_2 sînt coeficienți ce depind de numărul de reazeme al grinzii și de încărcarea grinzii.

Înlocuind expresiile (3) în (2), rezultă

$$M_z = qlx(k_1 - k_2) + \frac{q}{2}(lx - x^2) + k_2 ql^2 \tag{4}$$

iar încărcarea q este :

$$q = q_0 + q_t \cos \theta t \qquad \text{sau}$$

$$q = q_0 \left(1 + \frac{q_t}{q_0} \cos \theta t \right)$$

Se notează

$$\alpha = \frac{q_t}{q_0}$$

și deci

$$q = q_0 (1 + \alpha \cos \theta t) \tag{5}$$

Înlocuind relaţia (5) în (4) se obţine

$$M_z = q_0(1 + \alpha\cos\theta t)\left[lx(k_1 - k_2) + \frac{lx - x^2}{2} + k_2 l^2\right] \tag{6}$$

care introdusă în sistemul (1) conduce la următoarele ecuaţii:

$$\left.\begin{aligned} &EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - q_0(1+\alpha\cos\theta t)\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\left[lx(k_1 - k_2) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{lx - x^2}{2} + k_2 l^2\right]\varphi\right\} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ &-q_0(1+\alpha\cos\theta t)\left[lx(k_1 - k_2) + \frac{lx - x^2}{2} + k_2 l^2\right]\times \\ &\times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GI_d\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + qe\varphi + J\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

3. Integrarea ecuaţiilor de mişcare

Studiind sistemul (7) se constată că încărcarea intră ca parametru în partea stîngă a ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale. În aceste ecuaţii diferenţiale chiar dacă se scriu soluţiile sub forma

$$w = W(t)\overline{W}(x)$$
$$\varphi = \psi(t)\overline{\varphi}(x) \tag{8}$$

nu se pot separa variabilele. Ele pot fi aduse la ecuaţii de forma:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2\beta(1+\alpha\cos\theta t)f = 0 \tag{9}$$

dacă se aplică metoda Galerkin, alegînd pentru $\overline{w}(z)$ şi $\varphi(x)$ nişte funcţii care să satisfacă condiţiile la limită ale grinzii.

Una din cele mai interesante proprietăţi ale

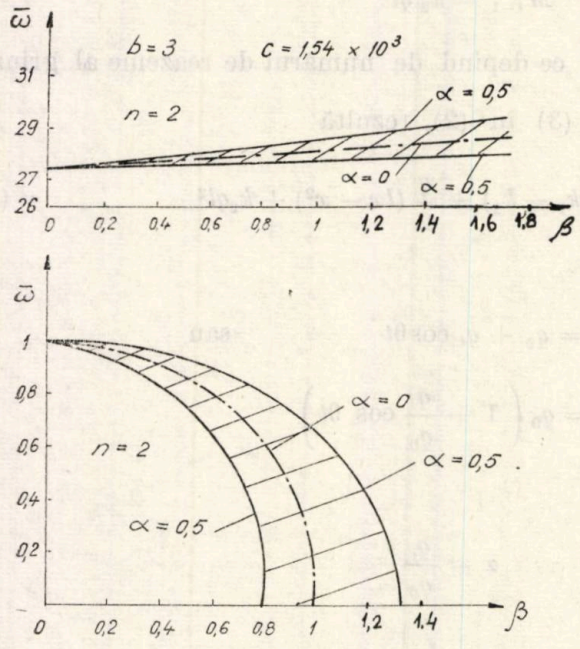


Fig. 5

acestor ecuații este că pentru anumite valori ale mărimilor Ω, α, β, θ, pot exista soluții care să crească nelimitat.

Aceste soluții, reprezentate într-un sistem avînd drept axe de coordonate unele din mărimile de mai sus, determină anumite zone, pe care le vom numi de nestabilitate dinamică. Diferitele linii separă între ele,

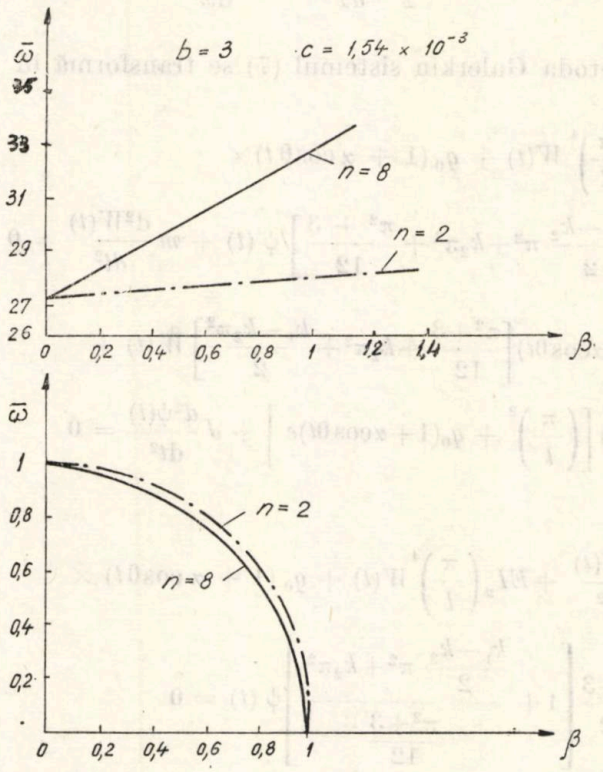


Fig. 6

zonele pentru care ecuația diferențială are soluții periodice. Deci determinarea limitelor zonelor de nestabilitate conduce la găsirea condițiilor pentru care ecuația are soluții periodice.

Alegînd pentru $\overline{\varphi}(x)$ și $\overline{w}(x)$ soluțiile:

$$\overline{w}(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\overline{\varphi}(x) = \sin\frac{\pi x}{l} \qquad (10)$$

care satisfac următoarele condiții la limită

$$x = 0 \quad \overline{w} = 0\,; \quad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 0$$

pentru

$$x = l \qquad \overline{\varphi} = 0$$

$$x = \frac{l}{2} \quad \frac{\mathrm{d}\overline{\varphi}}{dx} = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}x} = 0$$

și aplicînd metoda Galerkin sistemul (7) se transformă în

$$\left.\begin{aligned} &EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 W(t) + q_0(1 + \alpha\cos\theta t)\times \\ &\times\left[\frac{k_1-k_2}{2}\pi^2+k_2\pi^2+\frac{\pi^2+3}{12}\right]\psi(t) + m\frac{\mathrm{d}^2W(t)}{dt^2} = 0 \\ &q_0(1+\alpha\cos\theta t)\left[\frac{\pi^2+3}{12}+k_2\pi^2+\frac{k_1-k_2\pi^2}{2}\right]W(t) + \\ &+\psi(t)\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + q_0(1+\alpha\cos\theta t)e\right] + J\frac{d^2\psi(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{d^2W(t)}{\mathrm{d}t^2} + EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 W(t) + q_0(1+\alpha\cos\theta t)\times \\ &\times\frac{\pi^2+3}{12}\left[1+\frac{\frac{k_1-k_2}{2}\pi^2+k_2\pi^2}{\frac{\pi^2+3}{12}}\right]\psi(t) = 0 \\ &J\frac{d^2\psi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \psi(t)\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 GI_d + q_0 e(1+\alpha\cos\theta t)\right] + \\ &+q_0(1+\alpha\cos\theta t)\frac{\pi^2+3}{12}\left[1+\frac{k_2\pi^2+\frac{k_1-k_2}{2}\pi^2}{\frac{\pi^2+3}{12}}\right]W(t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dacă se notează

$$k_3 = 1 + \frac{\frac{k_1-k_2}{2}\pi^2 + k_2\pi^2}{\frac{\pi^2+3}{12}} = 1 + \frac{(k_1+k_2)6\pi^2}{\pi^2+3}$$

Sistemul (12) devine

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2W(t)}{dt^2} + EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 W(t) + q_0(1+\alpha\cos\theta t)\frac{\pi^2+3}{12}k_3\,\psi(t) = 0 \\ & J\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \psi(t)\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 GI_d + q_0 e(1+\alpha\cos\theta t)\right] + \\ & + q_0(1+\alpha\cos\theta t)\frac{\pi^2+3}{12}k_3 W(t) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

4. Determinarea zonelor de nestabilitate dinamică

S-a menționat mai sus, că determinarea zonelor de nestabilitate dinamică se reduce la găsirea condițiilor pentru care ecuațiile sistemului (13) au soluții periodice [6]; [3].

Acest lucru se poate face introducînd un parametru mic μ, care poate să fie de exemplu α, coeficientul perturbației și să se scrie soluția ecuației (9) sub forma:

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots \mu^k f_k$$

unde f sînt funcții de timp necunoscute.

Introducînd această soluție în ecuația (9) și egalînd între ei coeficienții lui μ^k, se obține un sistem de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, care poate să fie rezolvat.

Condițiile existenței soluțiilor periodice, deci determinarea zonelor de nestabilitate se mai poate face alegînd soluțiile de forma:

$$\left.\begin{aligned} W(t) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} a_k \sin\frac{k\theta}{2} + b_k\cos\frac{k\theta t}{2} \\ \psi(t) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} c_k \sin\frac{k\theta t}{2} + d_k\cos\frac{k\theta t}{2} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Se pot determina zonele de nestabilitate dinamică, dînd lui k diferite valori.

În cele ce urmează se va determina zona de nestabilitate pentru $k = 1$. Aceasta se numește zonă principală de nestabilitate dinamică.

După întocmirea relațiilor (14), în care s-a luat $k = 1$, în sistemul (13), acesta devine:

$$-m\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\left(a_1\sin\frac{\theta t}{2} + b_1\cos\frac{\theta t}{2}\right) + EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \times \left(a_1\sin\frac{\theta t}{2} + b_1\cos\frac{\theta t}{2}\right) +$$

$$+ q_0\frac{\pi^2+3}{12}k_3\left(c_1\sin\frac{\theta t}{2} + d_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)(1+\alpha\cos\theta t) = 0$$

$$-J\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\left(c_1\sin\frac{\theta t}{2}+d_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)+GI_d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(c_1\sin\frac{\theta t}{2}+d_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)+$$

$$+q_0e\left(c_1\sin\frac{\theta t}{2}+d_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)+q_0\alpha\cos\theta t\left(c_1\sin\frac{\theta t}{2}+d_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)+$$

$$+q_0\frac{\pi^2+3}{12}k_3\left(a_1\sin\frac{\theta t}{2}+b_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)+$$

$$+\alpha k_3q_0\frac{\pi^2+3}{12}\cos\theta t\left(a_1\sin\frac{\theta t}{2}+b_1\cos\frac{\theta t}{2}\right)=0$$

sau

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{\theta t}{2}\left\{\left[EI_y\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-m\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]a_1+c_1q_0k_3\frac{\pi^2+3}{12}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}+\\
&+\cos\frac{\theta t}{2}\left\{\left[EI_y\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-m\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]b_1+d_1q_0k_3\frac{\pi^2+3}{12}(1+\alpha)\right\}+\\
&+q_lk_3\frac{\pi^2+3}{12}\frac{1}{2}c_1\sin\frac{3\theta t}{2}+\frac{1}{2}q_lk_3\frac{\pi^2+3}{12}d_1\cos\frac{3\theta}{2}=0\\
&\sin\frac{\theta t}{2}\left\{a_1.q_0k_3\frac{\pi^2+3}{12}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+c_1\left[GI_d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+eq\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.-J\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]\right\}+\cos\frac{\theta t}{2}\left\{b_1\left[q_0\frac{\pi^2+3}{12}k_3\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\right]+d_1\left[GI_d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\right.\right.\\
&\left.\left.+eq_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-J\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]\right\}+q_l\left(ec_1+\frac{\pi^2+3}{12}a_1\right)\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta t}{2}+\\
&+q_l\left(\frac{\pi^2+3}{12}b_1+d_1e\right)\frac{1}{2}\cos\frac{3\theta t}{2}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Din condiția ca sistemul (5) să aibă soluții periodice rezultă următoarele sisteme algebrice omogene:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\left[EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-m\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+c_1q_0k_3\frac{\pi^2+3}{12}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=0\right.\\
&\left.q_0k_3\frac{\pi^2+3}{12}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)a_1+c_1\left[GI_d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+eq_0\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-J\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]=0\right.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-m\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]b_1+d_1q_0k_3\frac{\pi^2+3}{12}(1+\alpha)=0\\&q_0\frac{\pi^2+3}{12}k_3\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+d_1\left[GI_d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+eq_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-J\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right]=0\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Se observă ușor că condiția de compatibilitate pentru ambele sisteme se poate scrie sub forma unui singur determinant, în care să se pună semnele $\pm$ în fața coeficientului α și anume

$$\begin{vmatrix}EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-m\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \frac{\pi^2+3}{12}q_0k_3\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)\\ \frac{\pi^2+3}{12}q_0k_3\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right) & GI_d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-J\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+cq_0\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)\end{vmatrix}=0\quad(18)$$

Din rezolvarea determinantului (18) rezultă

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^4-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\left[\frac{EI_y}{m}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4+\frac{1}{J}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2GI_d+\frac{q_0e}{J}\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)\right]+\frac{GI_d\cdot EI_y}{Jm}\left(\frac{\pi}{l}\right)^6+$$
$$+\frac{EI_y}{Jm}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4eq_0\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{q^2}{Jm}k_3^2\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{\pi^2+3}{12}\right)^2=0\quad(19)$$

Din relația (19) pentru $\theta=0$ și $q=0$ se va obține expresia sarcinii statice critice de flambaj pentru o grindă rezemată pendular în n puncte,

$$q_0^2k_3^2\left(\frac{\pi^2+3}{12}\right)^2-EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^4eq_0-GI_dEI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^6=0$$

sau

$$q_{0\text{critic}}=\frac{EI_y\pi^2\,9{,}2}{l^4k_3^2}\left[0{,}466\,e+\sqrt{(0{,}466\,e)^2+\frac{GI_d}{EI_y}\frac{l^2}{\pi^2}.k_3^2}\right]\quad(20)$$

Expresia sarcinii critice de flambaj, pentru grinda sprijinită pe două reazeme, care nu permit deplasări laterale și deformații de răsucire, se obține din relația (20), pentru $K_3=1$:

$$q_{0\text{critic}}=\frac{\pi^2 9{,}2\,EI_y}{l^4}\left(0{,}466\,e+\sqrt{(0{,}466\,e)^2+\frac{GI_d}{EI_y}\frac{l^2}{\pi^2}}\right)$$

sau dacă se notează forța critică de flambaj după Euler

$$P_E = \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}$$

$$q_{0\text{critic}} = \frac{9{,}2}{l^2} P_E \left(0{,}466\, e + \sqrt{(0{,}466e)^2 + \frac{GI_d}{EI_y}\frac{l^2}{\pi^2}}\right)$$

dacă $e = 0$ rezultă

$$q_{0\text{critic}} = \frac{9{,}2}{l^2} P_E \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{GI_d}{EI_y}}$$

Dacă se notează

$$\beta = \frac{q_0}{q_{\text{critic}}} \quad \text{— factor de încărcare}$$

$$a = \frac{GI_d}{EI_y} \tag{21}$$

$$b = \frac{e^2}{r^2}$$

$$c = \frac{l^2}{e^2}$$

$$\omega_y^2 = \frac{\pi^4}{l^4}\frac{EI_y}{m}$$

$$\omega_x^2 = \frac{\pi^2}{l^2}\frac{GI_d}{J}$$

$$\omega = \left(\frac{\theta}{2\,\omega_y}\right),$$

relația (19) devine:

$$\omega^4 - \omega^2\left[1 + \frac{abc}{\pi^2} + \beta\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)\frac{b \times 0{,}933}{k_3^2}\left(0{,}466 + \sqrt{0{,}466^2 + \frac{ac}{\pi^2}k_3^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{abc}{\pi^2} + \beta\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)\frac{b \times 0{,}933}{k_3^2}\left(0{,}466 + \sqrt{0{,}466^2 + \frac{ac}{\pi^2}k_3^2}\right) - \tag{22}$$

$$- \beta^2\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)^2 \times \frac{b \times 0{,}9948}{k_3^2}\left[0{,}466 + \sqrt{0{,}466^2 + \frac{ac}{\pi^2}k_3^2}\right]^2 = 0.$$

Această ecuație, care leagă pulsația încărcării exterioare cu pulsația proprie a barei și mărimea încărcării o vom numi — ecuația pulsațiilor critice. Prin pulsații critice, se vor înțelege pulsațiile θ ale încărcării exterioare, corespunzătoare limitelor zonelor de nestabilitate. Se poate constata că sînt două zone principale de nestabilitate.

Dacă în relația (22) se face $\alpha = 0$, se obține relația între pulsația proprie a barei, încărcată cu sarcini constante q și două momente M_{i-1}, M_i, de asemenea tot constante și pulsațiile proprii ale barei neîncărcate :

$$\omega^4 - \omega^2\left[1+\frac{abc}{\pi^2}+\beta\cdot\frac{b\times 0{,}933}{k_2^2}\left(0{,}466+\sqrt{0{,}466^2+\frac{ac}{\pi^2}k_3^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{abc}{\pi}+\beta\frac{b\times 0{,}933}{k_3^2}\left(0{,}466+\sqrt{0{,}466^2+\frac{abc}{\pi^2}k_3^2}\right)- \qquad (23)$$

$$-\beta^2\frac{b\times 0{,}9948}{k_3^2}\left[0{,}466+\sqrt{0{,}466^2+\frac{ac}{\pi^2}k_3^2}\right]^2=0.$$

Pentru $\beta = 0$ soluțiile ecuației (23) devin ω_x și ω_y, adică pulsațiile, proprii ale vibrațiilor de încovoiere și răsucire. Pentru grinzile studiate pulsația ω_y este mult mai mică decît ω_x și deci pentru vibrații de încovoiere —răsucire cu frecvențe mici, deformația de încovoiere a grinzii va fi predominantă, pe cînd la frecvențe mari, deformația de răsucire va fi cea predominantă.

Prezentarea grafică a relațiilor (22) și (23) pentru anumite valori ale parametrilor a, b, c, α, k_3 este redată în figura 5. Se constată că cele două zone principale de nestabilitate corespund celor două pulsații proprii ω_x și ω_y . Curbele din fig. 5 sînt trasate pentru grinda pe două reazeme pentru diferite încărcări și anume :

— cea cu linie punctată corespunde lui $\alpha = 0$, adică unei sarcini constante în timp ;

— cele cu linie plină, reprezintă limitele zonei de nestabilitate pentru o sarcină variabilă la care s-a luat $\alpha = 0{,}5$.

În figura 6 sînt trasate cu : linie punctată curba limită pentru o grindă pe două reazeme, iar cu linia plină corespunde grinzii sprijinite în 8 puncte. În ambele cazuri încărcarea este constantă în timp, adică $\alpha = 0$.

Din analiza curbelor se constată că în zona frecvențelor mici, diferența dintre curbe este neglijabilă, pe cînd la frecvențe mari influența numărului de reazeme este evidentă.

Catedra de rezistența materialelor I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Bolotin* — Dinamicescaia ustoicivost uprughix sistem G. U. Tehniko-teoreticeskoi literaturî Moscova 1956.
2. *N. Minorski* — Introduction to non-Linear Mechanics, J. W. Edwards, 1947.
3. *S. Timoshenko* — Théorie de vibrations, Paris et Liege, 1947.
4. *A. Petre*; *V. Cosac* — Vertical Vibrations of Oscillating Beam with the Consideration of the Dynamic, Buckling Effects. Revue Roumaine des Sciences Techniques — Mecanique Applique, 14, 4 (1969).
5. *V. Cosac* — Vibraţiile verticale ale grinzilor sprijinite pendular pe mai multe reazeme luînd în considerare efectele de flambaj dinamic. Buletinul Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu — Dej" Bucureşti, XXXII, 4, (1970).
6. *W. Nowacki* — Dinamica sistemelor elastice. Editura Tehnică, 1969.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

C. Z.: 621.914

IMPACTUL CA SURSĂ DE VIBRAȚII LA FREZAREA FRONTALĂ DE FINISARE

ZOLTAN DUCA, ION GHEORGHE, ALEXANDRU DORIN, FLORIN IONESCU

1. Introducere

La frezarea frontală apare în mod curent fenomenul, oarecum singular, în care tăișul sculei (fața de degajare și muchiile dintelui frezei) ia contact cu un strat de așchiere de grosime inițială a_0, diferită de zero (fig. 1a—b) sau, chiar dacă primul contact este punctiform, pătrunde-

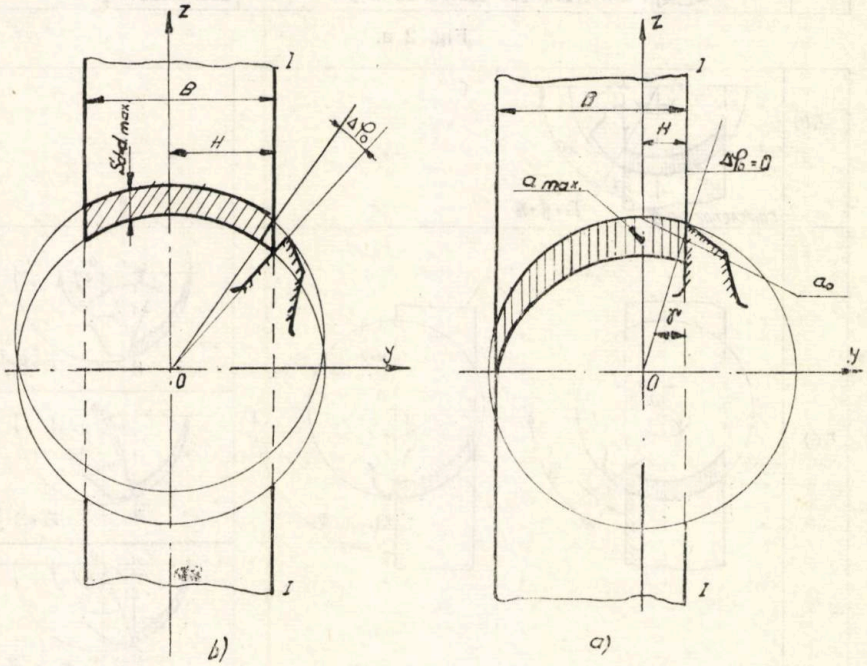


Fig. 1

* Manuscris predat redacției la data de 6 septembrie 1972.

rea în aşchie pînă la grosimea iniţială a_0 (diferită de zero) se produce pe un parcurs $\Delta\varphi_0$ foarte mic (fig. 2a-b) şi într-un interval de timp de asemenea foarte mic. Aceasta face ca forţa de aşchiere să crească foarte repede

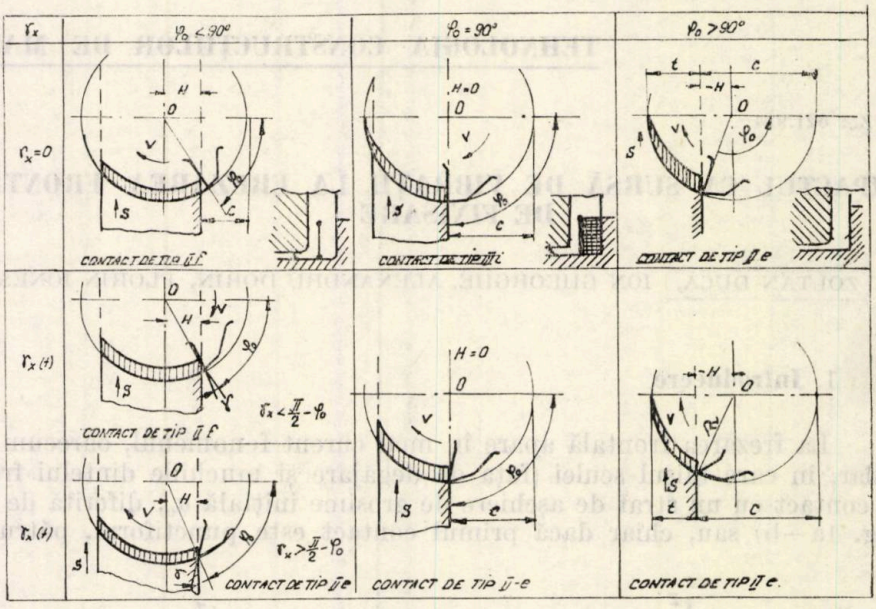


Fig. 2 a.

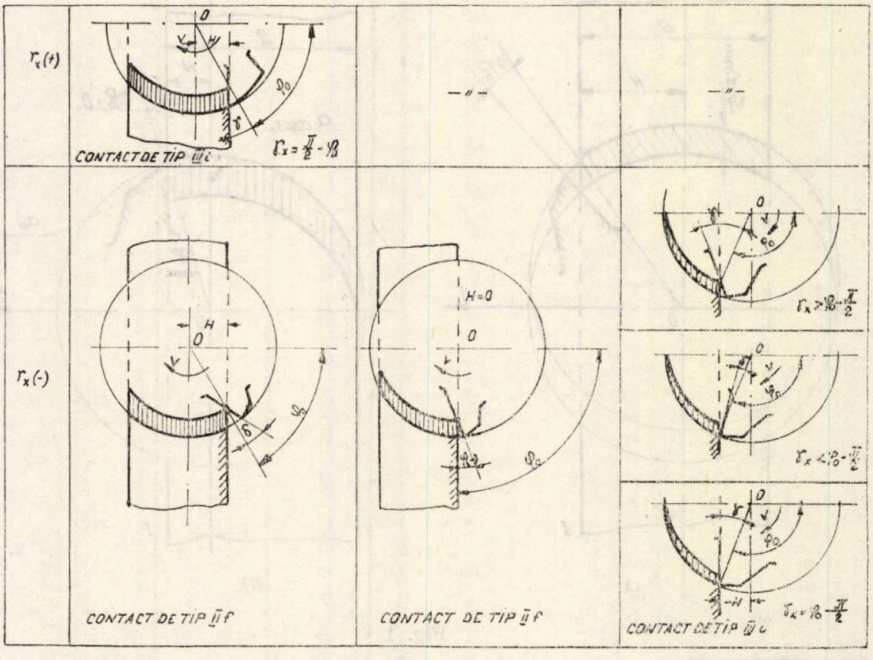


Fig. 2 b.

la o valoare corespunzătoare lui a_0, și ca intrarea completă a dintelui în adaosul de prelucrare să aibă loc cu șoc considerabil. Acest șoc periodic, pe fiecare dinte al frezei, produce fenomene nedorite în timpul procesului de frezare, și anume :

a) cauzează fărîmițarea și uzura prematură a tăișurilor dinților frezei ;

b) constituie o sursă importantă de vibrații forțate în sistemul tehnologic elastic (sculă-piesă-mașină-unealtă)

c) provoacă solicitări dinamice dăunătoare în mașina de frezat ;

Uzura tăișurilor și vibrațiilor concură deopotrivă la modificarea rugozității suprafețelor prelucrate.

Este clar că în operațiile de finisare este necesar ca aceste fenomene dăunătoare să fie, dacă nu complet înlăturate, cel puțin reduse la minimum posibil.

Reținem din cele de mai sus că, mărimea șocului la intrare depinde printre altele, de mărimea intervalului de timp $\Delta\tau = \frac{\Delta\varphi_0}{\omega}$ și respectiv de drumul unghiular $\Delta\varphi_0$ pe care-l parcurge dintele din momentul impactului pînă în momentul pătrunderii complete în așchia de grosime a_0.

Mărimile $\Delta\varphi_0$ și respectiv $\Delta\tau$, depind de ordinea intrării punctelor V, B, C, D ale feței de degajare în așchie (fig. 3) adică de orientarea feței de degajare (de unghiurile ei de degajare și de înclinare) și de distanța H dintre axa frezei și suprafața de întîmpinare $I-I$ a piesei (respectiv de raportul H/R_v dintre distanța H și raza R_v măsurată de la vîrful V al dintelui frezei, fig. 1 și 2, a-b). Pe de altă parte, fărîmițarea și uzura tăișului depind de asemenea de punctul în care are loc impactul, în sensul că punctele V, B și C fiind situate pe muchiile tăișului sînt mai susceptibile la rupere decît punctul D, situat în interiorul feței de degajare ; totodată punctele V, B și C sînt mai mult sau mai puțin expuse, după cum impactul în fiecare din aceste puncte are loc sub un unghi de degajare mai mic sau mai mare și cu șoc mai slab sau mai puternic. De menționat că impactul poate avea loc și pe liniile CV, BD, BV, CD, ca și pe întreaga suprafață $VBCD$ (fig. 3).

Pentru aceste motive este necesar să se cunoască ordinea în care se produce impactul și în funcție de aceasta, unghiurile de așchiere ale tăișurilor, variația forței de așchiere și a factorului de impact pentru fiecare caz de impact în parte, astfel încît să se poată determina geometria optimă a frezei și poziția ei optimă de lucru în raport cu semifabricatul (cu fața de întîmpinare a piesei, respectiv raportul optim H/R_v).

Problema a stat în atenția a numeroși cercetători printre care amintim : Kronenberg, M ; Opitz, H ; Beckhans, H ; Zorev, N ; Etin, A ; Șișcov, V. D ; și alții, însă pe de o parte nu au fost studiate toate aspectele și pe de altă parte, nu s-a reușit decît parțial să se stabilească relații complete pentru determinarea analitică a condițiilor de optimizare, datorită complexității deosebite a problemei.

În articolul de față se stabilește pe baza relațiilor analitice de calcul prezentate în lucrările [1], [2], legătura între unghiul de degajare optim activ, γ_{opt}, și raportul $\frac{H}{R_v}$ (H este distanța de la axa frezei la fața de întîmpinare, iar R_v raza vîrfului) pentru fiecare tip de impact în parte.

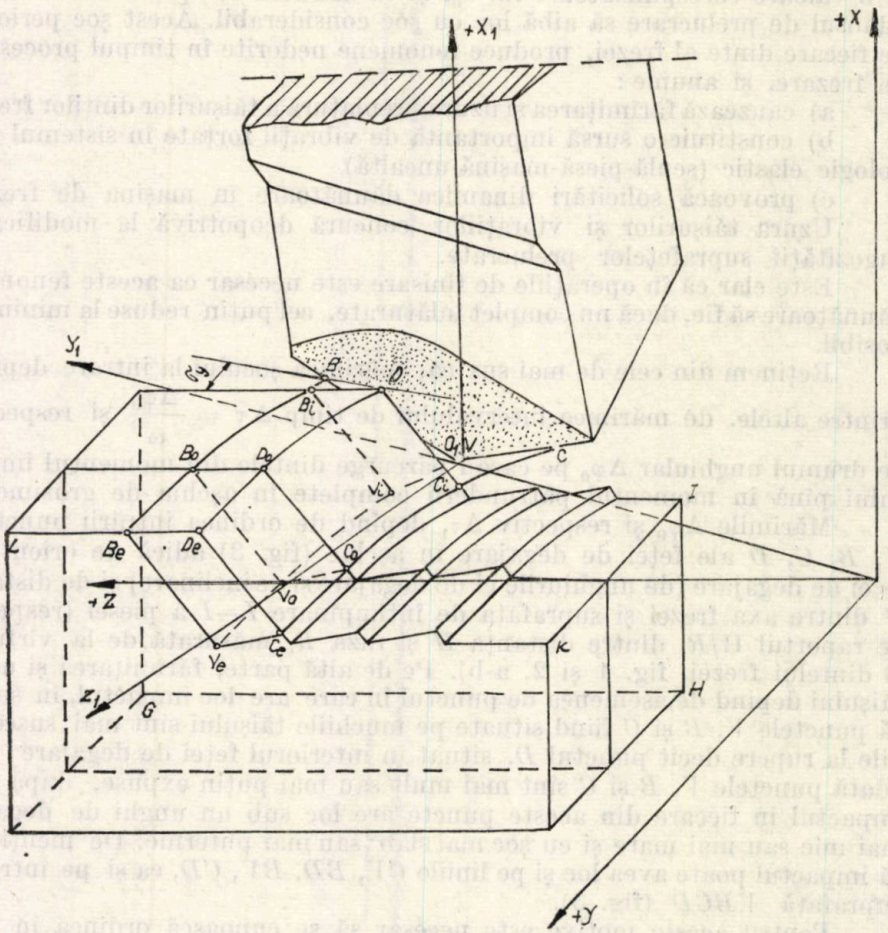


Fig. 3

2. Determinarea orientării feței de degajare și a muchiei tăișului pentru realizarea unui anumit tip de impact.

Se consideră, ca în fig. 3, piesa încadrată în sistemul de referință cinematic $OXYZ$ al mașinii-unelte și cuțitul-dinte de freză încadrat în sistemul de referință rotativ $O_1X_1Y_1Z_1$ al frezei, avînd axele OX și O_1X_1 paralele tot timpul procesului de așchiere. Pentru fața de degajare a cuțitului-dinte de freză (fiind plană) se poate scrie o ecuație, ca fiind ecuația unui plan ce trece printr-un punct oarecare P al piesei și avînd orientarea definită de parametrii :

$$P_x = -\frac{\bar{a}_n}{\bar{c}_n} = \operatorname{tg}\bar{\gamma}_x\,;\quad P_y = -\frac{\bar{b}_n}{\bar{c}_n} = \operatorname{tg}\bar{\gamma}_y\,(\bar{a}_n, \bar{b}_n\,\bar{c}_n \text{ fiind cosinusurile direc-}$$

toare ale normalei la planul feței de degajare) și anume :

$$Z_\gamma - Z_p = P_x(X_\gamma - X_p) + P_\gamma(y_\gamma - y_p) \tag{1}$$

sau

$$\varphi_\gamma = \bar{\gamma}_y + \arcsin \frac{P_x(X_\gamma - X_p)\cos\bar{\gamma}_y + \cos\bar{\gamma}_y R_p(\sin\Phi_p - P_y\cos\Phi_p)}{R} \tag{2}$$

Ecuațiile muchiilor tăișului rectiliniu al cuțitului dinte de freză se pot scrie ca ecuații ale unor drepte ce trec printr-un punct P de pe piesă și avînd cosinusurile directoare cunoscute $\bar{a}_m$, $\bar{b}_m$, $\bar{c}_m$, sub forma :

$$\frac{X_m - X_p}{\bar{a}_m} = \frac{Y_m - Y_p}{\bar{b}_m} = \frac{Z_m - Z_p}{\bar{c}_m} \tag{3}$$

Din ecuațiile (3) rezultă :

$$Z_m = Z_p + \frac{\bar{c}_m}{\bar{a}_m}(X_m - X_p) \tag{4}$$

$$Y_m = Y_p + \frac{\bar{b}_m}{\bar{a}_m}(X_m - X_p)$$

În coordonate cilindrice se obține :

$$\varphi_m = \arccos\left[\frac{R_r\cos\Phi_p + \frac{\bar{b}_m}{\bar{a}_m}(X_m - X_p)}{R}\right] \tag{5}$$

Între parametrii directori ai feței de degajare și acei ai muchiei în sistemul de referință cinematic $OXYZ$ al mașinii-unelte, există relațiile demonstrate în [1, 2] și anume :

$$\frac{\bar{b}_m}{\bar{a}_m} = \operatorname{tg}\bar{\varkappa} \qquad \frac{\bar{a}_m}{\bar{a}_m} = \frac{\operatorname{tg}\bar{\lambda}}{\cos\bar{\varkappa}}$$

$$\operatorname{tg}\bar{\lambda} = P_x\cos\bar{\varkappa} + P_y\sin\bar{\varkappa} \tag{6}$$

În raport cu sistemul de referință cinematic $OXYZ$ al mașinii-unelte parametrii P_x, P_y, $\bar{\varkappa}$, $\bar{\lambda}$ sînt variabili, datorită faptului că freza și implicit cuțitele acesteia efectuează o mișcare de rotație. nÎ schimb, în raport cu sistemul de referință rotativ $OX_1Y_1Z_1$ parametrii au valori constante

(fig. 4). Scriem pentru cele două sisteme de referinţă, relaţiile dintre parametrii P_x, P_y, $\overline{\varkappa}$, $\overline{\lambda}$, care sînt de forma :

$$\operatorname{tg}\overline{\varkappa} = \frac{b_x \cos\varkappa + b_y \sin\varkappa + b_z \operatorname{tg}\lambda}{a_x \cos\varkappa + a_y \sin\varkappa + a_z \operatorname{tg}\lambda}$$

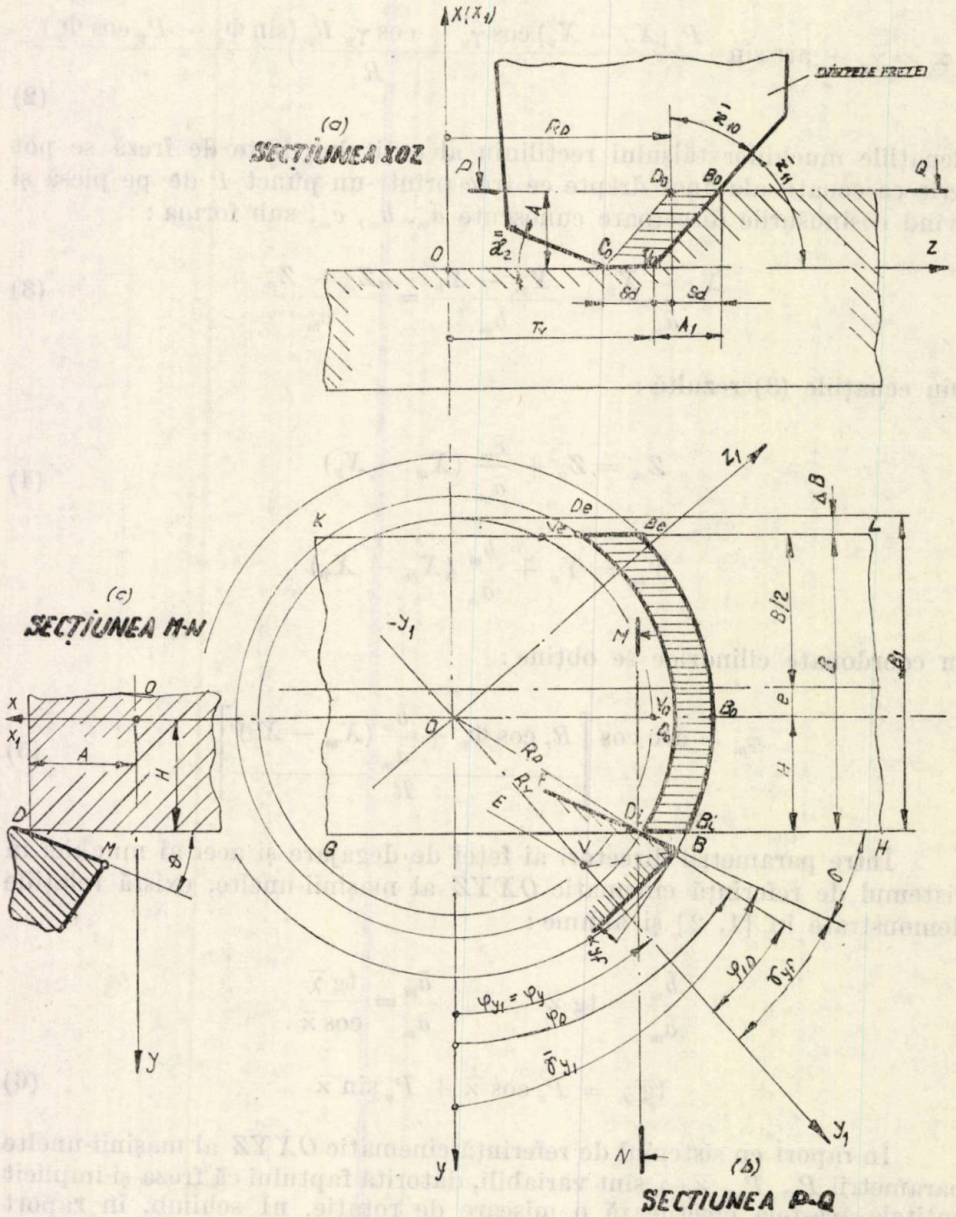


Fig. 4

$$\operatorname{tg}\bar{\lambda} = \frac{c_x \cos\varkappa + c_y \sin\varkappa + c_z \operatorname{tg}\lambda}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\lambda - (c_x \cos\varkappa + c_y \sin\varkappa + c_z \operatorname{tg}\lambda)^2}}$$

$$P_{x_1} = \frac{P_x a_x + P_y b_y - c_x}{c_z - P_x a_z - P_y b_z} = -\operatorname{tg}\gamma_s \tag{7}$$

$$P_{y_1} = \frac{P_x a_y + P_y b_y - c_y}{c_z - P_x a_z - P_y b_z} = \operatorname{tg}\gamma_s$$

Valorile cosinusurilor directoare ale axelor sistemului de referință $OX_1Y_1Z_1$ față de sistemul de referință $OXYZ$ desprinse din analizarea fig. 4. sînt următoarele:

$$\begin{aligned} a_x &= 1 \\ b_x &= c_x = a_y = a_z = 0 \\ b_y &= c_z = \cos\varphi_v \\ c_y &= \sin\varphi_v \\ b_z &= -\sin\varphi_v \end{aligned} \tag{8}$$

Înlocuind valorile (8) în relațiile (7) se obțin succesiv:

$$\operatorname{tg}\bar{\varkappa}_1 = \frac{\sin\bar{\varkappa}\cos\varphi_v - \sin\varphi_v \operatorname{tg}\bar{\lambda}}{\cos\bar{\varkappa}}$$

$$\operatorname{tg}\bar{\lambda}_1 = \frac{\sin\varphi_v \,.\, \sin\bar{\varkappa} + \cos\varphi_v \operatorname{tg}\bar{\lambda}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\bar{\lambda} - (\sin\varphi_v \sin\bar{\varkappa} + \cos\varphi_v \operatorname{tg}\bar{\lambda})^2}}$$

$$P_{x_1} = \frac{P_x}{\cos\varphi_v + P_y \sin\varphi_v} = \frac{-\operatorname{tg}\bar{\gamma}_x}{\cos\varphi_v + \operatorname{tg}\bar{\gamma}_y \sin\varphi_v} = -\frac{\cos\bar{\gamma}\operatorname{tg}\bar{\gamma}_x}{\cos(\bar{\gamma}_y - \varphi_v)} \tag{9}$$

sau

$$\operatorname{tg}\bar{\gamma}_{x_1} = -\frac{\cos\bar{\gamma}_y \operatorname{tg}\bar{\gamma}_x}{\cos(\bar{\gamma}_y - \varphi_v)}$$

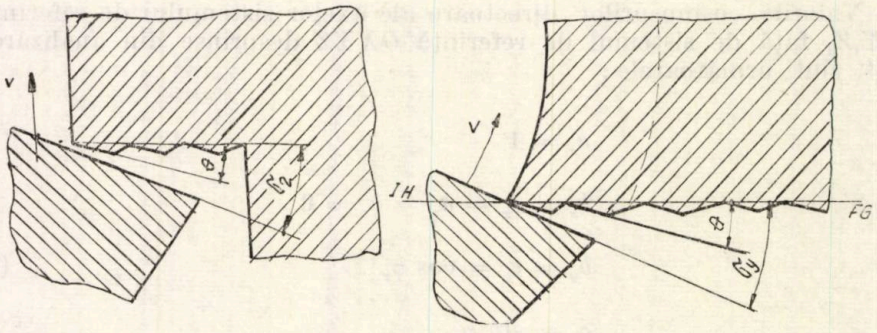
$$P_{y_1} = \frac{P_y \cos\varphi_v - \sin\varphi_v}{\cos\varphi_v + P_y \sin\varphi_v} = \frac{\sin(\bar{\gamma}_y - \varphi_v)}{\cos(\bar{\gamma}_y - \varphi_v)} = \operatorname{tg}\bar{\gamma}_{y_1}$$

Unghiul $\bar{\gamma}_y$ este unghiul de degajare în planele secante $Y-Y(X=$ $=$const) în raport cu axa OY, iar unghiul $\bar{\gamma}_{y_1}$, unghiul de degajare în aceleași plane secante însă în raport cu axa OY_1 (fig. 4b).

Unghiul $\bar{\bar{\varkappa}}_1$ (fig. 4) este complementar cu $\bar{\bar{\varkappa}}$

Unghiul φ_v este unghiul polar făcut de axa OY, OY_1 pe care se găseşte vîrful V al tăişului.

Unghiurile $\bar{\gamma}_y$ şi $\bar{\gamma}_{y1}$ depind de tipul impactului, în sensul că la impactul în C şi D unghiul $\bar{\gamma}_y$ are aloarea $\bar{\gamma}_y \neq \frac{\pi}{2} - \tau$ iar la impactul în V şi B, $\bar{\gamma}_y = \frac{\pi}{2} + \sigma^0$ unde σ^0 are valori cuprinse între 5—6° (fig. 5).



Fig, 5

Unghiul φ_v depinde de asemenea de tipul impactului şi se poate determina cu ajutorul relaţiei (5) în care se vor înlocui coordonatele X_p, R_p şi Φ_p, cu valorile corespunzătoare punctului de impact considerat, iar X şi R cu coordonatele punctului $V(X = X_v = 0$ şi $R = R_v)$. Pentru exemplificare în cazul impactului în punctul D_i căruia îi corespund $\left(x_p = x_{Di} = A \right) Y_D = Y_{Di} = H$; $R_p = R_D$; $\cos \Phi_p = \cos \Phi_{Di} = \frac{H}{R_D}\Big)$ unghiul φ_v are următoarea expresie:

$$(\varphi_v)_{Di} = \arccos \frac{H \,.\, a_m - A b_m}{a_m \,.\, R_v} \tag{10}$$

care permite definirea completă a expresiilor unghiurilor pasive ale tăişului (v. rel. 9) în raport cu sistemul de referinţă $OX_1Y_1Z_1$ al frezei.

Valoarea unghiului pasiv $\bar{\varkappa}$ din relaţiile (9) poate fi determinată cunoscînd că: $\bar{\varkappa} = \frac{\pi}{2} - \bar{\bar{\varkappa}}$ (v. fig. 4) şi alegînd un unghi activ, $\bar{\bar{\varkappa}}$, convenabil.

Valorile parametrilor P_x şi P_y din aceleaşi relaţii (9) se determină astfel încît tăişul să aşchieze cu unghiuri de degajare active $\bar{\bar{\gamma}}$ cît mai apropiate de valorile optime recomandate pentru materialul respectiv (din lucrările de teoria aşchierii). Astfel, punîndu-se condiţiile ca în punctul

de pe parcursul de aşchiere în care secţiunea de aşchie este maximă $\left(\text{la } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ tăişul să fie înclinat cu unghiul de degajare optim $\bar{\bar{\gamma}}_{opt}$ şi ca în punctul de impact preconizat să se formeze unghiurile σ şi θ (v. fig. 4) cu orientările şi modulele necesare, se determină mai întîi o valoare $P_{v_0} = \operatorname{tg} \bar{\gamma}_{v_0}$ pentru punctul cu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, iar apoi pentru fiecare punct de impact B_i, D_i, V_i, Ci valorile $P_{y\,Bi}$, $P_{y\,Di}$ etc, parametri ce satisfac condiţiile anterioare.

Conform celor cunoscute [1], se obţin succesiv:

$$u_x = 0\,;\; u_y = -\,v_p \sin\varphi\,;\; u_z = v_p \cos\varphi + s.n$$

relaţii care devin apoi (v [1] form. 2.2);

$$a_u = 0\,;\; b_u = -\frac{v_p}{u}\sin\varphi\,;\quad c_u = \frac{v_p\cos\varphi}{u} + \frac{w_z}{u}$$

sau altfel notat

$$a_u = 0\,;\; b_u = -v_{Pu}\sin\varphi\,;\; c_u = v_{Pu}\cos\varphi + w_{zu}$$

în care

$$v_{Pu} = \frac{v_p}{u} \qquad w_{zu} = \frac{w_z}{u} \text{ ştiut fiind că } s.n = w_z$$

Cosinusurile directoare permit determinarea unghiului de degajare activ optim, unghi care după cum se va vedea poate fi explicitat pentru fiecare punct de contact în parte.

Plecînd de la relaţiile 5.2. [1] se obţine:

$$\cos\bar{\bar{\gamma}}_{opt} = \frac{v_{Pu}\,.\cos\varphi_{max} + w_{zu} + v_{Pu}\,.\sin\varphi_{max}\,.\,P_y}{\sqrt{1 + P_x^2 + P_y^2}} \tag{11}$$

care cu notaţiile $P_x = P_y \operatorname{tg}\theta$ şi $\varphi_{a\,max} = \frac{\pi}{2}$ devine

$$\cos\bar{\bar{\gamma}}_{opt} = \frac{w_{zu} + P_y v_{Pu}}{\sqrt{1+P_y^2(1+\operatorname{tg}^2\theta)}} = \frac{(w_{zu} + v_{Pu})\,P_y.\cos\Theta}{\sqrt{\cos^2\Theta + P_y^2}} \tag{12}$$

sau explicitînd pe P_y obţinem:

$$P_{y_0} = \frac{\cos\gamma\,.\cos\Theta}{\sqrt{(w_{zu} + v_{Pu})\cos^2\Theta - \cos^2\gamma}} \tag{13}$$

Relaţia de legătură $P_x = P_y \operatorname{tg} \Theta$ s-a determinat prin intersectarea planului feţei de degajare (1) cu un plan $Z = Z_p = \text{const.}$ (plan în care avem mărimea reală a unghiului Θ. Astfel a fost obţinută dreapta $D-M$ (v. fig—4) de ecuaţie

$$Y = Y_p - \frac{P_x}{P_y}(X - X_p)$$

pentru care

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dY}{dX} = -\frac{P_x}{P_y}$$

deci

$$P_x = -P_y \operatorname{tg} \Theta \tag{14}$$

Unghiul Θ fiind pozitiv în cazul impactului în punctele C_i şi V_i: şi negativ pentru impactul în punctele B_i şi D_i, pot fi determinate şi celelalte valori ale lui P_x după cum rezultă din tabelul 1.

După cum rezultă din figura 6 datorită rotirii din B în B_0 faţă de degajare are unghiuri $\bar{\gamma}_y$ diferite ($\bar{\gamma}_{y_0}$ şi $\bar{\gamma}_{B_i}$) relaţia dintre acestea reeşind

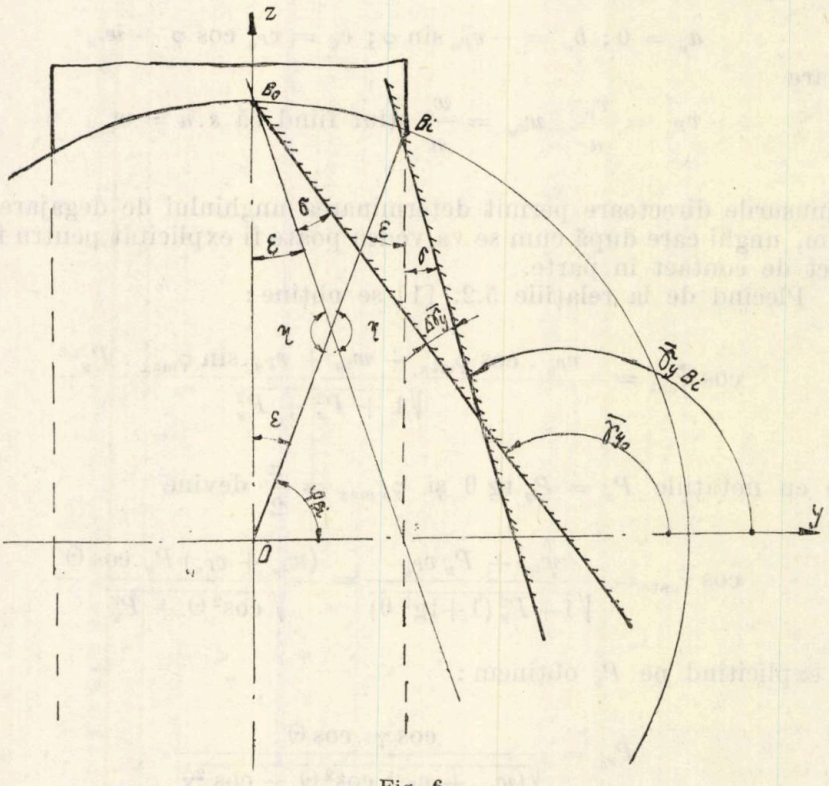


Fig. 6

Tabelul 1

Tipul de impact	V_i	C_i	B_i	D_i	linia $V_i - C_i$	linia $B_i - D_i$	linia $V_i - B_i$	linia $C_i - D_i$
θ	+	+	−	−	+	−	0	0
P_x	$-P_y \mathrm{tg}\theta$	$-P_y \mathrm{tg}\theta$	$+P_y \mathrm{tg}\theta$	$+P_y \mathrm{tg}\theta$	$-P_y \mathrm{tg}\theta$	$+P_y \mathrm{tg}\theta$	0	0

chiar din figură, astfel:

$$\bar{\gamma}_{yBi} = \bar{\gamma}_{y0} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{Bi}\right) \tag{15}$$

totodată se observă că

$$\bar{\gamma}_{yBi} = \frac{\pi}{2} + \sigma \tag{16}$$

Aceste două relaţii se pot extinde pentru toate tipurile de impact (v. tab. 2).

Tabelul 2

Tipul de impact	γ_y (φ_a)	γ_y (σ)	$P_{xi} = \pm \mathrm{tg}\gamma_{yi}\mathrm{tg}\theta$
B_i	$\bar{\gamma}_{yBi} = \bar{\gamma} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{Bi}\right)$	$\bar{\gamma}_{yBi} = \frac{\pi}{2} + \sigma$ $P_{y_{Bi}} = -\mathrm{ctg}\,\sigma$	$P_{x_{Bi}} = -\mathrm{ctg}\sigma.\,\mathrm{tg}\theta$
V_i	$\bar{\gamma}_{yV_i} = \bar{\gamma}_{y_0} - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{Vi}\right)$	$\bar{\gamma}_{yV_i} = \frac{\pi}{2} + \sigma$ $P_{y_{V_i}} = -\mathrm{ctg}\,\sigma$	$P_{x_{Vi}} = -\mathrm{ctg}\,\sigma.\,\mathrm{tg}\theta$
D_i	$\gamma_{yDi} = \gamma_{y0} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{Vi}\right)$	$\bar{\gamma}_{yDi} = \frac{\pi}{2} - \sigma$ $P_{y_{D_i}} = \mathrm{ctg}\,\sigma$	$P_{x_{D_i}} = +\mathrm{ctg}\,\sigma.\,\mathrm{tg}\theta$
C_i	$\bar{\gamma}_{i_{C_i}} = \bar{\gamma}_{x0} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{Ci}\right)$	$\bar{\gamma}_{yCi} = \frac{\pi}{2} - \sigma$ $P_{yCi} = \mathrm{ctg}\,\sigma$	$P_{x_{Ci}} = +\mathrm{ctg}\,\sigma.\,\mathrm{tg}\theta$

Cu rezultatele din tabelele 1 şi 2 şi cu relaţia (11) pot fi determinate unghiurile de degajare active cu care tăişul lucrează pentru fiecare tip de impact precizat.

Pentru exemplificare este prezentat rezultatul, $\bar{\bar{\gamma}}_{Bi}$, corespunzător impactului într-un punct oarecare B_i

$$\cos \bar{\bar{\gamma}}_{Bi} = V_{P_u} \frac{H_i - \sqrt{R_i^2 - H^2}\,\mathrm{ctg}\,\sigma + \dfrac{w_z}{v_P}}{R_i \sqrt{\cos^2 \Theta + \mathrm{ctg}^3\,\sigma}} \cos \Theta \tag{17}$$

(obţinut prin transformarea relaţiei (11) cunoscînd $\cos \varphi_i = \dfrac{H_i}{R_i}$) sau, prin împărţire prin R_v, raza vîrfului V al dintelui obţinînd :

$$\cos \bar{\bar{\gamma}}_{Bi} = v_{Pu} \frac{\dfrac{H}{R_v} - \sqrt{\dfrac{R_i^2}{R_v^2} - \dfrac{H^2}{R_v^2}}\,\mathrm{ctg}\,\sigma + \dfrac{w_z}{v_P}\dfrac{1}{R_v}}{\dfrac{R_i}{R_v}\sqrt{\cos^2 \Theta + \mathrm{ctg}^2\,\sigma}} \cos \Theta \tag{18}$$

Considerîndu-se impactul numai pentru primul dinte care intră în aşchie, relaţia anterioară devine

$$\cos \bar{\bar{\gamma}}_{Bi} = \frac{\dfrac{H}{R_v} - \sqrt{\dfrac{R_i^2}{R_v^2} - \dfrac{H^2}{R_v^2}}\,\mathrm{ctg}\,\sigma}{\dfrac{R_i}{R_v}\sqrt{\cos^2 \Theta + \mathrm{ctg}^2\,\sigma}} \cos \Theta \tag{19}$$

întrucît în acest caz $w_z = 0$ respectiv $v_p = u$ deci $v_{pu} = 1$.

Relaţia (19) permite determinarea unghiului de degajare activ pentru fiecare tip de impact (linie sau punct) funcţie de raportul $\dfrac{H}{R_v}$ în urma înlocuirilor lui R_i cu R_B, R_D, R_C sau R_v. Unghiurile σ şi θ se aleg din literatură între 5° şi 6°. Relaţia a fost modelată pe calculator rezultatele fiind ilustrate de fig. 7.

Concluzii

Din diagrama prezentată în figura 7 rezultă, că valoarea unghiului $\bar{\bar{\gamma}}$ se menţine aproximativ constantă pentru valorile (0, 1 ... 0,9) ale raportului $\dfrac{H}{R_v}$.

Se observă de asemenea, că în cazul raportului $\frac{H}{R_v} \geqslant 0{,}9$ se obțin valori pentru unghiul $\bar{\bar{\gamma}}$, care variază în limite foarte largi ($-8° \ldots +45°$), corespunzătoare unor condiții de așchiere defavorabile.

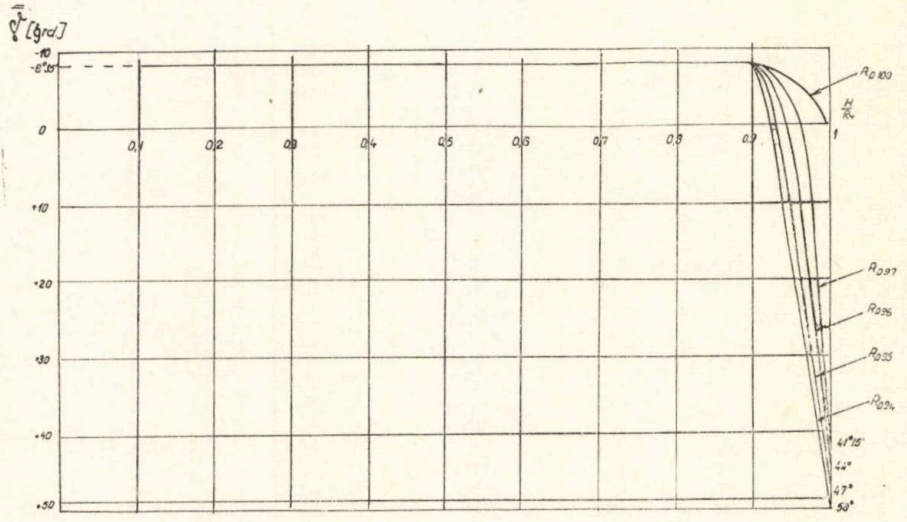


Fig. 7

Valoarea unghiului $\bar{\bar{\gamma}}$ ($-8°35'$) corespunde cazului frezării cu o freză frontală cu dinți demontabili, armați cu plăcuțe din aliaj dur și pentru materiale a căror $\sigma_r = 30 \ldots 100$ daN/mm^2.

Cu această valoare a unghiului $\bar{\bar{\gamma}}$ ($\simeq -8°$) se vor determina valorile unghiurilor de degajare constructive (γ_{yi}) pentru condițiile de impact alese în funcție de mărimea raportului H/R_v, folosind relațiile cunoscute din lucrarea [1].

Aceste valori vor servi la stabilirea geometriei optime a frezei, pentru diferite poziții de lucru a frezei în raport cu piesa de prelucrat, sau la alegerea poziției optime pentru o geometrie dată a frezei, în scopul obținerii unui impact cît mai puțin defavorabil.

Catedra de tehnologia construcțiilor de mașini și mașini-unelte și scule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București.

BIBLIOGRAFIE

1. *Duca, Z.* — Teoria sculelor așchietoare, Editura Tehnică, București 1967.
2. *Duca, Z.* — Bazele teoretice ale prelucrării pe mașini-unelte. Ed. Didactică și Pedagogică, Buc. 1969.
3. *Duca, Z.* — Contribuție la calculul geometriei frezelor frontale cu cuțite demontabile. Constr. de mașini 19 nr. 4 1967
4. *Șișcov, V. D.*— Optimalnoe raspolojenie zogotovki otnositelne tverdesplavnoi torțovoi frezî. Stanki i instrument, nr. 6, 1969

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

AUTOMATICĂ

C. Z.: 681.31

PROGRAMUL ACENC — PENTRU ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRONICE NELINIARE IN CURENT CONTINUU *

IRINA ATHANASIU

În ultimii ani folosirea calculatoarelor a produs mari schimbări în metodele de analiză și proiectare a circuitelor electronice. Utilizarea calculatoarelor s-a impus mai ales pentru proiectarea circuitelor integrate unde verificările experimentale sînt foarte costisitoare, și nu se pot face decît măsurători exterioare ale performanțelor circuitului.

Modul uzual de folosire a calculatorului în proiectarea unui circuit electronic este următorul:

— se alege o configurație de circuit considerată optimă pentru performanțele impuse, se elaborează pe baza unor calcule aproximative soluția posibilă și apoi se realizează analiza circuitului cu ajutorul unor programe de analiză c. c., c. a. și de regim tranzitoriu, obținîndu-se performanțele acestei soluții inițiale; pe baza experienței sale proiectantul modifică valorile elementelor schemei și procesul se repetă pînă se obțin performanțele dorite pentru circuit.

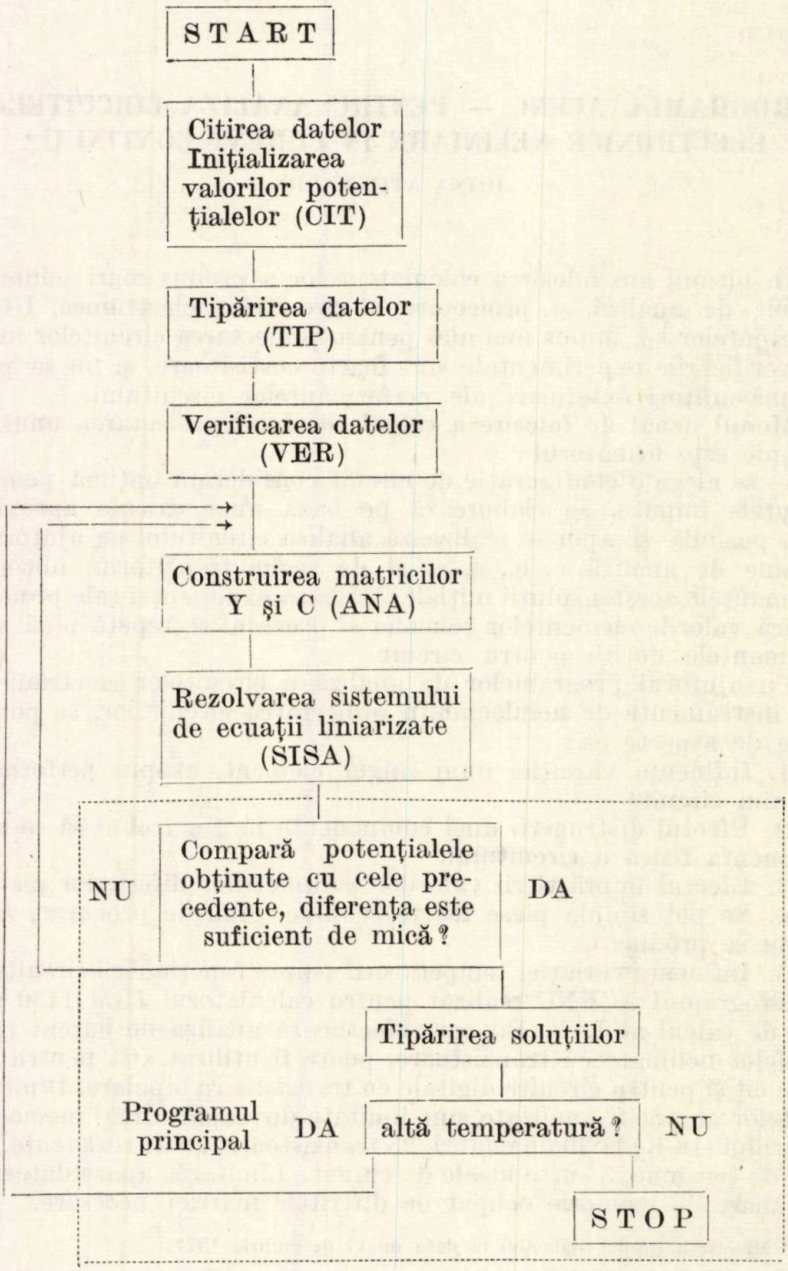
Cu ajutorul programelor de analiză a circuitelor electronice, care devin instrumente de neînlocuit în proiectarea circuitelor, se pot studia o serie de aspecte ca:

1. Influența variației unui singur element, asupra performanțelor întregului circuit.
2. Efectul distrugerii unei componente fără a trebui să se distrugă componenta fizică a circuitului.
3. Efectul împrăștierii valorilor parametrilor diferitelor piese.
4. Se pot simula piese foarte scumpe, greu de procurat, sau care încă nu se produc.
5. Influența variației temperaturii asupra funcționării circuitului etc.

Programul ACENC realizat pentru calculatorul IBM 1130 al Centrului de calcul al I. P. B., care efectuează analiza de curent continuu a rețelelor neliniare cu tranzistoare, poate fi utilizat atît pentru circuite lineare cît și pentru circuite digitale cu tranzistoare bipolare. Dimensiunile circuitelor ce pot fi analizate sînt limitate de capacitatea memoriei calculatorului (16 K) la 30 de noduri, 23 tranzistoare, 20 de rezistențe, 6 surse ideale de tensiune, 3 surse ideale de curent. Limitarea apare datorită spațiului mare de memorie ocupat de diferitele matrici necesare.

* Manuscris predat redacției la data de 17 decembrie 1971.

Astfel matricea admitanţelor de scurt circuit ale circuitului analizat, ocupă 2700 cuvinte, iar pentru memorarea datelor care caracterizează un tranzistor se folosesc aproximativ 300 de cuvinte, deci 6900 de cuvinte pentru toate tranzistoarele.



Programul este format din două părți : prima parte realizează introducerea datelor circuitului (numărul și performanțele tranzistoarelor, a rezistențelor, a surselor de tensiune și curent, modul de interconectare a acestora, temperaturile la care se va face analiza) și diferite teste asupra corectitudinii acestora, a doua parte a programului realizează prelucrarea datelor, rezultatele care se obțin sînt potențialele în toate nodurile circuitului și punctele de funcționare ale tranzistoarelor.

Introducerea și prelucrarea inițială a datelor se face cu ajutorul a 3 subprograme : CIT, TIP și VER.

În subprogramul CIT se citesc datele circuitului, se organizează o serie de tablouri necesare în continuare, se face o verificare a corectitudinii datelor, și se inițializează valorile potențialelor la noduri.

Subprogramul TIP tipărește datele circuitului, așa cum au fost ele interpretate de către subprogramul CIT. În acest fel utilizatorul poate urmări valorile pe baza cărora se fac calculele următoare.

Subprogramul VER verifică dacă numerotarea nodurilor s-a făcut corect, dacă au apărut erori de numerotare, se tipăresc mesaje corespunzătoare și execuția programului este oprită.

Prelucrarea datelor se face cu ajutorul subprogramelor : ANA și SISA.

Modelul de tranzistor folosit este cel descris în [1], model ce pornește de la ecuațiile Ebers Moll, ecuații ce sînt liniarizate într-un punct de funcționare considerat inițial. (acest punct de funcționare poate fi ales de utilizator sau asumat de către program, $V_{BE} = \pm 0.5$ V și $V_{BC} = 0$ pentru tranzistoare cu siliciu sau $V_{BE} = \pm 0.2$ V și $V_{BC} = 0$ pentru tranzistoare cu germaniu — NPN, PNP).

Se calculează parametrii tranzistorului pe baza ecuațiilor liniarizate, cu aceste valori completîndu-se matricea admitanțelor de scurtcircuit. Deoarece analiza se poate face la diferite temperaturi (maximum 5), pentru $BETA_n$, $BETA_i$ și pentru rezistențe se introduc coeficienți de temperatură de ordinul întîi și doi, determinîndu-se pentru temperatura la care se face analiza valoarea corespunzătoare în funcție de valoarea la temperatura de referință : 300°K.

Construirea matricilor : admitanțe de scurtcircuit și curenți de scurtcircuit, se face cu subprogramul ANA.

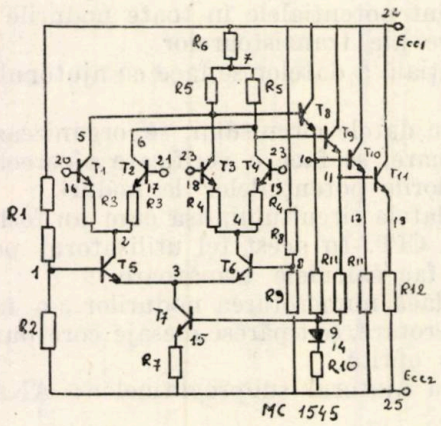
Cu matricile obținute s-a determinat de fapt sistemul de ecuații al potențialelor la noduri pentru circuitul analizat. Ecuațiile obținute fiind liniare, rezolvarea sistemului se face cu ajutorul metodei Gauss Jordan în subprogramul SISA. Se obțin noi valori pentru punctele de funcțiune ale tranzistoarelor. Aceste valori vor sta la baza unei noi liniarizări a modelului tranzistorului folosită în iterația următoare.

Procesul se repetă, pînă cînd pentru 3 iterații consecutive diferențele, care se obțin între valorile potențialelor rezultate, sînt mai mici de ± 1 mV. Cu aceste valori se determină punctele de funcționare ale tranzistoarelor, parametrii gm, r_{bc} care pot folosi pentru analiza în frecvență, și se stabilesc regimurile în care lucrează tranzistoarele pornind de la definițiile Ebers Moll.

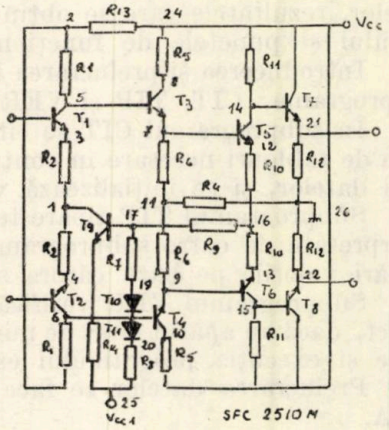
După ce se tipăresc aceste date, dacă analiza se face la mai multe temperaturi, se reinițializează valorile potențialelor și se reia procesul pentru temperatura următoare.

Programul a fost încercat pentru circuite de diferite dimensiuni. Pentru exemplificare prezentăm rezultatele obținute în analiza circuitelor integrate MC 1545 și SFC 2510 M

Circuitul MC 1545



Circuitul SFC 2510 M



Catedra de calculatoare
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *William J. Mc. Calla, William G. Howard Jr.*, — A Program for the Nonlinear DC Analysis of Bipolar Transistor Circuits, IEEE Journal of Solid-state Circuits, 1971 february.

CIRCUITUL MC 1545

TRANZISTOARE

NUMELE	NODURILE			TIP	BETA DIRECT	BETA INVERS	COEFICIENȚI DE TEMPERATURĂ
T1	5	20	16	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T2	6	21	17	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T3	5	22	18	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T4	6	23	19	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T5	2	1	3	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T6	4	8	3	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T7	3	9	15	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T8	24	5	10	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T9	24	6	11	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T10	24	10	12	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T11	24	11	13	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E
T12	9	9	14	NPN	50.00	1.00	0.60E−02 0.60E−02 0.00E 00 0.00E

REZISTENȚE

NUMELE	NODURILE		VALOAREA	COEFICIENȚI DE TEMPERATURĂ
R1	1	24	0.103E 02	0.200E−02 0.000E 00
R2	1	25	0.380E 01	0.200E−02 0.000E 00
R3	2	17	0.200E−01	0.200E−02 0.000E 00
R3	2	16	0.200E−01	0.200E−02 0.000E 00
R4	4	18	0.200E−01	0.200E−02 0.000E 00

R4	4	19	0.200E−01	0.200E−02	0.000E 00
R5	5	7	0.100E 01	0.200E−02	0.000E 00
R5	6	7	0.100E 01	0.200E−02	0.000E 00
R6	7	24	0.850E 00	0.200E−02	0.000E 00
R7	15	25	0.190E 00	0.200E−02	0.000E 00
R8	8	25	0.400E 01	0.200E−02	0.000E 00
R9	8	24	0.150E 02	0.200E−02	0.000E 00
R10	14	25	0.500E 00	0.200E−02	0.000E 00
R11	9	10	0.900E 01	0.200E−02	0.000E 00
R11	9	11	0.900E 01	0.200E−02	0.000E 00
R12	12	25	0.500E 01	0.200E−02	0.000E 00
R12	13	25	0.500E 01	0.200E−02	0.000E 00

SURSE DE TENSIUNE

NUMELE	VALOARE	NODUL
V1	0.000	20
V2	0.000	21
V3	0.000	22
V4	0.000	23
EC1	5.000	24
EC2	−5.000	25

Rezultatele obținute pentru circuitul integrat MC 1545 sînt date mai jos.

TEMPERATURA	NR. DE ITERATII
0. 30000E 03	18

VALOAREA POTENTIALELOR

V(1) = −0.24430E 01
V(2) = −0.68472E 00
V(3) = −0.31213E 01
V(4) = −0.21516E 00
V(5) = −0.16778E 01
V(6) = −0.16778E 01
V(7) = −0.29082E 01
V(8) = −0.28947E 01
V(9) = −0.38294E 01
V(10) = −0.10385E 01
V(11) = −0.10385E 01
V(12) = −0.38245E 00
V(13) = −0.38245E 00
V(14) = −0.44844E 01
V(15) = −0.45082E 01
V(16) = −0.65984E 00
V(17) = −0.65984E 00
V(18) = −0.21516E 00
V(19) = −0.21516E 00
V(20) = −0.00000E 00
V(21) = −0.00000E 00
V(22) = −0.00000E 00
V(23) = −0.00000E 00
V(24) = −0.50000E 01
V(25) = −0.50000E 01

PUNCTELE STATICE DE FUNCȚIONARE ALE TRANZISTOARELOR

TRAN-ZISTOR	IB	VBE	IC	VCE	BETA	GM	RPI	
T1	0.2438E−01	0.659847	0.12193E 01	2.337729	50.000	0.47E 02	0.10599E 01	T1 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T2	0.2438E−01	0.659847	0.12193E 01	2.337729	50.000	0.47E 02	0.10599E 01	T2 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T3	0.8139E−09	0.215161	0.41215E 07	1.893044	50.000	0.15E−05	0.31366E 08	T3 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T4	0.8139E−09	0.315161	0.41215E 07	1.893044	50.000	0.15E−05	0.31366E 08	T4 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T5	0.4975E−01	0.678276	0.24875E 01	2.436622	50.000	0.96E 02	0.51956E 00	T5 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T6	0.1272E−08	0.226607	0.64169E 07	2.906182	50.000	0.24E−05	0.20144E 08	T6 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T7	0.5074E−01	0.678788	0.25373E 01	1.386923	50.000	0.98E 02	0.50938E 00	T7 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T8	0.1101E−01	0.639312	0.55098E 00	3.961429	50.000	0.21E 02	0.23457E 01	T8 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T9	0.1101E−01	0.639312	0.55098E 00	3.961429	50.000	0.21E 02	0.23457E 01	T9 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T10	0.2110E−01	0.656113	0.10553E 01	4.617542	50.000	0.40E 02	0.12246E 01	T10 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T11	0.2110E−01	0.656113	0.10553E 01	4.617542	50.000	0.40E 02	0.12246E 01	T11 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T12	0.2021E−01	0.654998	0.10108E 01	0.654998	50.000	0.39E 02	0.12786E 01	T12 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ

AMPLIFICATORUL SFC 2510M

TRANZISTOARE

NUMELE	NODURILE			TIP	BETA DIRECT	BETA INVERS	COEFICIENȚI DE TEMPERATURĂ		
T1	5	26	3	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T2	6	26	4	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T3	8	5	7	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T4	10	6	9	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T5	14	7	12	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T6	15	9	13	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T7	24	14	21	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T8	24	15	22	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T9	1	17	18	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T10	19	19	23	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E
T11	23	23	20	NPN	50.00	1.00	0.60E−02	0.60E−02	0.00E 00 0.00E

REZISTENȚE

NUMELE	NODURILE		VALOAREA	COEFICIENȚI DE TEMPERATURĂ	
R1	5	2	0.860E 00	0.000E 00	0.000E 00
R1	6	2	0.860E 00	0.000E 00	0.000E 00
R2	4	1	0.420E−01	0.000E 00	0.000E 00
R5	8	24	0.400E 00	0.000E 00	0.000E 00
R5	10	24	0.400E 00	0.000E 00	0.000E 00
R6	11	7	0.780E 00	0.000E 00	0.000E 00
R6	11	9	0.780E 00	0.000E 00	0.000E 00
R8	20	25	0.200E 00	0.000E 00	0.000E 00
R9	16	17	0.470E 00	0.000E 00	0.000E 00
R10	13	16	0.450E−01	0.000E 00	0.000E 00
R10	12	16	0.450E−01	0.000E 00	0.000E 00
R11	14	24	0.100E 01	0.000E 00	0.000E 00
R11	15	24	0.100E 01	0.000E 00	0.000E 00
R12	21	26	0.100E 01	0.000E 00	0.000E 00
R12	22	26	0.100E 01	0.000E 00	0.000E 00
R13	2	24	0.500E 00	0.000E 00	0.000E 00
R14	18	25	0.500E 00	0.000E 00	0.000E 00
R7	17	19	0.170E 00	0.000E 00	0.000E 00
R4	11	26	0.100E−03	0.000E 00	0.000E 00

SURSE DE TENSIUNE

NUMELE	VALOARE	NODUL
VCC	−6.000	25
VCC1	6.000	24
MASA	0.000	26

Pentru amplificatorul de bandă largă SFC 2510M s-au obținut rezultatele de mai jos

TEMPERATURA
0.30000E 03

NR. DE ITERAȚII
8

VALOAREA POTENTIALELOR

V(1) = −0.77972E 00
V(2) = −0.31238E 01
V(3) = −0.67699E 00
V(4) = −0.67699E 00
V(5) = −0.10626E 01
V(6) = −0.10626E 01
V(7) = −0.42144E 00
V(8) = −0.57627E 01
V(9) = −0.42144E 00
V(10) = −0.57627E 01
V(11) = −0.10803E−03
V(12) = −0.25671E 00
V(13) = −0.25671E 00
V(14) = −0.34352E 01
V(15) = −0.34352E 01
V(16) = −0.37183E 00
V(17) = −0.27766E 01
V(18) = −0.34724E 01
V(19) = −0.36188E 01
V(20) = −0.50092E 01
V(21) = −0.27552E 01
V(22) = −0.27552E 01
V(23) = −0.43140E 01
V(24) = −0.60000E 01
V(25) = −0.60000E 01
V(26) = −0.00000E 00

PUNCTELE STATICE DE FUNCȚIONARE ALE TRANZISTOARELOR

TRAN-ZISTOR	IB	VBE	IC	VCE	BETA	GM	RPI	
T1	0.4835E−01	0.677541	0.24178E 01	1.676062	50.000	0.93E 02	0.53454E 00	T1 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T2	0.4835E−01	0.677541	0.24178E 01	1.676063	50.000	0.93E 02	0.53454E 00	T2 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T3	0.1005E−01	0.636936	0.50259E 00	5.437371	50.000	0.19E 02	0.25715E 01	T3 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T4	0.1005E−01	0.636937	0.50260E 00	5.437370	50.000	0.19E 02	0.25714E 01	T4 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T5	0.4921E−01	0.677994	0.24606E 01	3.800912	50.000	0.95E 02	0.52526E 00	T5 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T6	0.4921E−01	0.677993	0.24605E 01	3.800907	50.000	095E 02	0.52527E 00	T6 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T7	0.5497E−01	0.680856	0.27486E 01	3.196353	50.000	0.10E 03	0.47020E 00	T7 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T8	0.5497E−01	0.680856	0.27486E 01	3.196357	50.000	0.10E 03	0.47021E 00	T8 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T9	0.9864E−01	0.695970	0.49324E 01	2.703347	50.000	0.19E 03	0.26203E 00	T9 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T10	0.9648E−01	0.695398	0.48243E 01	0.695398	50.000	0.18E 03	0.26790E 00	T10 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ
T11	0.9648E−01	0.695398	0.48243E 01	0.695398	50.000	0.18E 03	0.26790E 00	T11 ESTE ÎN REGIUNEA ACTIVĂ NORMALĂ

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

ELECTRONICĂ

C. Z.: 517.512.3

METODĂ DE ANALIZĂ A SISTEMELOR CU PARAMETRII DISTRIBUIȚI LUCRÎND ÎN REGIM STAȚIONAR

DUMITRU STANOMIR

1. Obiectul problemei

Analiza sistemelor cu parametrii distribuiţi se face în mod exact folosind ecuaţiile cu derivate parţiale. Există situaţii cînd comportarea sistemului cu parametri distribuiţi se poate reduce la aceea a unui sistem cu parametri concentraţi, convenabil ales. Aceasta este posibil, după cum se va arăta mai jos, atunci cînd sînt îndeplinite următoarele două condiţii :

— structura soluţiei este separabilă

$$u = u_1(t)u_2(\bar{r}),$$

— se poate considera că

$$u_2(\bar{r}) \simeq \text{constant}.$$

Mai sus t reprezintă timpul iar $\bar{r}$ vectorul de poziţie.

Privitor la prima condiţie se poate deduce imediat că aceasta are loc atunci cînd sitemul are pierderi mici şi lucrează deci în regim foarte aproape de regimul staţionar. În ceea ce priveşte a doua condiţie, constanţa structurii spaţiale are loc într-un domeniu de frecvenţă care trebuie precizat de la caz la caz. Mai trebuie observat că în cadrul ipotezelor de mai sus atît u cît şi derivata acestuia în raport cu timpul au structură separabilă cu aceeaşi repartiţie spaţială.

Problema a fost tratată pe bază energetică de Furduev [1] şi de Skudrzyk [2] introducîndu-se circuitul echivalent cu constante concentrate. În tratările citate nu rezultă suficient de limpede expresiile coeficienţilor de referinţă.

În lucrarea de faţă se utilizează o formă completă de scriere a ecuaţiilor lui Lagrange de speţa a doua precum şi o formă specială de scriere a Lagrangianului, anume o formă mediată, pe baza cărora coeficienţii de referinţă apar în mod natural. Mai mult în cazul sistemelor

* Manuscris predat redacţiei la data de 17 iunie 1971

acustice este posibil să se deducă două tipuri de circuite echivalente cu parametrii concentraţi.

Metoda propusă se aplică pentru sisteme mecanice, acustice şi electrice. Prin cîteva exemple se va ilustra eficacitatea metodei propuse.

2. Ecuaţiile lui Lagrange de speţa a II-a

Se ştie [3] că un sistem mecanic poate fi descris prin ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua. Dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

— sistemul este olonom,

— oscilaţiile au loc în jurul unei poziţii de echilibru stabil şi sînt de amplitudine mică,

— există un potenţial Π care generează forţele de tip potenţial,

— forţele disipative derivă dintr-un potenţial disipativ,

— forţele exterioare nu depind de vitezele şi de deplasările din sistem, atunci ecuaţiile de evoluţie se scriu sub forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial q_i} \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{1}$$

În (1) s-a notat prin

— N, numărul de coordonate generalizate,

— T, energia cinetică, (2)

— Π, energia potenţială,

— $\mathcal{R}$, potenţialul disipativ Rayleigh,

— $\mathcal{L}_e$, lucrul mecanic al forţelor exterioare efectuat după coordonatele generalizate.

Ideea metodei propuse este următoarea. Evoluţia unui sistem care satisface presupunerile din paragraful 1 poate fi cunoscută dacă a fost determinată evoluţia în timp a unor puncte particulare din sistem deoarece, forma de repartiţie a amplitudinilor din sistem este invariantă $u_2(\bar{r})$. Obţinerea ecuaţiilor de evoluţie pentru punctele particulare din sistem, denumite *puncte de referinţă*, se face pe bază energetică, echivalînd energia totală a sistemului cu aceea a unui sistem cu parametri concentraţi.

Metoda se poate aplica unui sistem complex constituit din mai multe subsisteme staţionate. Problema dificilă este de a găsi distribuţiile staţionare compatibile cu condiţiile la limită ale sistemului.

Se va dezvolta metoda pentru cîteva cazuri de importanţă aplicativă.

3. Sisteme unidimensionale

Se consideră un sistem uniform pe porţiuni pentru care deplasarea şi viteza sînt de forma

$$\xi_k(x, t) = \xi_{1k}(x)\, \xi_{2k}(t) \tag{3}$$

$$v_k(x, t) = v_{1k}(x)\, v_{2k}(t).$$

Este util să se pună (3) sub forma

$$\xi_k(x,t) = y_{ok}(t) f_k(x) \tag{3'}$$

$$v_k(x,t) = \dot{y}_{ok}(t) f_k(x)$$

în care $y_{ok}(t)$ este deplasarea punctului de referință de abscisă x_{ok} din porțiunea de ordin k (singura restricție este ca $y_{ok}(t)$ să nu fie identic nul) iar $f_k(x)$ este *funcția de distribuție a deplasării* care satisface

$$f_k(x_{ok}) = 1. \tag{4}$$

În virtutea presupunerilor făcute mai sus rezultă că viteza are aceeași funcție de distribuție ca și deplasarea.

Pentru a aplica metoda este necesar să se deducă expresiile funcțiilor energetice în funcție de deplasările si vitezele punctelor de referință precum și de funcția de distribuție mediată.

Energia cinetică corespunzătoare unei anumite porțiuni se exprimă

$$T_k = \frac{1}{2}\int_0^{l_k} \varepsilon_k (\dot{y}_{ok} f_k)^2 \, dx$$

Notînd

$$b_k = \frac{1}{l_k}\int_0^{l_k} f_k^2 \, dx \tag{5}$$

se obține

$$T_k = \frac{1}{2} M_{ok} \dot{y}_{ok}^2 \tag{6}$$

Mărimea M_{ok} este *masa raportată în punctul* x_{ok} și are expresia

$$M_{ok} = b_k M_k \tag{7}$$

în care M_k este masa proprie a porțiunii k

$$M_k = \varepsilon_k l_k. \tag{8}$$

Prin ε_k a fost notată masa lineică a porțiunii k. S-a presupus că ε_k este constant.

Energia potențială nu are o formă explicitabilă deoarece ea depinde de structura operatorului diferdțial asociat forțelor de restbilire. În orice caz energia potențială a porțiunii k, evaluată în presupunerile de mai sus, se poate pune sub forma

$$\Pi_k = \frac{1}{2}\frac{1}{C_{mok}} y_{ok}^2 \tag{9}$$

în care C_{mok} este *elasticitatea raportată în punctul* x_{ok}.

Potențialul Reyleigh se expimă

$$\mathcal{R}_k = \frac{1}{2}\int_0^{l_k} R_{mk}^{(1)}(\dot{y}_{ok}f_k)^2\,dx$$

sau

$$\mathcal{R}_k = \frac{1}{2} R_{mok}\dot{y}_{ok}^2 \tag{10}$$

Mărimea R_{mok} este rezistența mecanică raportată în punctul x_{ok} și are expresia

$$R_{mok} = b_k R_{mk} \tag{11}$$

în care R_{mk} este rezistența mecanică proprie a porțiunii k

$$R_{mk} = R_{mk}^{(1)} l_k \tag{12}$$

Mai sus $R_{mk}^{(1)}$ este rezistența mecanică lineică și a fost presupusă constantă.

În sfîrșit lucrul mecanic al forțelor exterioare este dat de

$$\mathcal{L}_e \equiv \int_0^{l_k} F_k^{(1)}(y_{ok}f_k)\,dx$$

sau

$$\mathcal{L}_e = F_{ok}y_{ok} \tag{13}$$

Mărimea F_{ok} este forța raportată în punctul x_{dk} și are expresia

$$F_{ok} = a_k F_k = a_k F_k^{(1)} l \tag{14}$$

în care F_k este forța aplicată porțiunii k iar a_k este dat de

$$a_k = \frac{1}{l_k}\int_0^{l_k} f_k\,dx \tag{15}$$

Se observă că funcțiile energetice se exprimă în funcție de deplasările și vitezele punctelor de referință, de parametrii mediului, evaluați în regim static, și de *coeficienții de referință* a_k și b_k.

Odată determinate funcțiile energetice se iau drept coordonate generalizate deplasările punctelor de referință și se obțin ecuațiile de evoluție a unui sistem echivalent cu parametri concentrați.

4. Sisteme unidimensionale. Exemple

Exemplul 1. Fie o bară oscilînd longitudinal pentru care funcțiile energetice T și Π au expresiile

$$T = \frac{1}{2}\rho S\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx, \quad \Pi = \frac{1}{2} ES\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^9 dx$$

Mai sus E este modulul lui Young, S este secțiunea barei iar l este lungimea.

Dacă bara lucrează în regim de undă staționară în $\lambda/2$ cu terminație de liber la ambele capete atunci funcția de repartiție a deplasării este

$$f(g) = \sin\frac{\pi x}{l}, \quad x \in \left[-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}\right] \tag{16}$$

Situația este arătată în figura 1

Se observă că punctul de referință în acest caz este deplasarea unuia din cele două capete.

Calculînd cele două funcții energetice pentru $f(x)$ dat de (16) se obține

$$T = \frac{1}{2}\frac{\rho Sl}{2}\dot{y}_0^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} ES\frac{\pi^2}{2l}.$$

Dacă la unul din capete este conectată o rezistență mecanică concentrată R_{mo} potențialul Rayleigh corespunzător este

$$\frac{1}{2} R_{mo}\dot{y}_0^2.$$

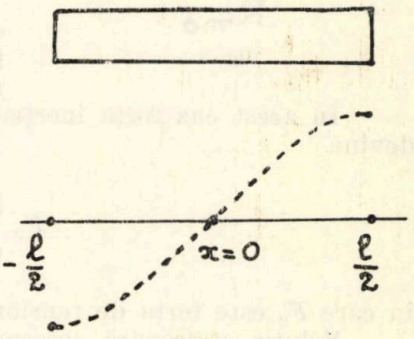


Fig. 1.

Se obține ecuația de evoluție

$$M_0\frac{d^2y_0}{dt^2} + R_{mo}\frac{dy_0}{dt} + \frac{1}{C_{mo}} y_0 = 0$$

în care

$$M_0 = \rho\frac{lS}{2}, \quad C_{mo} = \frac{2}{\pi^2}\frac{l}{ES}.$$

Ținînd seama că elementele statice ale barei sînt

$$M = \rho lS, \quad C_m = \frac{l}{ES}$$

rezultă că masa echivalentă la unul din capete este jumătate din masa statică a berei iar elasticitatea echivalentă la unul din capete este egală cu elasticitatea statică înmulțită cu $2/\pi^2$.

Circuitul electric echivaent de tip I corespunzător sistemului este dat în figura 2.

Frecvenţa de rezonanţă a circuitului serie echivalent este tocmai frecvenţa de rezonanţă în $\lambda/2$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{M_0 C_{mo}}} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{l}c$$

Factorul de calitate al circuitului se exprimă

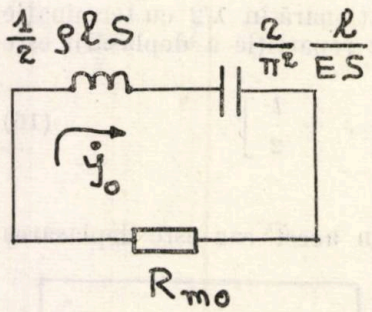


Fig. 2.

$$Q = \frac{M_0\omega_0}{R_{mo}} = \frac{\pi}{2}\frac{\rho c S}{R_{mo}}$$

Distribuţia folosită este suficient de exactă dacă sistemul lucrează la Q-uri mari, situaţie care are loc în cazul vibratorilor ultrasonori funcţionînd într-un mediu lichid.

Exemplul 2. Se consideră o coardă elastică, fixtă la cele două capete, acţionată de o forţă lineică $F^{(1)}$ şi funcţionînd în regim cuazistatic.

În acest caz forţa inerţială este neglijabilă iar ecuaţia de mişcare devine

$$F_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -F^{(1)}$$

în care F_0 este forţa de tensionare a coardei.

Soluţia staţionară corespunzătoare este

$$\xi = \left[1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2\right] y_0/(t)$$

luînd ca origină a axelor mijlocul coardei.

Rezultă imediat

$$f(x) = \left[1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2\right] \tag{17}$$

în care punctul de referinţă este $x = 0$.

Folosind (17) se obţine

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{16}{30}, \quad \int_{-l/2}^{+l/2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx = \frac{16}{3}\frac{1}{l}$$

și rezultă pentru funcțiile energetice expresiile

$$T = \frac{1}{2}\int f^2 dx = \frac{1}{2}\frac{16}{30}\varepsilon l y_0^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2}F_0\int\left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{16}{3}\frac{F_0}{l}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}R_m^{(1)}\int f^2 dx = \frac{1}{2}\frac{16}{30}R_m^{(1)} l$$

$$\mathcal{L}_e \equiv \int F^{(1)} f dx = \frac{1}{3}F^{(1)} l$$

Se deduce imediat că circuitul electric echivalent de tip I este un circuit serie cu elementele

$$M_0 = \frac{16}{30}\varepsilon l,\ C_{mo} = \frac{3}{16}\frac{l}{F_0},\quad R_{mo} = \frac{16}{30}R_m^{(1)} l$$

alimentat de un generator de tensiune de amplitudine (1/3) $F^{(1)}l$.

Situația este arătată în figura 3.

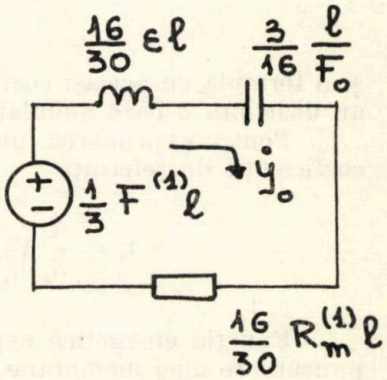


Fig. 3.

În legătură cu funcționarea transductoarelor la care elementul mecanic are oscilație neuniformă trebuie să fie făcută următoarea observație. Factorul de cuplaj electromecanic efectiv care leagă curentul și tensiunea de viteza și deplasarea în punctul de referință are o expresie modificată față de situația cînd deplasarea și viteza sînt uniforme. În mod obișnuit tocmai în această din urmă situație este evaluat factorul de cuplaj. Pentru determinarea factorului de cuplaj efectiv pentru sistemul considerat se evaluează tensiunea electrică indusă în coardă cînd aceasta se găsește într-un cîmp de inducție B. Se presupune că materialul din care este confecționată coarda este metalic. Se obține

$$u = \int Bv\,dx = B\dot{y}_0\int f\,dx = \frac{1}{3}Bly_0.$$

Din relația de mai sus se deduce

$$k_{1e} = \frac{1}{3}k_1,\quad k_1 = Bl, \tag{18}$$

din care rezultă că factorul de cuplaj efectiv k_{1e} este o treime din factorul de cuplaj k_1, evaluat în ipoteza unei deplasări uniforme.

Tot din relaţiile mai sus deduse rezultă că impedanţa electrică de mişcare, văzută în partea electrică, este dată de

$$Z_M = \frac{k_{1e}^2}{Z_{ma}} \tag{19}$$

în care

$$Z_{mo} = R_{mo} + j\omega M_0 + \frac{1}{j\omega C_{mo}}.$$

5. Sisteme mixte mecano-acustice

Al doilea tip de sisteme pentru care metoda propusă este avantajoasă sînt sistemele mixte mecano-acustice, constituie din volume de aer mărginite de membrane. Forţele de restabilire în acest caz depind numai de variaţiile relative de volum. Exprimarea funcţiilor energetice se poate face în acest caz atît funcţie de deplasările şi vitezele punctelor de referinţă cît şi funcţie de vitezele şi deplasările volumice. Deplasarea volumică corespunzătoare suprafeţei S_k se exprimă

$$\tilde{u}_k = \int_{S_k} y_{ok} f_k \, ds = y_{ok} a_k S_k \tag{20}$$

şi o formulă cu aceiaşi coeficienţi pentru viteza volumică. Mărimile care au deasupra o bară ondulată se numesc mărimi mediate.

Pentru exprimarea funcţiilor energetice este necesar să se introducă coeficienţii de referinţă

$$a_k = \frac{1}{S_k}\int_{S_k} f(S)\, ds, \qquad b_k = \frac{1}{S_k}\int_{S_k} f^2(S)\, ds \tag{21}$$

Funcţia energetică exprimabilă imediat este energia cinetică corespunzătoare unei membrane (energie cinetică de natură mecanică)

$$T_k = \frac{1}{2}\int_{S_k} \sigma (y_{ok} f_k)^2 \, ds.$$

în care σ este masa superficială, presupusă constantă.

Notînd cu $M_k = \sigma S_k$, masa statică, energia cinetică se scrie mai departe

$$T_k = \frac{1}{2} M_{ok} \dot{y}_{ok} = \frac{1}{2} \tilde{M}_{ak} \dot{\tilde{u}}_k^2$$

în care

$$M_{ok} = M_k b_k, \qquad \tilde{M}_{ak} = M_k \frac{b_k}{a_k^2} \frac{1}{\dot{S}_k^2} \tag{22}$$

Mai sus M_{ok} este *masa raportată în punctul* x_{ok} de pe membrană iar M_{ak} este *masa acustică mediată.*

Energia potențială, de natură mecanică, a membranei se poate exprima în virtutea observațiilor de la paragraful 2 sub forma

$$\frac{1}{2}\frac{1}{C_{mok}}y_{ok}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\check{C}_{ak}}\tilde{u}^2 \tag{22}$$

Mărimea C_{mok} reprezintă *elasticitatea raportată în punctul* x_{dk} iar C_{ak} este *elasticitatea mediată.* Ele sînt legate prin relația

$$\check{C}_{ak} = C_{mok}a_k^2 S_k^2.$$

Al doilea tip de energie potențială care intervine în cazul sistemelor de față este energia potențială de comprimare a unui volum. Această energie este proporțională cu patratul sumei algebrice a tuturor deplasărilor volumice medii care intră în volumul considerat. Pentru a nu complica notațiile se consideră că volumul Ω are două deschideri cu deplasările volumice medii u_1 și respectiv u_2. Rezultă

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2}\frac{\gamma P_0}{\Omega}[\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2]^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\gamma P_0}{\Omega}[y_{o1}a_1S_1 + y_{o2}a_2S_2]^2\end{aligned} \tag{23}$$

Mai sus γ reprezintă constanta adiabatică a gazelor iar P_0 este presiunea statică.

Efectul de radiație a membranelor se manifestă prin prezența a doi termeni : un termen de tip disipativ, legat de puterea medie radiată și un termen cinetic. În cazul deplasărilor constante, uniforme, exprimarea acestor termeni nu prezintă nici o dificultate. În cazul deplasărilor neuniforme problema este mai complexă. Soluția exactă a problemei se poate obține evaluînd puterea complexă de radiație corespunzătoare deplasării considerate. Expresia generală corespunzătoare este

$$\mathfrak{Z}_c = AS_0Z_cV_o^2 + jBS_oZ_cV_o^2$$

în care A și B sînt constante fără dimensiuni, S_o este suprafața membranei, Z_c este impedanța caracteristică iar V_o este viteza unui punct de pe membrană. Pentru deplasare uniformă

$$A = R_r', \quad B = X_r'$$

care sînt tocmai rezistența de radiație și reactanța de radiație raportate. Ținînd seama că în domeniul lungimilor de undă mari reactanța de radia-

ţie raportată este proporţională cu frecvenţa, puterea complexă se mai scrie

$$\mathcal{Z}_c = k_1 R_r' S_d Z_c V_o^2 + j k_2 (\Delta l)\, S_o \rho_o \omega V_o^2$$

în care ρ_0 este masa specifică a aerului. Pentru deplasări uniforme

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Mai sus Δl reprezintă grosimea cilindrului de aer *antrenat*.

Determinarea coeficienţilor k_1 şi k_2 este dificilă în cazul general. Se ştie însă că în domeniul lungimilor de undă mari puterea medie radiată de o suprafaţă oarecare este proporţională cu patratul debitului. Rezultă

$$k_1 = a^2.$$

În ceea ce priveşte coeficientul k_2 mărimea sa depinde atît de distribuţie cît şi de condiţiile de radiaţie. În general mărimea sa este cuprinsă între a şi a^2. Ţinînd seama că efectul de masă antrenată este legat de cîmpul din apropiere se poate considera că

$$k_2 = a.$$

Ţinînd seama de cele arătate mai sus rezultă că energia cinetică de radiaţie are expresia

$$T = \frac{1}{2} (a \Delta l S_0)\, \rho_0 \dot{y}_o^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \Delta l}{a S_o} \dot{\tilde{u}}^2 \tag{24}$$

iar termenul disipativ se scrie

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} (a R')\, S_o Z_c \dot{y}_o^2 = \frac{1}{2} \frac{R_r'}{S_o} Z_c\, \dot{\tilde{u}}^2. \tag{25}$$

În sfîrşit lucrul mecanic mediu efectuat de forţele exterioare, date prin presiuni, de mărime constantă, se scrie

$$\mathcal{L}_{ek} = \int_{S_k} p_k y_{ok} f\, ds = f_{ok} y_{ok} = p_k \tilde{u}_k \tag{26}$$

în care

$$f_{ok} = p_k S_{ok} a_k.$$

În cazul cînd în mediu are loc frecare de viscozitate potenţialul disipativ se deduce prin integrarea produsului dintre rezistenţa pe unitatea de volum, viteza la pătrat şi elementul de volum.

Pentru ilustrarea metodei de constituire a funcțiilor energetice acestea sînt prezentate sinoptic în tabelel 1 și 2.

Tabelul 1

Structura funcțiilor energetice mediate pentru sisteme cu constante distribuită unidimensionale

Energia cinetică	$T_k = \frac{1}{2} M_{ok} \dot{y}_{ok}^2$	$M_{ok} = M_k b_k$
Energia potențială	$\Pi_k = \frac{1}{2} \frac{1}{C_{mok}} y_{ok}^2$	—
Potențialul disipativ	$\mathcal{R}_k = \frac{1}{2} R_{mok} \dot{y}_{ok}^2$	$R_{mok} = R_{mk}^{(1)} l_k b_k$
Lucrul mecanic exterior	$\mathcal{L}_{ck} = F_{ok} y_{ok}$	$F_{ok} = F_{mk}^{(1)} l_k a_k$
$a_k = \frac{2}{l_k} \int_0^{l_k} f_k \, dx$	$b_k = \frac{1}{l_k} \int_0^{l_k} f_k^2 dx$	$M_k = \varepsilon_k l_k$

Tabelul 2

Structura funcțiilor energetice mediate pentru sisteme mixte mecanoacustice

Funcția energetică	Exprimarea în y_{ok} și $\dot{y}_{ok}$	Exprimarea în $\tilde{u}_k$ și $\dot{\tilde{u}}_k$
Energia cinetică mecanică	$\frac{1}{2} M_{ok} \dot{y}_{ok}^2$ $M_{ok} = M_k b_k$	$\frac{1}{2} \widetilde{M}_{ak} \dot{\tilde{u}}_k^2$ $\widetilde{M}_{ak} = M_k b_k / a_k^2 S_k^2$
Energia cinetică de radiație	$\frac{1}{2} \rho_0 (a_k \Delta l_k S_k) \dot{y}_{ok}^2$	$\frac{1}{2} \left[\frac{S_o \Delta l_k}{a_k S_k} \right] \dot{\tilde{u}}_k^2$
Energia potențială mecanică	$\frac{1}{2} \frac{1}{C_{mok}} y_{ok}^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\widetilde{C}_{ak}} \dot{\tilde{u}}_k^2$ $\widetilde{C}_{ak} = C_{moc} a_k^2 S_k^2$
Energia potențială de comprimare	$\frac{1}{2} \frac{\gamma P_0}{\Omega_k} [\sum a_k S_k y_{oj}]^2$	$\frac{1}{2} \frac{\gamma P_0}{\Omega_k} [\sum \tilde{u}_j]^2$
Potențialul disipativ de radiație	$\frac{1}{2} (a_k^2 R'_{rk}) S_k Z_c \dot{y}_{0k}^2$	$\frac{1}{2} \left[\frac{R'_{rk}}{S_k} \right] \dot{\tilde{u}}^2$
Lucrul mecanic exterior	$p_k y_{ok} a_k S_k$	$p_k \tilde{u}_k$
$a_k = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} f ds$	$b_k = \frac{1}{S_k} \int_{S_k} f^2 ds$	$M_k = \sigma_k S_k$

Din cele arătate mai sus rezultă că pentru un sistem mixt mecanoacustic se pot constitui un ansamblu de funcții energetice exprimabile fie în funcție de vitezele și deplasările punctelor de referință fie în funcție de vitezele și deplasările medii ale membranelor.

În prima variantă se iau drept coordonate generalizate vitezele și deplasările punctelor de referință. Aplicînd procedeul descris în paragraful 1 se obține un sistem de ecuații care este modelat în analogia de tip I prin *circuitul electric echivalent de tip I în impedanțe mecanice*. În acest circuit generatoarele echivalente de tensiune sînt forțele echivalente în punctele de referință, F_{ek}, curenții echivalenți sînt vitezele punctelor de referință, $\dot{y}_{ok}$, iar impedanțele electrice echivalente sînt impedanțele mecanice raportate în punctele de referință, Z_{mok}.

În a doua variantă se iau drept coordonate generalizate vitezele și deplasările medii. Aplicînd procedeul descris în paragraful 1 se obține un sistem de ecuații care este modelat, în analogia de tip I, de *circuitul electric echivalent de tip I în impedanțe acustice mediate*. În acest circuit generatoarele echivalente de tensiune sînt presiunile aplicate, p_k, curenții sînt vitezele volumice medii, $\dot{\tilde{u}}_k$, iar impedanțele echivalente sînt impedanțele acustice mediate, $\tilde{Z}_{ak}$. Rețeaua obținută nu conține transformatoare.

În lumina celor arătate mai sus rezultă că trecerea de la circuitul electric echivalent de tip I, în impedanțe mecanice referite la anumite puncte se face după cum se arată mai jos.

$$\begin{aligned} p_k &\text{ se înlocuiește cu } p_k S_i a_i \\ \dot{\tilde{u}}_k &\text{ se înlocuiește cu } \dot{\tilde{u}}_k / S_i a_i \\ \tilde{Z}_{ak} &\text{ se înlocuiește cu } \tilde{Z}_{ak}/(S_i a_i)^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Trebuie observat că formulele de trecere conduc la circuitul electric echivalent de tip I, în impedanțe mecanice, raportat la secțiunea S_i, deoarece, a se vedea [3], circuitul echivalent în impedanțe mecanice pentru sistemele mixte conține transformatoare ideale cu rapoarte de transformare egale cu raportul secțiunilor corespunzătoare. Formulele (27) sînt o generalizare a formulelor de trecere pentru deplasare constantă date de autorul acestei lucrări.

6. Sisteme mixte mecano-acustice. Exemple

Exemplul I. Se consideră un microfon condensator a cărui schiță de principiu este dată în figura 4. Membrana este circulară și este tensionată cu o forță pe unitatea de lungime $F_1[N/m]$. Densitatea a fost notată cu δ iar aria cu S_0. Distanța dintre electrodul fix și cel mobil este notată cu d_0. În electrodul fix este practicat un orificiu de comunicație între aerul din spatele membranei și aerul dintr-o cavitate de volum Ω. Pe aceeași figură sînt arătate liniile de viteză. Ținînd seama de direcția liniilor de viteză rezultă că aerul din spatele membranei se comportă ca un element fricțional complex caracterizabil printr-o rezistență complexă de viscozitate, raportată la unitatea de volum. Efectul elastic de comprimare se manifestă în incinta de volum Ω.

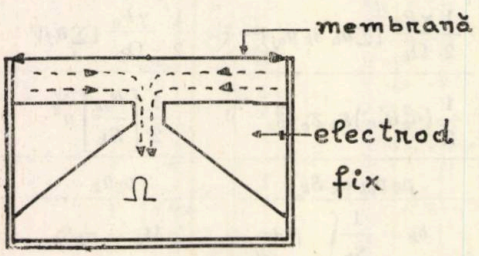


Fig. 4.

Pe baza teoriei mai sus dezvoltată rezultă următoarele expresii pentru funcțiile energetice

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0 \Delta l}{aS_o} + \frac{\delta h}{S_o}\frac{b}{a^2} + \frac{M_{av}}{a^2}\right]\dot{\tilde{u}}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\breve{C}_a} + \frac{\gamma P_0}{\Omega}\right]\tilde{u}^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\left[R_r'\frac{Z_c}{S_o} + \frac{1}{a^2}R_{av}\right]\dot{\tilde{u}}^2 \quad \mathcal{E}_e = p\tilde{u}.$$

S-a presupus că energia medie datorită efectului de viscozitate a fost pusă sub forma

— puterea medie disipată

$$\frac{1}{2}R_{av}S_o^2V_o^2$$

— energia cinetică medie

$$\frac{1}{2}M_{av}S_o^2V_o^2.$$

Rezultă ecuația de mișcare

$$\left[\frac{\rho_d \Delta l}{aS_o} + \frac{h}{S_d}\frac{b}{a^2} + \frac{M_{av}}{a^2}\right]\ddot{\tilde{u}} + \left[\frac{R_r'Z_c}{S_o} + \frac{R_{av}}{a^2}\right]\dot{\tilde{u}} + \left[\frac{1}{\breve{C}_a} + \frac{\gamma P_o}{\Omega}\right]\tilde{u} = p \tag{28}$$

Pentru obținerea parametrilor circuitului este necesar să fie determinați coeficienții de referință. În acest scop se ține seama că microfonul condensator are frecvența de rezonanță a echipajului mobil la capătul superior al benzii de frecvență de lucru. De aceea se poate lua drept funcție de repartiție soluția de regim cuazistatic

$$\xi = \frac{pr_o^2}{4F_1}\left[1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right]y_o(t) \tag{28}$$

în care r_0 este raza membranei iar r raza vectoare dusă din centru. Pentru acest tip de funcție de repartiție se obține

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3}. \tag{29}$$

Pentru determinarea elasticității C_a se ține seama că energia potențială este dată de

$$\Pi = \frac{1}{2} F_1 \int_{S_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 ds.$$

Efectuînd calculele se obține

$$C_{mo} = \frac{1}{2\pi F_1} .$$

din care rezultă

$$C_a = \frac{S_o^2}{8\pi F_1} .$$

Circuitul electric echivalent de tip I, în impedanțe acustice mediate, este dat în figura 5.

În exemplele tratate în paragraful 4 s-a arătat că distribuția neuniformă a deplasării conduce la modificarea factorului de cuplaj electromecanic al unui transductor electromecanic. Pentru evaluarea factorului

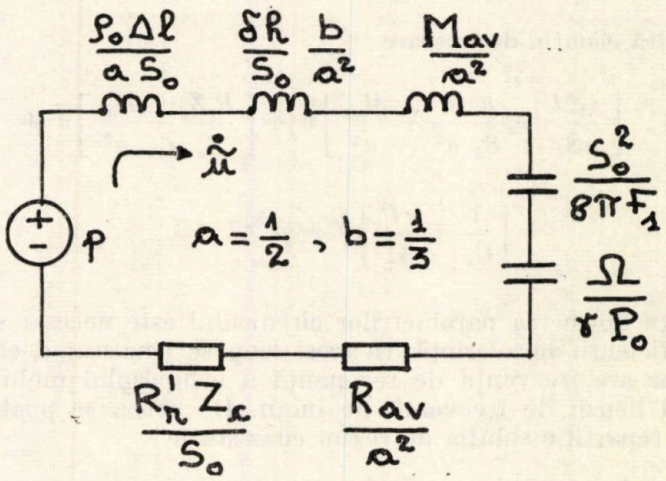


Fig. 5.

de cuplaj efectic al unui transductor de tip electrostatic se consideră schița de principiu, dată în figura 6, în care este figurată deplasarea electrodului mobil (se presupune că deplasarea are simetrie radială). Capacitatea elementară corespunzătoare unui inel este dată de

$$dC = \frac{\varepsilon_o ds}{d_0} \left[1 + \frac{y_o}{d_0} f(r) \right], \quad y_o \ll d_o.$$

Notînd cu U_0 tensiunea electrică de polarizare se obține prin integrare sarcina electrică totală din circuitul exterior

$$Q = U_0 \int_{S_0} dC = U_0 C_0 + E_0 C_a y_0 a.$$

unde C_0 este capacitatea statică a condensatorului iar E_0 cîmpul electric de polarizare. Rezultă că factorul electromecanic este

$$k = E_0 C_0 a.$$

Prin urmare factorul de cuplaj de la viteza punctului de referință, centrul membranei, la tensiunea electrică indusă este nu $E_0 C_0$ ca în

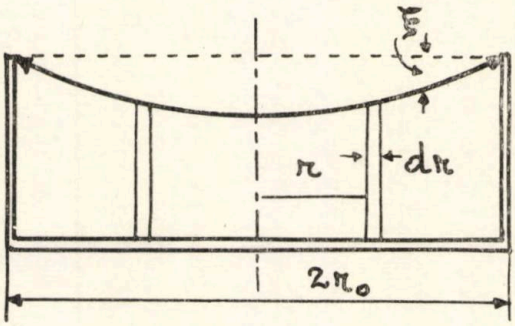


Fig. 6.

cazul deplasării uniforme ci $E_0 C_0 a$. Dacă se urmărește evaluarea factorului de cuplaj de la deplasarea medie la tensiunea electrică indusă atunci factorul de cuplaj este $E_0 C_0 / S_0$. Se observă din cele arătate că modul de lucru natural în cazul sistemelor mecano-acustice cu deplasare neuniformă este acela în care se utilizează impedanțele acustice mediate.

Catedra de radiocomunicații
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Furduev, V.*, V. Elektroakustica i zvukovoe veşcianie. Moskva, Sviaziizdat, 1960.
2. *Skudrzyk, E.* Die Grunlagen der Akustik. Wien, Springer Verlag, 1954.
3. *Stanomir, D.* Electroacustică. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
4. *Stanomir, D.* Reducerea parametrilor echivalenți concentrați pentru sistemele acustice cu parametri distribuiți folosind o formă modificată a Lagrangianului. Telecomunicații, nr. 11, 1969,

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

TRANSPORTURI

C. Z.: 629.11

ASUPRA STABILITĂȚII LA PERTURBAȚII MICI A MIȘCĂRII CIRCULARE A AUTOMOBILULUI CU DIFERENȚIAL AUTOBLOCABIL*

AUREL P. STOICESCU

În literatură, stabilitatea mișcării circulare a automobilului cu diferențial autoblocabil a fost studiată numai în situațiile limită de derapare [2, 3, 4, 5]. În aceste lucrări s-a determinat de fapt raza de viraj la care se produce patinarea roților motoare sau deraparea uneia din punți, fără să se țină seama de elasticitatea laterală a pneurilor.

La automobilele cu diferențial normal pot apărea regimuri de mișcare instabilă înainte de a se ajunge la situațiile limită de derapare [6], ceea ce atrage atenția necesității de a considera aspecte asemănătoare și la automobilele cu diferențiale autoblocabile.

Studiul complet al stabilității la perturbații mici la deplasarea pe un cerc a automobilului cu diferențial autoblocabil trebuie să cuprindă următoarele situații:

a) diferențialul blocat atît în mișcarea de bază cît și în mișcarea perturbată;

b) diferențial blocat în mișcarea de bază, dar deblocat în mișcarea perturbată;

c) diferențialul deblocat atît în mișcarea de bază, cît și în mișcarea perturbată.

Studiul stabilității mișcării în situațiile b) și c) conduce la un sistem de trei ecuații diferențiale cu trei necunoscute pentru mișcarea perturbată, viteza fiind considerată ca variabilă controlată. Examinarea sub formă generală a acestui sistem practic nu se poate face întrucît mărimile ce definesc regimul de bază au expresii destul de complicate. Examinarea pentru cazurile concrete, cu date numerice, este posibilă, deși volumul calculelor este mare.

În lucrarea de față se studiază stabilitatea la perturbații mici a mișcării circulare a automobilului cu diferențial autoblocabil, în situația cînd acesta rămîne blocat atît în mișcarea de bază, cît și în mișcarea perturbată. În afară de determinarea condițiilor de stabilitate se va evidenția posibilitatea principială de a determina pe cale experimentală viteza critică a automobilului cu diferențial autoblocabil.

Se va considera modelul automobilului fără ruliu, al cărui mecanism de direcție este presupus rigid. De asemenea, ecuațiile de mișcare se vor

* Manuscris predat redacției la data de 24 decembrie 1971.

deduce în ipoteza liniarității caracteristicilor de deviere ale pneurilor. Se va considera că roţile motoare sînt cele de la puntea din spate.

În lucrare se vor folosi următoarele notaţii principale

a, b — distanţa de la centrul de greutate al automobilului pînă la planul normal pe cale ce trece prin axa punţii din faţă, respectiv prin axa punţii din spate, m;

L — ampatamentul, m

B_1, B_2 — calea roţilor din faţă, respectiv din spate, m;

n — distanţa de la punctul de intersecţie al axei pivotului cu calea pînă la dreapta ce trece prin centrul petei de contact a pneului şi este perpendiculară pe planul longitudinal de simetrie al automobilului (cînd roţile sînt nevirate), m;

R — raza de virare a automobilului, m;

r'_{20}, r''_{20} — razele libere de rulare ale roţilor din spate de pe partea dreaptă, respectiv stînga, privind în sensul de mers al automobilului, m;

$$\Delta r_0 = r'_{20} - r''_{20}, \text{ m};$$

$$r^m_{20} = 0{,}5\,(r'_{20} + r''_{20}), \text{ m};$$

$\overline{v}$ — viteza centrului de greutate al automobilului, $m \cdot s^{-1}$;

α — unghiul de deviere dintre $\overline{v}$ şi axa longitudinală a automobilului, rad;

β — unghiul mediu de virare al roţilor directoare, rad.;

ν — unghiul de convergenţă al roţilor directoare, rad.;

ω — viteza unghiulară a axei longitudinale a automobilului, $rad.s^{-1}$;

m — masa automobilului, $kgf.m^{-1}.s^2$;

I_z — momentul de inerţie al automobilului în raport cu axa normală pe cale ce trece prin centrul de greutate, $kgf.ms^2$

G — greutatea automobilului, kgf;

X_2 — reacţiunea tangenţială la puntea motoare, kgf;

Z_1 — reacţiunea normală a căii la puntea din faţă, kgf;

c_1, c_2 — coeficientul de rezistenţă la deviere al punţii din faţă, respectiv al punţii din spate, $kgf.rad^{-1}$.

c_{m_1} c_{m_2} — coeficientul momentului stabilizator total al pneurilor punţii din faţă, respectiv din spate, $kgf.m.rad^{-1}$;

k_{x_0} — factorul aerodinamic pe direcţia axei paralele cu calea ce trece prin centrul de greutate al automobilului şi este conţinută în planul longitudinal de simetrie al automobilului, $kgf.m^{-2}.s^2$;

k_x ,k_y — factorul de creştere a forţei aerodinamice respectiv pe direcţia axei precedente şi pe direcţia axei normale la aceasta, într-un plan paralel cu calea, $kgf.m^{-2}.s^2.rad^{-1}$;

k_{m_z} — factorul de creştere a momentului aerodinamic în jurul axei ce trece prin centrul de greutate al automobilului şi este perpendiculară pe planul căii, $kgf.m^{-1}.s^2.rad._{-1}$

λ — coeficientul elasticității tangențiale a pneului m/kgf;
f — coeficientul de rezistență la rulare;
Δ — creșterea unei anumite mărimi.

Punctul de deasupra unei litere desemnează derivata mărimii respective.

De asemenea, se mai folosesc următoarele notații ale diferiților coeficienți sau expresii:

$$a_{11} = mv,\ a_{12} = k_y v^2 + mv + c_1 + c_2,\ a_{13} = mv + \frac{ac_1 - bc_2}{v},$$

$$a_{14} = -c_1,\ a_{21} = I_z,\ a_{22} = -(c_{m_1} + c_{m_6} + nc_1) + ac_1 + k_{mz} v^2 + 0{,}5\, c_1 B_1 \nu,$$

$$a_{23} = \frac{a^2 c_1 + b^2 c_2}{v} + bc_{m_2} - a(c_{m_1} + nc_1) + \frac{c_1 a B_1 \nu}{2v},$$

$$a_{24} = c_{m_1} + nc_1 - ac_1 - 0{,}5\, c_1 B_1 \nu,$$

$$M = Lc_1 c_2 + c_1 c_{m_2} - c_2 c_{m_1},\ M_1 = 0{,}5\, B_2^2 r_{20}^m \lambda^{-1} c_1 + bL\, c_1 c_2 + b(c_1 c_{m2} +$$

$$+ c_2 c_{m_1}),\ P = ac_1 - bc_2 - (c_{m_1} + c_{m_2}),\ P_1 = ac_1 - c_{m_1},$$

$$\Lambda = L^2 c_1 c_2 + L(c_1 c_{m_2} - c_2 c_{m_2}) + 0{,}5\,(c_1 + c_2) B_2^2 r_{20}^m \lambda^{-1}.$$

Pentru scrierea ecuațiilor mișcării perturbate se vor folosi ecuațiile de mișcare ale automobilului cu diferențial autoblocabil, care s-au dedus într-o lucrare anterioară [7]. Considerînd viteza în mișcarea de bază constantă și ca o variabilă controlată [9], pentru un unghi de virare a roților β dat se obțin ecuațiile mișcării perturbate în forma finală:

$$\Delta\dot{\alpha} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta\alpha + \frac{a_{13}}{a_{11}}\Delta\omega = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\dot{\omega} + \left[\frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{0{,}25\, B_2^2\, \omega}{a_{21}\, v}(mv\omega + c_1\beta)\right]\Delta\alpha + \left[\frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5\, B_2^2\, r_{20}^m}{a_{21}\, \lambda\, v} -\right.$$

$$\left. - \frac{0{,}25\, B_2^2\, X_2}{a_{21}\, v} + \frac{0{,}25\, B_2^2}{a_{21}\, v}\left(mv\alpha + \frac{c_1 a\beta}{v}\right)\omega\right]\Delta\omega = 0.$$

Cu metodele cunoscute se obține ecuația caracteristică:

$$\xi^2 + \left[\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5\, B_2^2\, r_{20}^m}{a_{21}\, \lambda\, v} - \frac{0{,}25\, B_2^2\, X_2}{a_{21}\, v} + \frac{0{,}25\, B_2^2\, \omega}{a_{21}\, v}\left(mv\alpha + \frac{c_1 a\beta}{v}\right)\right]\xi +$$

$$+\frac{a_{12}}{a_{11}}\left[\frac{a_{23}}{a_{21}}+\frac{0{,}5\ B_2^2\ r_{20}^m}{a_{21}\ \lambda\ v}-\frac{0{,}25\ B_2^2\ X_2}{a_{21}\ v}+\frac{0{,}25\ B_2^2}{a_{21}\ v}\left(mv\alpha+\frac{c_1 a\beta}{v}\right)\right]-$$

$$-\frac{a_{13}}{a_{11}}\left[\frac{a_{22}}{a_{21}}+\frac{0{,}25\ B_2^2\ \omega}{a_{21}\ v}\ (mv\omega+c_1\beta)\right]=0. \tag{2}$$

Condiţiile de stabilitate Routh-Hurwitz se scriu

$$\frac{a_{12}}{a_{11}}+\frac{a_{23}}{a_{21}}+\frac{0{,}5\ B_2^2\ r_{20}^m}{a_{21}\ \lambda\ v}-\frac{0{,}25\ B_2^2\ X_2}{a_{21}\ v}+\frac{0{,}25\ B_2^2\ \omega}{a_{21}\ v}\left(mv\alpha+\frac{c_1 a\beta}{v}\right)>0$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}}\left[\frac{a_{23}}{a_{21}}+\frac{0{,}5\ B_2^2\ r_{2r}^m}{a_{21}\lambda v}-\frac{0{,}25\ B_2^2\ X_2}{a_{21}\ v}+\frac{0{,}25\ B_2^2\ \omega}{a_{21}\ v}\left(mv\alpha+\frac{c_1\ a\beta}{v}\right)\right]-$$

$$-\frac{a_{13}}{a_{11}}\left[\frac{a_{22}}{a_{21}}+\frac{0{,}25\ B_2^2\ \omega}{a_{21}\ v}(mv\omega+c_1\beta)\right]>0. \tag{3}$$

În relaţiile de mai sus α şi ω au valorile corespunzătoare regimului staţionar la mişcarea în cerc, fiind date de formulele [8]:

$$\alpha=\frac{M_1-mP_1\ v^2}{s\ (v^2)}\cdot\beta,\quad \omega=\frac{M-k_{mz}-k_y\ P_1)\ v^2}{s\ (v^2)\ v^{-1}}, \tag{4}$$

în care $s\ (v^2)$ reprezintă funcţia de stabilitate [7].

Avînd în vedere relaţia $v=\omega R$ şi relaţiile (4) rezultă că α şi ω se pot exprima în funcţie de viteză şi de raza de virare.

Ţinînd seama şi de expresiile coeficienţilor $a_{ij}(i,j=1,\ldots 3)$, după efectuarea calculelor condiţiile (3) capătă forma:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}}+\frac{a_{23}}{a_{21}}+\frac{0{,}5\ B_2^2\ r_{20}^m}{a_{21}\ \lambda\ v}+\frac{0{,}25\ B_2^2}{a_{21}\ v}\cdot\frac{1}{M^2\ R^2}\Big[c_1\ (2a\ M\ \Lambda_1+M_1\ \Lambda_1-\Lambda_1^2)+$$

$$+m\ (2MM_1-2c_1 aMP-c_1\ PM_1+c_1P^2\ \Lambda_1+2c_1\ \Lambda_1 P)\ v^2+$$

$$+m^2\ (-2P_1M+c_1PP_1-c_1P^2)\ v^4]>0.$$

$$\Lambda_1-mPv^2+\frac{0{,}25\ B_2^2}{R^2M^2}\{c_1(c_1+c_2)\ (2aM+M_1-\Lambda_1)\Lambda_1-M\ (ac_1-$$

$$-bc_2)\ c_1\Lambda_1+m\ [-c_1\Lambda_1 M+(ac_1-bc_2)\ (c_1P-M)\ M+(c_1+$$

$$+c_2)\ (2MM_1-2c_1 a\ MP-c_1\ M_1\ P-c_1P_1\Lambda_1+2C_1\ P\ \Lambda_1)]\ v^2+m^2\ [-$$

$$-M^2+c_1\ PM+(c_1+c_2)\ (-2P_1M+C_1PP_1-C_1P^2)]\ v^4\}>0. \tag{5}$$

Se observă că pentru $R \to \infty$ se obțin condițiile cunoscute de la deplasarea în linie dreaptă [7]. În prima condiție s-a neglijat suma $fZ_1 + k_{r_0}v^2$, ca fiind mică în raport cu ceilalți termeni.

Prima inegalitate s-a lăsat sub forma dată mai sus întrucît practic ea este îndeplinită în orice condiții. Pentru verificare, în general este suficient să se compare ultimii termeni, deoarece de regulă suma acestora este pozitivă. Chiar în cazul cînd aceasta este negativă mai există suma primilor doi termeni care întotdeauna este pozitivă. Cele de mai sus sînt confirmate prin calculele numerice efectuate.

Rămîne, deci, ca din cea de a doua condiție să se determine, pentru o rază de viraj dată, viteza critică corespunzătoare. Aprecieri generale cu privire la infuența razei de viraj asupra vitezei critice nu se pot face din cauza expresiei prea complicate a inegalității (5).

De aceea s-a tratat un exemplu numeric pentru un automobil cu supravirare, ale cărui date caracteristice sînt următoarele :

$$m = 163 \text{ kgf.m}^{-1}.s^2,\ L = 2{,}7 \text{ m},\ n = 0,\ a = 0{,}55\text{L},\ b = 0{,}45\text{L},$$

$$\nu = 0,\ \Delta r_0 = 0,\ c_1 = c_2 = 3\,500 \text{ kgf.rad}^{-1},\ c_{m_1} = c_{m_2} = 180 \text{ kgf.m} \cdot$$

$$\cdot \text{ rad}^{-1},\ \lambda = 4.10^{-5} \text{ m/kgf},\ k_{xo} = 4{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ kgf} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2,$$

$$k_y = k_x = 0,\ k_{mz} = 0,\ B_2 = 1{,}42 \text{ m},\ r_{20}^m = 0{,}294 \text{ m},\ f = 0{,}02.$$

După calculul expresiilor intermediare, înlocuirea lor în cea de a doua inegalitate (5) și după ordonarea în raport cu viteza se obține

$$2{,}77\ v^4 + (9{,}52 \cdot R^2 + 7{,}3) \cdot v^2 - (14{,}10\ R^2 + 3{,}3) \cdot 10^3 < 0. \qquad (6)$$

Dacă primul membru al inegalității de mai sus se anulează se obține ecuația unei curbe, care separă planul în două domenii, unul fiind de stabilitate, iar celălalt de nestabilitate. Pe baza ecuației amintite s-a construit curba reprezentată în figura 1 (curba de jos).

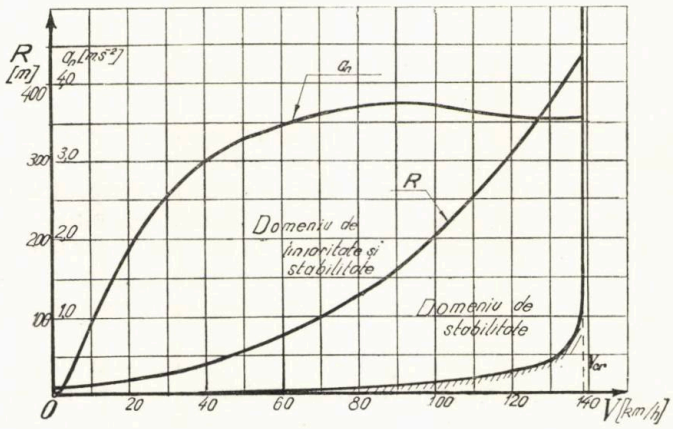


Fig. 1

Relaţiile de pînă acum s-au scris în ipoteza că unghiurile de deviere sînt în zona de liniaritate a caracteristicilor la deviere ale pneurilor. Cu scopul de a putea face aprecieri cu privire la domeniul de valabilitate al consideraţiilor de pînă acum, se va indica metoda pentru delimitarea acestui domeniu.

Pentru aceasta se ţine seamă de relaţiile generale pentru unghiurile de deviere pentru pneurile din faţă şi din spate [1]. Apoi se exprimă α şi ω după formulele din cazul diferenţialului blocat. Cum s-a mai procedat şi pînă acum β se va elimina prin considerarea variabilei R. După calcule simple se obţine

$$\alpha_1 = \frac{\Lambda_1 - M_1 - aM + m(P_1 - P)v^2}{M} \cdot \frac{1}{R}, \tag{7}$$

$$\alpha^2 = \frac{bM - M_1 + mP_1 v^2}{M} \cdot \frac{1}{R}. \tag{8}$$

Dacă α_{1_e} şi α_{2_e} sînt unghiurile la limita zonei de liniaritate respectiv pentru pneurile din faţă şi din spate, atunci domeniul de liniaritate este determinat de condiţiile

$$\begin{aligned} |\Lambda_1 - M_1 - aM + m(P_1 - P)v^2| &\leqslant M\alpha_{1_e} R, \\ |bM - M^2 + mP_1 v^2| &\leqslant M\alpha_{2_e} R. \end{aligned} \tag{9}$$

Fiecare din ecuaţiile de mai sus defineşte o curbă. Graniţa domeniului este determinată de mulţimea punctelor celor două curbe pentru care, la aceeaşi viteză, raza este mai mare.

Pentru exemplificarea de faţă unghiurile limită s-au considerat de 5°. În ecuaţiile (9) se scriu

$$R \geqslant 8{,}45 + 0{,}25\, v^2,$$

$$R \geqslant |\, -9{,}55 + 0{,}284\, v^2 \,|.$$

Pe baza acestora s-a trasat curba din mijloc din figura 1, care de fapt este alcătuită din două arce de parabolă.

Curba de stabilitate din figura 1 prezintă o asimptotă verticală la viteza critică. Este de remarcat faptul că în apropierea vitezei critice raza scade foarte rapid. Astfel, pentru raza de 100 m viteza critică este practic egală cu cea la mersul în linie dreaptă. Pentru raze mai mici viteza critică scade totuşi nu prea mult, fiindcă, de pildă, pentru o rază de 25 m viteza critică este aproape 120 km/h.

Aşa cum rezultă din aceeaşi figură, curba de stabilitate este mult sub curba de liniaritate. Aşadar, pentru regimuri la care nu se depăşeşte liniaritatea, stabilitatea mişcării este asigurată în orice condiţii. Există o excepţie în apropierea vitezei critice unde mişcarea poate fi instabilă

şi în domeniul liniar. Dar, din punct de vedere practic, viteza la care se prezintă situaţia arătată este egală cu viteza critică. Distanţa mare dintre curba domeniului de liniaritate şi curba de stabilitate oferă temei să se presupună că, în general, pentru autoturisme, mişcarea circulară staţionară este stabilă pentru regimuri la care pneurile lucrează pe porţiunea liniară a caracteristicilor de deviere (viteza mai mică decît viteza critică la deplasarea rectilinie). De altfel, în cazul automobilelor cu diferenţial normal, proprietatea enunţată are loc în orice condiţii. Acest lucru se poate dovedi foarte uşor, folosind diagrama de stabilitate a lui Pevzner [6].

Dacă se calculează acceleraţia normală corespunzătoare regimului de pe curba de stabilitate se obţin valori care depăşesc acceleraţia gravităţii. Aşadar, în cazul unor caracteristici liniare pînă la limita de aderenţă (caz ideal), stabilitatea este determinată de viteza la care începe deraparea.

Tot în diagrama de stabilitate a lui Pevzner se poate deduce că există o rază inferioară începînd de la care deplasarea se poate face cu viteza critică. Aceasta rază este chiar raza pentru care se atinge limita de liniaritate. Din figura 1 rezultă că şi în cazul automobilului cu diferenţial autoblocabil există o asemenea rază. Valoarea ei este de 460 m. Este de observat însă că ar fi posibil ca în realitate această rază să fie mai mică, întrucît se poate ca şi în domeniul de neliniaritate curba de stabilitate să prezinte o pantă mare în apropiere de viteza critică.

Deplasarea în cerc cu viteza critică nu este posibilă decît cu unghiul de virare $\beta = 0$, fiindcă altfel α şi ω date de (3) ar deveni infinite ($s(v)=0$)) Situaţia aceasta are loc, după cum se ştie, şi pentru automobilul cu diferenţial normal. În acest fel este posibilă determinarea vitezei critice, ea fiind dată de viteza la care deplasarea se face în cerc cu unghiul de virare a roţilor nul.

Din cele de mai sus rezultă că şi în cazul automobilului cu diferenţialul autoblocabil poate fi folosită aceeaşi metodă pentru determinarea vitezei critice.

Determinarea razei de viraj în condiţiile de mai sus nu se poate face teoretic. În adevăr, atît în cazul diferenţialului normal, cît şi în cazul diferenţialului autoblocabil, în relaţiile (3) apar nedeterminări. Pentru a ridica aceste nedeterminări, ar mai trebui indicat, de pildă, cum se modifică β în funcţie de v. Valoarea efectivă va depinde de modul cum este condusă experimentarea pentru atingerea vitezei critice (deci de modul cum este modificat atît v, cît şi β). Raza poate să ia orice valoare mai mare decît o anumită valoare inferioară care poate fi determinată aşa cum s-a arătat mai înainte.

În exemplul de faţă această rază este mare, astfel încît realizarea efectivă a experimentării este dificilă. Totuşi, din motivele arătate, ar fi posibilă ca efectiv această rază să fie mai mică.

Pe aceeaşi figură 1 s-a trasat şi curba acceleraţiei normale a centrului de greutate în funcţie de viteză, corespunzătoare limitei de liniaritate. Din această curbă se deduce că procedeul obişnuit în literatură de a considera că, pentru acceleraţii normale sub o anumită valoare constantă (de regulă 0,3 g), pneurile lucrează în zona liniară a caracteristicilor de deviere nu este în general corect, întrucît fiecărei viteze îi corespunde o anumită acceleraţie. Se observă că numai pentru viteze ce depăşesc anumite valori a_n poate fi considerat relativ constant. De pildă, în cazul de faţă,

acest lucru are loc pentru viteze ce depăşesc 60 km/h, iar a_n atinge, pentru o anumită viteză, 0,38 g.

Pentru viteze mici, a_n prezintă o variaţie însemnată cu viteza şi de aceea este necesar ca la indicarea valorilor acceleraţiei normale la limita de liniaritate să se indice cel puţin domeniul vitezelor.

Concluzii

Formulele deduse în lucrare permit determinarea vitezei critice a automobilului cu diferenţial autoblocabil pentru o rază de virare dată (unghiurile de deviere sînt în zona liniară a caracteristicilor pneurilor), cînd diferenţialul este blocat.

În general, pentru autoturisme, mişcarea circulară staţionară este stabilă pentru regimuri la care pneurile lucrează pe porţiunea liniară a caracteristicilor lor de deviere, viteza de deplasare fiind inferioară vitezei critice din mişcarea rectilinie.

În principiu şi la automobilele cu diferenţial autoblocabil este posibil să se determine viteza critică din mişcarea rectilinie, atunci cînd, roţile nefiind variate, automobilul execută o mişcare circulară staţionară.

Procedeul utilizat adesea în literatură de a considera că, pentru acceleraţii normale sub o anumită valoare constantă (de regulă 0,3 g), pneurile lucrează în zona liniară a caracteristicilor de deviere nu este în general corect, fiind necesară şi indicarea vitezei automobilului.

Catedra de autovehicule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Böhm*, F, Über die Fahrtrichtungsstabilität und die Seitenwindempfindlichkeit des kraftwagens bei Geradeaus-Fahrt, în ATZ, 63, nr. 5, pp. 128—133.
2. *Ciudakov*, *E. A.* Teoriia avtomobilea, tom. I: Ustoicivost avtomobilea protiv zanosa, Iz—vo Akademii Nauk SSSR, Moskva—Leningrad, 1944.
3. *Ciudakov*, *E. A.*, Bokovaia ustoiciost bezdifferenţialnogo avtomobilea, Iz—vo Akademii Nauk SSSR, Moskva-Leningrad, 1945.
4. *Ciudakov*, *E.A.* Vliianie tangentialnoi elasticinosti koles na bokovuiu ustoicivost avtomobilea. Iz—vo Akademii Nauk SSSR, Moskva-Leningrad, 1947.
5. *Diiakov*, *I. Ia.*, Nosenkov, M.A., Vliianie samoblokiruişcegosea differenţiala na ustoicivost gruzogo avtomobilea tipa 4 × 2 protiv zanosa. În: Avtomobilnaia promîşlennosti, XXVI, nr. 6, 1960, pp.7—11.
6. *Pevzner*, *Ia. M.*, Teoria ustoicivosti avtomobilea, Maşghiz, Moskva, 1947.
7. *Stoicescu*, *A. P.* Contribuţii la studiul stabilităţii automobilului cu diferenţial autoblocabil. În: Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată (în curs de publicare).
8. *Stoicescu*, *A. P.* Contribuţii la studiul maniabilităţii automobilului cu diferenţial autoblocabil. În: Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti (în curs de publicare).
9. *Stoicescu*, *A. P.* Contribuţii la studiul influenţei reacţiunilor tangenţiale la roţi asupra stabilităţii şi maniabilităţii automobilului. Teză de doctorat, Institutul politehnic Bucureşti, 1971.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

C. Z.: 625.24

CONTRIBUȚII LA OPTIMIZAREA TONAJELOR ȘI VITEZELOR TRENURILOR DE MARFĂ *

ANDONIE COTORANU

1. Considerații generale

Pentru transportul feroviar ca și pentru celelalte sisteme de transport, obiectivul principal ce se urmărește a fi atins îl constituie realizarea unei circulații de călători și mărfuri, cu densitate, siguranță și confort maxime la un preț de cost minim.

Creșterea necontenită a cerințelor transportului feroviar și în deosebi sporirea numărului de călători și a cantității mărfurilor ce trebuie transportate și cu viteze din ce în ce mai mari impun creșterea puterii locomotivelor și diversificarea tipurilor acestora, sporirea capacității concomitent cu micșorarea greutății proprii a vagoanelor, modernizarea instalațiilor de frînare, a instalațiilor SCB și a căii precum și îmbunătățirea indicatorilor de exploatare.

Îmbunătățirea acestor indici tehnici și de exploatare au drept rezultat creșterea capacității de transport a liniilor de cale ferată.

Ca parametri de bază ai organizării traficului de călători și marfă, tonajele trenurilor împreună cu vitezele de circulație ale acestora determină capacitatea de transport a unei linii de cale ferată și trebuie aleși astfel încît să satisfacă atît volumul de transport cît și reducerea prețului de cost al transportului.

2. Criterii de bază ale optimizării vitezelor trenurilor de marfă

Determinarea tonajelor trenurilor de marfă se face de obicei pentru fiecare secție de remorcare în parte în funcție de posibilitățile de remorcare ale locomotivei și de caracteristicile profilului liniei.

La stabilirea tonajelor trenurilor se are în vedere, în general, realizarea următoarelor obiective:

— satisfacerea volumului de transport, respectiv îndeplinirea planului de transport;

— sporirea vitezei de circulație

* Manuscris predat redacției la data de 20 iunie 1972.

— utilizarea rațională a materialului rulant;
— reducerea consumului de combustibil sau energie electrică;
— unificarea tonajelor trenurilor și evitarea prelucrărilor repetate;
— folosirea lungimilor utile ale liniilor din stații;
— reducerea cheltuielilor de transport.

Tonajele trenurilor sînt legate direct de vitezele lor de circulație și de puterea locomotivelor, astfel că pentru o anumită putere, odată cu creșterea tonajelor scad vitezele de circulație ale trenurilor remorcate. Prin urmare pentru a se realiza un transport maxim de mărfuri, și, în același timp, la un preț de cost minim trebuie stabilită relația de legătură dintre cei doi parametri, tonaj și viteză.

Aceste considerații duc la necesitatea stabilirii unor tonaje optime pentru trenuri de marfă cărora să le corespundă viteze optime de circulație.

Valorile optime ale tonajelor și vitezelor de circulație ale trenurilor de marfă sînt acele valori prin care se asigură fie realizarea unui volum maxim de mărfuri transportate, fie realizarea volumului dat de transport în condițiile organizării celei mai avantajoase a procesului de transport și cu cheltuieli minime ale economiei naționale pentru efectuarea transportului feroviar și pentru înzestrarea tehnică a căilor ferate.

Rezultă deci două criterii de bază în funcție de care se stabilesc tonajele și vitezele optime ale trenurilor de marfă și anume:

1) Capacitatea de transport a liniilor de cale ferată;

2) Cheltuielile de exploatare.

În prezenta lucrare se tratează problema optimizării corespunzătoare capacității de transport maxime.

3. Vitezele și tonajele optime corespunzătoare capacității de transport a liniilor

Conform primului criteriu de optimizare tonajele și vitezele optime ale trenurilor sînt cele corespunzătoare unei capacități maxime de transport a liniei.

Capacitatea de transport a unei linii de cale ferată în fiecare sens de circulație se determină în funcție de capacitatea de circulație a acestei linii pentru traficul de marfă și de tonajul trenului.

Capacitatea de circulație a unei linii este dată de capacitatea de circulație a distanței limitative (distanța de circulație de pe linia respectivă cu capacitatea cea mai mică de circulație).

Pentru o secție de circulație volumul maxim de mărfuri ce pot fi transportate în 24 ore poate fi determinat cu relația:

$$Q_{max} = G_v \, n_{max} \; [tb], \tag{1}$$

în care:

G_v este tonajul mediu brut al trenului, în tb;
n_{max} — numărul maxim de trenuri directe de marfă ce se poate înscrie pe distanța limitativă într-o zi.

Pentru liniile simple de cale ferată, numărul maxim de trenuri directe de marfă n_{max} este dat de relația:

$$n_{max} = \frac{24 - T_c}{t_1 + t_2 + t_s}, \tag{2}$$

în care:

T_c este timpul mediu din zi, ocupat de trenurile de călători, în ore;

t_s — timpul de staționare pentru încrucișare, în ore;

t_1 și t_2 — timpii de mers ai unei perechi de trenuri, într-un sens și în celălalt, pe distanța limitativă, în ore.

Timpii de mers pe distanța limitativă t_1 și t_2, depind de vitezele de circulație ale trenului V_1 și V_2 într-un sens și în celălalt, pe această distanță. Considerînd că vitezele de circulație ale trenului pe distanța limitativă sînt egale în cele două sensuri de circulație, $V_1 = V_2 = V$ se poate scrie relația:

$$t_1 + t_2 = \frac{2s}{V} \tag{3}$$

în care:

s — distanța limitativă, în km.

V — viteza medie de circulație pe distanța limitativă, în km/h.

Ținînd cont de relațiile (2) și (3), relația (1) devine:

$$Q_{max} = G_v V \frac{24 - T_c}{2s + t_s V} \text{ [tb]}. \tag{4}$$

După cum se vede din relația (4) volumul de mărfuri ce pot fi transportate în timp de 24 ore, pe distanța limitativă depinde de tonajul trenurilor și de viteza medie de circulație a acestora pe distanța limitativă. Considerînd că distanța limitativă este formată dintr-o rampă uniformă, egală cu rampa echivalentă, iar trenul circulă pe această distanță cu o viteză constantă egală cu viteza medie de circulație, ecuația de echilibru a forțelor ce acționează asupra trenului este:

$$F_0 - G_L(r_L + i_e) - G_v(r_v + i_e) = 0, \tag{5}$$

unde:

F_0 este forța de tracțiune la obada roților locomotivei, în kgf;

G_L — greutatea locomotivei în stare de serviciu, în tf;

r_L și r_v — rezistențele specifice la mers în palier și aliniament a locomotivei și vagoanelor, în kgf/tf;

i_e — declivitatea echivalentă dintre stațiile cu distanța limitativă, în 0/00.

Din ecuația (5), tonajul mediu brut al trenurilor de marfă poate fi obținut sub forma:

$$G_v = \frac{F_0 - G_L(r_L + i_e)}{r_v + i_e} \text{ [tb]}. \tag{6}$$

Rezistențele specifice la înaintare ale locomotivelor și vagoanelor, la mersul pe profile de cale situate în palier și aliniament, pot fi prezentate prin relații de forma :

— pentru locomotive :

$$r_L = a_L + b_L V + c_L V^2; \tag{7}$$

— pentru vagoane :

$$r_v = a_v + b_v V + c_v V^2. \tag{8}$$

Forța de tracțiune la obada roților locomotivei poate fi obținută din caracteristica de tracțiune a locomotivei $F_0(V)$ (fig. 1 și fig. 2).

Această caracteristică poate fi prezentată ca un polinom Lagrange de gradul III :

$$F_0(V) = AV^3 + BV^2 + CV + D, \tag{9}$$

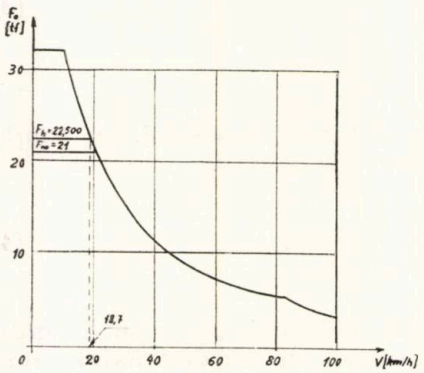


Fig. 1. — Caracteristica de tracțiune $F_0(V)$ a locomotivei diesel-electrice 060—DA

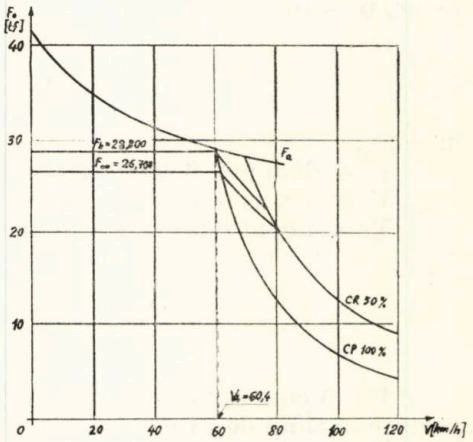


Fig. 2. — Caracteristica de tracțiune $F_0(V)$ a locomotivei electrice 060—EA

în care A, B, C și D sînt coeficienții constanți ce se pot determina cu ajutorul formulei de interpolare a lui Lagrange, prin următoarele expresii :

$$A = \frac{F(V_1)}{(V_1 - V_2)(V_1 - V_3)(V_1 - V_4)} + \frac{F(V_2)}{(V_2 - V_1)(V_2 - V_3)(V_2 - V_4)} + \frac{F(V_3)}{(V_3 - V_1)(V_3 - V_2)(V_3 - V_4)} + \frac{F(V_4)}{(V_4 - V_1)(V_4 - V_2)(V_4 - V_3)}; \tag{10}$$

$$B = -\left[\frac{F(V_1)(V_2 + V_3 + V_4)}{(V_1 - V_2)(V_1 - V_3)(V_1 - V_4)} + \frac{F(V_2)(V_1 + V_4 + V_3)}{(V_2 - V_1)(V_2 - V_3)(V_2 - V_4)} + \frac{F(V_3)(V_1 + V_2 + V_4)}{(V_3 - V_1)(V_3 - V_2)(V_3 - V_4)} + \frac{F(V_4)(V_1 + V_2 + V_3)}{(V_4 - V_1)(V_4 - V_2)(V_4 - V_3)}\right]; \tag{11}$$

$$C = \frac{F(V_1)(V_2V_3 + V_2V_4 + V_3V_4)}{(V_1 - V_2)(V_1 - V_3)(V_1 - V_4)} + \frac{F(V_2)(V_1V_3 + V_1V_4 + V_3V_4)}{(V_2 - V_1)(V_2 - V_3)(V_2 - V_4)} +$$

$$+ \frac{F(V_3)(V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_4)}{(V_3 - V_1)(V_3 - V_2)(V_3 - V_4)} + \frac{F(V_4)(V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_3)}{(V_4 - V_1)(V_4 - V_2)(V_4 - V_3)}; \quad (12)$$

$$D = -\left[\frac{F(V_1)V_2V_3V_4}{(V_1 - V_2)(V_1 - V_3)(V_1 - V_4)} + \frac{F(V_2)V_1V_3V_4}{(V_2 - V_1)(V_2 - V_3)(V_2 - V_4)} + \right.$$

$$\left. + \frac{F(V_3)V_1V_2V_4}{(V_3 - V_1)(V_3 - V_2)(V_3 - V_4)} + \frac{F(V_4)V_1V_2V_3}{(V_4 - V_1)(V_4 - V_2)(V_4 - V_3)}\right], \quad (13)$$

în care :

V_1, V_2, V_3, V_4 sînt valorile vitezelor în cele patru puncte luate în considerare pentru interpolare ;

$F(V_1), F(V_2), F(V_4)$ și $F(V_3)$ — reprezintă valorile forței de tracțiune în cele patru puncte.

Expresiile care definesc funcția (9) sînt diferite în funcție de tipul locomotivei, felul caracteristicii de tracțiune și treapta de controler, graduator sau treapta de șuntare.

Astfel, pentru locomotiva diesel-electrică 060 DA expresiile care definesc funcția $F(V)$ în intervalele corespunzătoare ale valorilor vitezei sînt date în relația (14) :

$$F(V) = \begin{cases} A_aV^3 + B_aV^2 + C_aV + D_a, \text{ pentru } V \in [0 \div 10] & a) \\ A_{CP}V^3 + B_{CP}V^2 + C_{CP}V + D_{CP}, \text{ pentru } V \in [10 \div 44,45] & b) \\ A_{R1-3}V^3 + B_{R1-3}V^2 + C_{R1-3}V + D_{R1-3} \text{ pentru } V \in [44,45 \div 83,5] & c) \\ A_UV^3 + B_UV^2 + C_UV + D_U \text{ pentru } V \in [83,5 \div 100] & d) \\ F_h, \text{ pentru } V \in [0 \div 18,7]. & e) \end{cases} \quad (14)$$

Pentru locomotiva electrică 060 EA expresiile care definesc funcția $F(V)$ sînt date în relația (15) :

$$F(V) = \begin{cases} A_aV^3 + B_aV^2 + C_aV + D_a \text{ pentru } V \in [0 - 60,4] & a) \\ A_{CP}V^3 + B_{CP}V^2 + C_{CP}V + D_{CP} \text{ pentru } V \in [60,4 - 120] & b) \\ A_hV^3 + B_hV^2 + C_hV + D_h, \text{ pentru } V \in [60,4 - 77,3] & c) \\ A_{R1}V^3 + B_{R1}V^2 + C_{R1}V + D_{R1}, \text{ pentru } V \in [64 - 120] & d) \\ A_{R2}V^3 + B_{R2}V^2 + C_{R2}V + D_{R2}, \text{ pentru } V \in [69,3 - 120] & e) \\ A_{R3}V^3 + B_{R3}V^2 + C_{R3}V + D_{R3}, \text{ pentru } V \in [77,3 - 120] & f) \\ F_h, \text{ pentru } V \in [0 - 60,4]. & g) \end{cases} \quad (15)$$

În relaţiile (14) şi (15) semnificaţia indicilor folosiţi este :

a — pentru aderenţă, CP — pentru cîmp plin, h — pentru regim uniorar, şi $R1$, $R2$, $R3$ — pentru cîmp redus treptele 1, 2 şi 3, U — pentru limitarea la tensiune maximă.

Pentru relaţiile ce definesc caracteristicile de tracţiune limită folosite la calculul tonajelor trenurilor valorile coeficienţilor A, B, C şi D sînt prezentate în tabela 1 (pentru locomotiva diesel 060 DA) şi în tabela 2 (pentru locomotive electrice 060 EA).

Tabela 1

Domeniul de variaţie a vitezei [km/h]	Valorile coeficienţilor			
	A	B	C	D
10 — 44,55	—0,217	33	—1888,3	47780
44,55 — 83,5	—0,0406	9,773	—854,8	32275
83,5 — 100	—0,0126	5,59	—820,8	42272

Tabela 2

Domeniul de variaţia a vitezei [km/h]	Valorile coeficienţilor			
	A	B	C	D
0 — 60,4	—0,0375	6	— 430	41500
60,4 — 77,3	—0,1169	28,55	—2635	109580
77,3 — 120	—0,0657	25,24	—3345	160510

Valorile corespunzătoare ale forţei de tracţiune calculate cu relaţia (9) sînt prezentate în tabela 3 (pentru locomotivele diesel 060 DA) şi în tabela 4 (pentru locomotivele electrice 060 EA).

Tabela 3

V[km/h]	18,7	20	30	40	50	60	70	83,5	90	100
F_{0real}[tf]	22,5	21,5	15,0	11,2	8,9	7,4	6,4	5,4	4,5	3,5
F_{0calc}[tf]	22,6	21,5	15,0	11,2	8,89	7,4	6,4	5,4	4,5	3,5

Tabela 4

V[km/h]	10	20	30	40	50	60,4	70	77,3	80	90	100	110	120
*F_{real}[tf]	37,7	35,0	33,1	31,5	30,2	29,15	24,9	22,5	20,8	16,0	12,7	10,5	9,0
F_{0calc} [tf]	37,76	35,0	32,99	31,5	30,3	29,15	24,9	22,46	20,8	16,0	12,7	10,50	9,022

*) În tabela 4 s-au considerat valorile forței de tracțiune la obadă corespunzător aderenței (pentru $V=0-60,4$ km/h), curentului uniorar (pentru $V = 60,4-77,3$ km/h) și coeficientului de șuntare a cîmpului, $\alpha = 0,5$ (pentru $V = 77,3 = 120$ km/h).

Ținînd cont de relațiile (7), (8) și (9) expresia (6) capătă forma:

$$G_v = \frac{AV^3+BV^2+CV+D-G_L(a_L+b_LV+c_LV^2+i_e)}{a_v+b_vV+c_vV^2+i_e} \text{ [tb]}. \qquad (16)$$

Se observă că expresia tonajului (16) este o funcție de forma $G_v = f(V, i_e)$.

Pentru diverse valori ale declivității echivalente i_e variația tonajelor trenurilor de marfă în funcție de viteză este prezentată în fig. 3 (pentru trenurile remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 DA) și în fig. 4 (pentru trenurile remorcate cu locomotive electrice 060 EA).

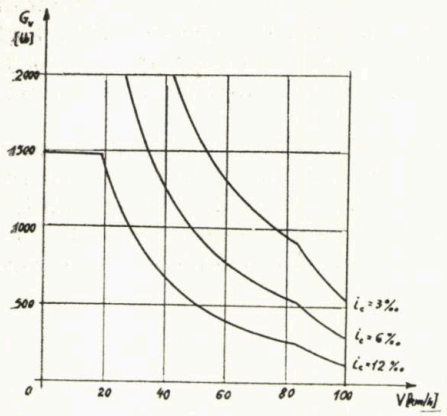


Fig. 3. — Curbele $G_v = f(V, i_e)$ pentru trenurile remorcate cu locomotive diesel-electrice 060—DA

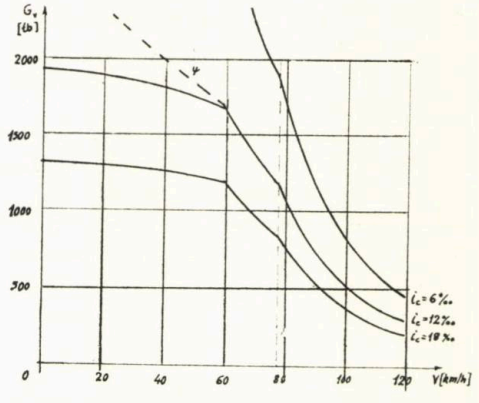


Fig. 4.— Curbele $G_v = f(V, i_e)$ pentru trenurile remorcate cu locomotive electrice 060—EA

Înlocuind tonajul trenului dat de relația (16) în relația (4) expresia capacității de transport va căpăta forma:

$$Q = \frac{[AV^4+BV^3+CV^2+DV-G_LV(a_L+b_LV+c_LV^2+i_e)](24-T_c)}{(a_v+b_vV+c_vV^2+i_e)(2s+t_sV)} \text{ [tb]}, \qquad (17)$$

adică o funcție de forma $Q = f(V, i_e)$.

Pentru diferite valori ale declivității echivalente i_e a distanței limitative capacitatea de transport a liniei variază cu viteza medie de circulație

după cum se vede în fig. 5 (pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 DA) şi în fig. 6 (pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA).

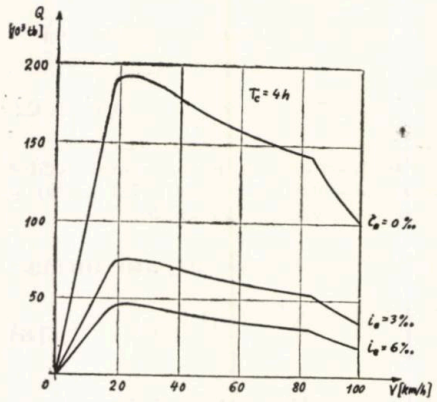


Fig. 5. — Curbele $Q(V, i_e)$ pentru trenurile remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 — DA

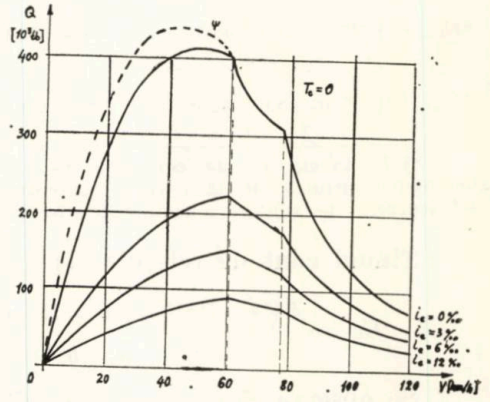


Fig. 6. — Curbele $Q(V, i_e)$ pentru trenurile remorcate cu locomotive electrice 060 — EA

Valorile coeficienţilor şi ale parametrilor folosiţi în lucrare sînt date în tabela 5.

După cum se vede din fig. 5 şi 6 curbele $Q = f(V, i_e)$ prezintă puncte de maxim pentru anumite valori ale vitezei. Aceste valori sînt optime deoarece ele corespund volumului maxim de mărfuri ce pot fi transportate pe o secţie de circulaţie cu distanţa limitativă s şi declivitatea echivalentă i_e.

Pentru diverse valori ale declivităţii echivalente i_e vitezele optime corespunzătoare capacităţii de transport maxime au valori diferite, reprezentarea grafică a funcţiei $V_{opt} = f(i_e)$ fiind dată în fig. 7 (pentru cazul trenurilor de marfă remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 DA) şi în fig. 8 (pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA).

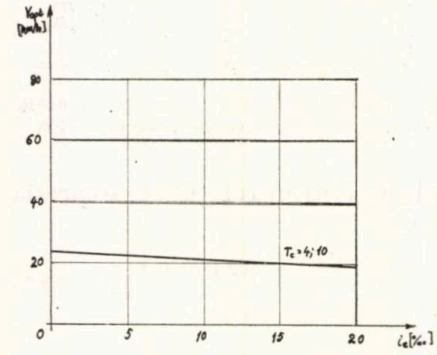


Fig. 7. — Variaţia vitezei optime cu declivitatea echivalentă pentru trenurile remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 — DA

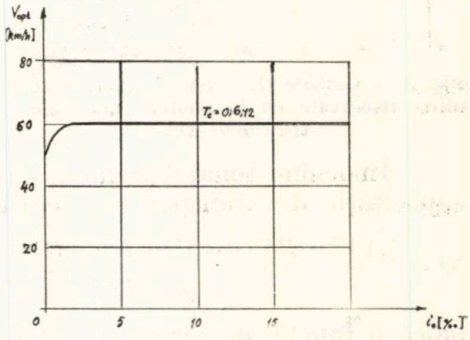


Fig. 8. — Variaţia vitezei optime cu declivitatea echivalentă pentru trenurile remorcate cu locomotive electrice 060 — EA

Tabela 5

Parametrii	Unitate de măsură	Destinaţia	Valoarea
a_L	—	Locomotive diesel	3,558
b_L	—	—„—	0,00967
c_L	—	—„—	0,000403
G_L	tf	—„—	116
a_L	—	Locomotive electrice	2,467
b_L	—	—„—	0
c_L	—	—„—	0,00058
G_L	tf	—„—	126
a_v	—	Vagoane marfă	2
b_v	—	—„—	0
c_v	—	—„—	0,000513
s_s	km	—	10
t_s	ore	—	0,1

Tonajele optime ale trenurilor de marfă se determină cu relaţia (16) corespunzător circulaţiei cu viteza optimă V_{opt} pe declivitatea echivalentă i_e.

Pentru folosirea completă a posibilităţilor de remorcare ale locomotivelor tonajele trenurilor de marfă se determină, de obicei, cu relaţia :

$$G_v = \frac{AV_r^3+BV_r^2+CV_r+D-G_L(a_L+b_LV_r+c_LV_r^2+i_c)}{a_v+b_vV_r+c_vV_r^2+i_c} \text{ [tb]}, \qquad (16')$$

în care :

i_c reprezintă rezistenţa caracteristică a liniei, în ‰ ;

V_r — viteza de circulaţie pe rampa cu rezistenţa caracteristică (viteza de calcul), în km/h.

Pentru a verifica dacă tonajele optime determinate cu relaţia (16) pot fi remorcate cu viteza V_r pe rampa cu rezistenţa caracteristică se foloseşte condiţia :

$$G_{vopt}(V_{opt},\ i_e) \leqslant G_v(V_r,\ i_c). \qquad (18)$$

Această verificare se mai poate face pornind de la ecuația de echilibru (5) care, ținînd cont de relațiile (7), (8), și (9), capătă forma:

$$AV^3+BV^2+CV+D-G_L(a_L+b_LV+c_LV^2+i_e)-G_v(a_v+b_vV+c_vV^2+i_e)=0 \tag{19'}$$

care se mai poate scrie:

$$K_3V^3+K_2V^2+K_1V+K_{01}-K_{02}i_e=0, \tag{19}$$

sau

$$i_e=\frac{K_3V^3+K_2V^2+K_1V+K_{01}}{K_{02}},$$

unde coeficienții K_{02}, K_{01}, K_1, K_2 și K_3 au valorile:

$$K_{02}=G_L+G_v;$$
$$K_{01}=D-G_La_L-G_va_v;$$
$$K_1=C-G_Lb_L-G_vb_v;$$
$$K_2=B-G_Lc_L-G_vc_v;$$
$$K_3=A.$$

Valorile acestor coeficienți depind de valorile tonajelor, care se determină cu relația (16') pentru diverse valori ale rezistențelor caracteristice i_c ale liniei și a căror reprezentare grafică este dată în fig. 9 (pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 DA) și în fig. 10 (pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA).

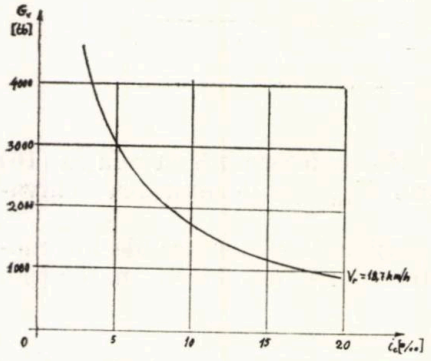


Fig. 9. Curbe $G_v(i_c)$ pentru trenurile remorcate cu locomotive diesel-electrice 060 – D

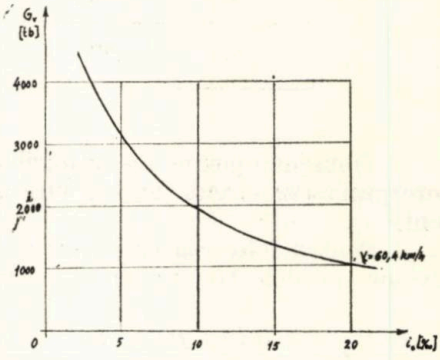


Fig. 10. Curba $G_v(i_c)$ pentru trenurile remorcate cu locomotive electrice 060 – EA

Rezolvînd ecuația (19) se obțin, pentru diverse valori ale declivității echivalente i_e și ale tonajului G_v, două familii de curbe $V=f(i_e,G_v)$, pentru cele două sisteme de tracțiune.

Aceste curbe reprezintă variația vitezelor de circulație a trenurilor, cu tonaje calculate pe rampa cu rezistența caracteristică i_c, în funcție

de declivitatea echivalentă a distanţei limitative, pentru cazul remorcării trenurilor de marfă cu locomotive diesel sau electrice, circulînd pe caracteristica de tracţiune limită, adică utilizînd complet puterea locomotivei.

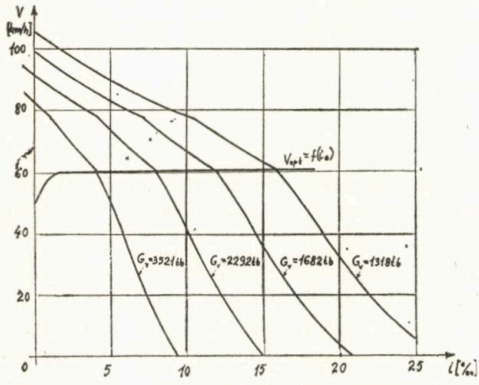


Fig. 11. Curbele $V(i_e, G_v)$ şi $V_{opt}(i_e)$ pentru cazul locomotivelor diesel-electrice

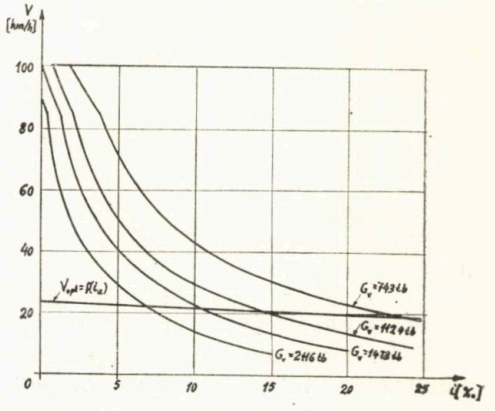


Fig. 12. Curbele $V(i_e, G_v)$ şi $V_{opt}(i_e)$ pentru cazul locomotivelor electrice.

Suprapunînd peste aceste curbe curba $V_{opt} = f(i_e)$ se determină tonajele optime ale trenurilor care circulă cu viteza optimă şi, corespunzător rezistenţei caracteristice i_c a secţiei de circulaţie, se determină declivităţile pe care pot circula, cu viteza optimă, aceste trenuri (fig. 11 şi fig. 12).

Cunoscînd rampa caracteristică i_c a secţiei de circulaţie se poate determina tonajul G_v şi se poate determina abaterea vitezei de circulaţie a trenului pe declivitatea echivalentă i_e.

Vitezele optime de circulaţie ale trenurilor de marfă mai pot fi obţinute şi din condiţia $\frac{dQ}{dV} = 0$ aplicată relaţiei (17), de unde rezultă ecuaţia :

$$K'_6V^6 + K'_5V^5 + K'_4V^4 + K'_3V^3 + K'_2V^2 + K'_1V + K'_0 = 0, \qquad (20)$$

în care :

$$K'_0 = 2s\,[D - G_L(a_L + i_e)](a_v + i_e);$$

$$K'_1 = 4s\,(C - G_Lb_L)(a_v + i_e);$$

$$K'_2 = 6s\,(B - G_Lc_L)(a_v + i_e) + (C - G_Lb_L)[2b_vs + (a_v + i_e)\,t_s] - [D - G_L(a_L + i_e)](2c_vs + b_vt_s);$$

$$K'_3 = 8As\,(a_v + i_e) + 2\,(B - G_Lc_L)[2b_vs + (a_v + i_e)\,t_s] - 2c_v\,t_s[D - G_L(a_L + i_e)];$$

$$K'_4 = 3\,A[2b_vs + (a_v + i_e)t_s] + (B - G_Lc_L)(2c_vs + b_vt_s) - c_vt_s(C - G_Lb_L);$$

$$K'_5 = 2\,A\,(2c_vs + b_vt_s);$$

$$K'_6 = c_vt_sA.$$

Rezolvînd ecuaţia (20) pentru diverse declivităţi echivalente se obţin vitezele optime de circulaţie ale trenurilor corespunzătoare capacităţii maxime de transport.

Corespunzător acestor viteze optime şi declivităţilor respective se obţin, cu relaţia (16), tonajele optime remorcate pe secţia cu distanţa limitativă s şi care asigură realizarea volumului maxim al mărfurilor transportate.

4. Concluzii

Stabilirea tonajelor trenurilor de marfă trebuie făcută în condiţiile satisfacerii necesităţilor de trafic şi a realizării transportului cu un preţ de cost minim.

La realizare aacestor cerinţe trebuie avute în vedere şi condiţiile. concrete ale desfăşurării transportului pe o anumită secţie de circulaţie

În cazul în care, pe o anumită secţie de circulaţie se pune problema asigurării unui volum de transport cît mai mare tonajele trenurilor de marfă se vor stabili în funcţie de viteza optimă de circulaţie pe distanţa limitativă. În condiţiile studiate în prezenta lucrare această viteză optimă are valori apropiate de valoarea vitezei de calcul.

Pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive diesel electrice 060 DA valoarea vitezei optime este cuprinsă între 24—19 km/h corespunzînd valorilor declivităţii echivalente a distanţei limitative cuprinse între 0—20‰ iar pentru trenurile de marfă remorcate cu locomotive electrice 060 EA viteza optimă variază între 50—60,4 km/h pentru valori ale declivităţii echivalente a distanţei limitative cuprinse între 0—2‰ iar pentru $i_e \geqslant 2‰$, $V_{opt} = 60{,}4$ km/h (viteza de calcul a tonajelor).

Catedra de material rulant
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Popa, Al* — Cu privire la determinarea tonajelor şi vitezelor optime ale trenurilor de marfă remorcate cu locomotive diesel 060 DA. Buletinul Institului politehnic Bucureşti nr. 6 1966.
2. *Popa, Al* — Utilizarea calculatoarelor electronice în transportul feroviar. Bucureşti, Editura tehnică, 1971.
3. *Coloranu, A.* — Aspecte ale determinării tonajelor şi vitezelor optime ale trenurilor. Comunicare la catedra Material rulant a Institutului Politehnic Bucureşti, 1972.
4. *Coloranu, A.* — Stadiul actual al optimizării tonajelor trenurilor. Comunicare la catedra Materal Rulant a I. P. B., 1971
5. *Peisahzon, B. E.*— Ves i skorosti gruzovîh poezdov Trudî VsesoizunogoNoucino-issledovateliskogo Instituta Jeleznih Dorog. Vîpusk 141, Moskva 1957.
6. *Ghelfond, A. O.* — Calculul cu diferenţe finite. Ed. tehnică. Buc. 1956
7. *Demidovich, B.* ş.a.— Problems in mathematical analysis. Mir publischers Moscow, 1972.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 5

MANAGEMENT

C. Z.: 65.012.4

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF THE PRODUCTION PROGRAMMING IN CERTAINTY AND UNCERTAINTY CONDITIONS II

A. CARABULEA, GH. ANTON, GH. RUȘITORU

The mathematic model of expenses for waiting can be written havin taking into account the consumer's and the Dupplier's waiting time as well as that of the respective cost. Thus for waiting phenomena with a determinist character the expenses have the form;

(2—34) $C_A^d = (C_1 t_{ac} + C_2 t_{af})$ lei/year

$C_1 : C_2$ = waiting cost in lei on the time unit
t_{ac}; t_{af} = waiting time at the customer (t_{ac}) and at the supplier t_{af}.

For probabilist phenomena it is applied a relation of the form;

$$(2-35) \quad C_A^{pr} = \left[C_1 \sum_{n=s+1}^{s} (n-s)p_n + C_2 \sum_{n=0}^{s} (s-n)\gamma p_n \right] \text{lei/year}$$

The probabilities are determined according to the laws that are governing the arrivals and the services of the phenomena in the waiting system on study. Thus, if the Poisson's law is governing the probability is calculated by the relation (2—36) and if the Erlang's law is applied then the relation (2—37) is used for the probability calculus intervening in the relation (2—35).

$$(2-36) \qquad p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{nt}}{n!}; \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$(2-37) \qquad p_n(t) = \frac{\psi^s p_0}{S! \left(1 - \frac{\psi}{s}\right)}; \quad \psi = \frac{\lambda}{\mu}; \quad s = 1, 2, \ldots$$

The waiting phenomena can be also studied by means of the Bellman's functional because the minus of the expenses should be determined with the respective product waiting of the machines in the technological

lines, when the restrictions imposed by the different types of product processing should be taken into account.

The consideration on the equipement wear and replacement include the study of the equipment and parts behaviour in case of a stochastic or non stochastic wlar. These forays make easier the optimum replacing time determination of the equipement life, of the demage probability, taking into account the internal operating conditions and the external influences and the consumption probability. All these give the possibility to calculate the number of equipments which have to be replaced within a period of time, for both new equipements and those with a certain stage of service. At the same time it can be determined the obtaining and maintoining rate for the parts of the operating equipment and constituting the fund of the spare parts. On these element basis are built the determinist and probabilist models of the expenses function of the equipement wear and replacing theory application within the productive section of the industrial organizations.

The measures taken to provide the equipement park operation refer to failures trouble-shooting, the current preventive maintenance and the systematic replacing allowing the application of an optimum policy in equipement maintenance and securing with minimum expenses.

The determinist model of the total wear (U_t) taking into account the physic wear (U_f) and moral wear (U_m) has the form :

$$U_t = \left[1-\left(1-\frac{U_f}{100}\right)\left(1-\frac{U_m}{100}\right)\right]\cdot 100 \tag{2-38}$$

The relative wear may be determined taking into account the survival curve and the equipement mean life (t)

$$U_{f\%} = e^{-\alpha t}(e-1)100 = \frac{R}{V_{fa}}100\,; \quad \bar{t} = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} E dt$$

$$U_{m\%}\frac{V_{f0}-V_{fa}}{V_{f0}}\,100 = \left(1-\frac{v_{fa}}{v_{f0}}\right)100 \tag{2-39}$$

where :

R — the value of the carried out repartitions.
V_{fa} = the replacement value of old fund with a new one.
V_{f0} — the equipement cost when secured.

The optimum replacing time is determined taking into account the actualization of costs in (n) operating periods with an actualization rate (r) and is evaluated on the following condition basis;

$$C_{n+1} > \frac{I+\sum_{i=1}^{n} C_1\left(\frac{1}{1+r_i}\right)^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i-1}} = \frac{I+\sum_{1}^{n} C_1\left(\frac{1}{1-r_i}\right)^{i-1}}{\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{1+r_i}\right)^{i-1}} \tag{2-40}$$

where :

C_{n+1}=expenses in the year $(n+1)$,
I = investments for equipement purchasing,
C_1 = current year expenses (i)

The determinist model of expenses for equipment wear and replacing when the actualization rate is considered, may be written :

$$C_{r+U} = \left[I + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^{j-1}}\right]\left[1 + \frac{1}{(1+r)^n} + \right. \tag{2-41}$$

$$\left. + \frac{1}{(1+r)^{2n}} + \ldots + \frac{1}{(1+d)^{nt}} + \ldots\right] \quad \text{lei/year}$$

In case of stochastic wear we can operate with the following elements ;

$$J(t) = 1 - \overline{V}(t) = 1 - \frac{n(t)}{n(0)} = \text{life duration} \tag{2-42}$$

where :

$n(t)$ = number of parts still in action after a certain period of time.
$(t)n(0)$ — former operating parts number.

The probability of maintaining parts and equipement in operation is (v) and the trouble probability is calculated with a relation of the form ;

$$p_a(t) = 1\,\frac{n(t)}{n(t-1)} = \frac{n(t-1) - n(t)}{n-(t-1)} \tag{2-43}$$

In this case the equipement may fail in period $(t-1)$ up to $t()$. The mean life of trouble apparition is calculated as follows :

$$\bar{t} = \sum_{t=1}^{\infty} t p_t = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \frac{n(t-1).n(t)}{n(0)} \tag{2-44}$$

The number of equipements which are replaced on a period of time $(m+p)$ is determined ;

$$n_{m+p} = \sum_{m=0}^{\infty} m.p_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(\lambda_0 t)^m e^{-\lambda_0 t}}{m!} \tag{2-45}$$

where :

n = number of operating equipements.
$p_m\,(t)$= trouble mean probability.

The number of parts and equipements with a stochastic wear, which are still operating after a certain working period is calculated as follows :

$$(2-46) \qquad n_{uf} = n_{tu}\left\{1 - \sum_{i=0}^{t-1} [p(t)]_i\right\} = (n_{tu} - n_{m+p})$$

The trouble rate may be constant or proportional to the time and is calculated starting from the following forming relations :

$$(2-47) \qquad \frac{d\bar{V}}{dt} - \lambda_0 \bar{V} = 0 \; ; \; (2-48) \; \frac{d\bar{V}}{dt} - \lambda_0(t)\bar{V} = 0$$

The differential equations (2—47—48) have the following solutions:

$$(2-49) \qquad V = e^{-\lambda t_0}, \quad v = e^{-0,5\lambda_0 t^2}$$

The constant trouble rate leads to an exponential survival curve. If the trouble rate is proportional to the time, the survival curve is represented in the Gauss's semihood on the positive part of the abscissa.

The mean age when the failures appear is calculated as follows :

$$(2-50) \qquad \bar{t} = -\int_0^\infty t dv = -(tv)\int_0^\infty + \int_0^\infty V dt = \int_0^\infty V(t)\, dt$$

By the substitution of the relations (2—49) in (2—50) it results;

$$(2-51) \qquad \bar{t} = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} dt = \frac{1}{\lambda_0} \; ; \quad t = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}\, dt = \int \frac{1 - e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0}$$

The probability of failure consumption respectively intervening in relation (2—45) is calculated with the integrals of the Stielyse's type;

$$(2-52) \qquad p_m(t) = \int_0^t p_{m-1}(t-U).i(u)du$$

where (t) and (U) are marking two moments of the equipment operation in time i (U) = the probability that a failure is present in the interval following the moment (u). The integral (2—32) defines a simple Marcov's process and is calculated by applying the Bore's compression theorem and the properties of the Garson—Laplace's transformation.

The equipment consumption probability resulting from the calculus is represented as;

$$(2-53) \qquad p_n(s) = \frac{s}{s+\lambda_0}\left(1 - \frac{s}{s+\lambda_0}\right)^m = \lambda_0^m \frac{s}{(s+\lambda_0)^{m+1}}$$

s = the variable within the Lapplace — Carson's transformation.

The calculus shows that for a survival exponential curve the replacement probability observes the Poisson's law.

The equipment supplying and maintenance rate is determined starting from integrated equation of Voltera's type, which gives the number of parts in operating in the moment (t).

$$(2-54) \qquad f(t) = N_0 V(t) + \int_0^t S\, r'(U) V(t-u)du$$

where :

$f(t)$ = utilization function ;

$r(u)du$ = the differential showing the number of parts replaced during the interval $(U+du)$

The supplying rate is determined after the calculus of the integral (2—54) and is established that this rate is just equal to the failure rate if $f(t) = ct$. In this case it ensues that the equipement survival law is exponential. The maintenance rate is the average of the survival tiem. The number of the equipements maintained in operation may be determined by the direct derivation of the Voltera's integral.

The probabilist mathematic model of the actualized expenses cauted by the wear, replacement and maintenance in operation theory of the equipement has the form ;

$$(2-55) \qquad C_{u+r+m} = \left[I + \sum_{j=1}^{n} C_j D^{j-1}(1 - D^{n-1}) p_a(t) \right]$$

where :

$D = \dfrac{1}{1+r}$; $p_a(t)$= equipment wear probability.

The equipment wear and replacing may be treated also by dynamic programming using the Bellman's functional under the form ;

$$(2-56) \qquad f_N(t) = \max \begin{bmatrix} A : r_N(0) - c_N(t) + r.f_{N+1} + 1(1) - U_N(0) \\ p : r_N(t) - U_N(t) + r f_{N+1}(0) \end{bmatrix}$$

where :

A — refers to the purchasing of a machine,
P = refers to the machine maintenance in operation
$r_N(t)$ = the yearly income in a machine of age (t) case ;
$U_N(t)$ = the cost of machine of age (t)
r = actualization ratio.

Relation (2—56) indicated the total income in the year (N) obtained from a machine of age (t) when for the rest of the process was applied an optical strategy (a series of decisions) of equipment replacement and maintenance in operation.

The problems related to the reliability in operation of the elements included in technologic and functional diagrams of the organizations

includes following a closer analyse the determination on one hand of the minimum expenses in operating the installation, and on the other hand the maximum incomes due to the whole capacity of the works utilization. For the determination of the expenses, incomes respectivelly which allow to choose the optimum variant, when the extremes of these functions are calculated the medium duration of failure the duration of an operation without failure of the elements in the production process chains, the failure probability, the continuity of functioning and the medium number of drops should be taken into account.

The rational operation of the elements included in the technological and functional flows, within the production process may be carried out knowing the values of the succes and insucces coefficients of the installation operation.

The element operation and diagrams analysis from the reliability point of view is made using the mathematic theory of the Marcov's sides. On the Chapman-Kolmogorov's equations basis it may be established the probabilities of operation and insucces of the elements, and may be derived the economic effects from the qualitative and quantitative point of view.

Starting from the theory of the Marcov's sides, we can demonstrate that the probabilities for an element to operate a certain period of time ($tF\ t$) to be out of order for a period ($t_d t$) respectively may be represented; as follows:

$$P = \{tf < t\} = F(t) = (1 - e^{-\lambda t}); \tag{2—57}$$

λ = number of events that can disturb the normal operation of the elements in the diagram.

If the failure period ($t_d \quad t$) then we may write;

$$P\{td < t\} = G(t) = (1 - e^{-\mu t}) \tag{2—58}$$

μ = number of interventions carried out for trouble shooting. The parameters (λ) and (μ) is estimation made studying the statistic colectivities of the events which are causing or removing the elements failure. The maximum likelinood method lead to the conclusion that the value of $(\lambda)^{-1}$ is given by the selection mean (T_f) included in a function of the form;

$$P(\lambda) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{n} T_f^j \tag{2—59}$$

By derivation and by putting the extreme condition we find the equation:

$$\lambda^{n-1} e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{n} T_f^j \left[n - \lambda \sum_{j=1}^{n} T_f^j \right] = 0 \tag{2—60}$$

Determining the selection function based on the observation in operation of the (n) elements in the diagram analysed we may calculate the probability of failure of a number of (p) elements from the (n) ones observed, with the relation :

$$P(\lambda)=A_n^p\lambda^p\cdot e^{-\lambda}\left[\sum_{i=0}^{p} t_i + (n-p)t_p)\right]; \tag{2-61}$$

where :

A_n^p = represent the arrangement that can be made in various diagrams when (n) elements are observed and founding ou that (p) elements failed,
t_i = operating stoppape moment,
t_p = observation period.

Taking into account the probability theory and the concepts appearing in the application of the Marcov's sides in the equation study (2—57—58) the following elements can be determined. ;

The failure (f) and operating $(0t_f)$ periods, of an element in time unit, by relations of the form ;

$$t_d = \frac{1}{\mu}; \quad t_f = \frac{1}{\lambda}; \tag{2-62}$$

The probability of succes state at the moment (t) is ;

$$P_0(t) = (\mu + \lambda.e^{-(\lambda+\mu)t})(\lambda + \mu)^{-1} \tag{2-63}$$

The mean number of failures in the period (t) ;

$$\bar{n}_r = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda\mu t}{(\lambda+\mu)} - \frac{\lambda^2 e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^2} \tag{2-64}$$

The total mean operation and failure period on the duration (t) ;

$$\begin{cases} \bar{t}_d = \dfrac{\lambda.t}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}] \\ t_f = \dfrac{\mu t}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}] \end{cases} \tag{2-65}$$

The study of the stochastic processes by means of the Marcov's sides at diagrams with serial and parallel elements if can be seen that the system safety decreases when the number of serial elements decreases, and the diagram has a greater safety when there are more elements operating in parallel.

The influence of the elements age on the safety may be studied adding to the physical process in nonhomogeneous Marcov's chains which

allows the determination of the system operation probabilities on the differential equations in the form;

$$(2-66) \qquad \begin{cases} p_0(t) = -\lambda(t).P_0(t); \; P_0(0) = 1 \\ P_1(t) = \lambda(t).P_0(t); \; P_1(0) = 0 \end{cases}$$

After solving the differential equations (2—56) it results:

$$(2-67) \qquad P_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda(U)du}; \quad P_1(t) = (1-e^{-\int_0^t \lambda(U)du})$$

The solving of the integral from the exponent leads when the failures intensity is proportional to the time, to expressions as:

$$(2-68) \qquad P_0(t) = e^{0.5\lambda t^2}; \quad \bar{t}_f = \frac{1{,}41\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{1.25}{\sqrt{\lambda}}$$

If the wear phenomena are preponderant, then the distribution function within the Weibull's processes is used;

$$(2-69) \qquad F(t) = (1-e^{-a t^b});$$

The relation solving (2—69) allows the determinations of the operation mean duration by Euler's integral of the second species (γ).

$$(2-70) \qquad t_f = \frac{\gamma(1+b)}{b.a^{1/b}} = \frac{(1+b)}{b.a^{1/b}} \int_0^\infty U^{x-1} e^U du$$

If ($b=1$) if can be obtained the exponential distribution.

For the optimization of the reliability it may be used decision processes of the Marcov's type which make easier the maximalization of the incomes obtained through various diagrams of organizations operation. Adding an income matrix (r) to the transition of a Marcovian process, when passing from the state (i) to the state (j) it can be obtained in the process evolution in time case an incomes succession.

These are aleatory variables and are defining a stochastic process associated to the Marcov's chain which expresses the process evolution. Because there are several solution for a process activities, it is choosed the transition probability matrix, which indicates the optimum solution (maximum income, the medium number of fails, the minimum expenses for the system safety respectively.

If during a period of time, the system maintenance in the state (i) brings an income (r_{ii}) then the rentability (R) due to the system evolution in time is estimated on the income $v_i(t)$ basis resulting from the system transfer analised through a series of states:

$$(2-71) \; R = \frac{\Delta V_i(t)}{P_c} = \frac{\Delta t}{P_c}\left[r_{ii} + \sum_{j=1} p_{ij} r_{ij} + \sum_{i=1}^{N} P_{ij} V_j(t)\right] + \sum_{j=1} p_{ij} r_{ij}(\Delta t) \frac{1}{P_c};$$

where:

P_c = cost price;
P_{ij} = the probability of the system transfer from the state (i) to the state (j);
p_{ii} = the system operation probability in the state (i);
V = the income difference obtained due to the evolution in time of the analysed process.
N = number of state.

Deriving the relation (2—71) with respect to the time it is obtained a differential equation of the form;

$$\Delta V_i'(t) = \left[\gamma_{ii} + \sum_{j=1} P_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} V_i(t)\right]; \tag{2—72}$$

Using the Carson-Laplace's transformation the differential equation in an algebric equation is transformed and it is derived;

$$V(t) = \overbrace{\left[tp(r_{ij} + \sum p_{ij} r_{ij})\right.}^{g} + \overbrace{\left. R(r_{ij} + \sum_{j=1} p_{ij} r_{ij})\right]}^{V} = \mathrm{tg} + V \tag{2—73}$$

where:

(P) is an income matrix with constant elements, having identical lines and (R) is a matrix with elements represented by rational functions. The determination of the optimum strategy can be effected on the R. Howard's algorithm basis under the form:

$$g(0+1) = \max_{k \in K}\left[r_{ii} + \sum_{j \neq 1} p_{ij} r_{ij}\right]_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} V_j(0). \tag{2—74}$$

0 = interration order
(k) = the strategy sets considered from which the strategy (k) is interesting.

If the possibility of actualization of the investments funds used to provide the installation operation is taken into account then the medium income cumulated due to the system evolution it is writen as:

$$V_i(t+\Delta t) = (1 - r\Delta t)\left\{\left[1 - \sum_{j \neq 1} p_{ij}\Delta t\right][r_{ii}\Delta t + V_i(t)] + \sum_{j=1} a_{ij}\Delta t[r_{ij} + V_i(t)]\right\} \tag{2—75}$$

Deriving the relation (2—75) it may be obtained the matricial differential equation of the form;

$$V'(t) + rV(t) = r_u + \sum_{j=i} p_{ij} r_{ij} + \|p_{ij}\| V(t) \tag{2—76}$$

The differential equation (2—76) is transformed in an algebric equation using the Carson. Laplace's transformation the anticipated income is obtained with a relation of the form;

$$(2-77) \qquad V_i = \frac{1}{\alpha} r_u + \sum_{j \neq 1} p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

On the Howard's algorithm basis it can be determined also the maximum speed of increase of the income (v). The algorithm presented can be applied without difficulties to complex processes too using digital computers.

The determinist mathematic model of the expenses for the realiability may be written under the form;

$$(2-78) \qquad C_{sF}^{(d)} = \left[\sum_{j=1}^{n} m_j c_j + SF_s \right] = \left[\sum_{j=1}^{n} m_j c_j + SF_{is} \right]$$

m_j = number of elements which should replace the failing ones.
c_j = the cost of the elements purchased as spare parts
s = production cost during the period when the element that fails is repaired or relaced.
$F_{is} = (1 - F_s)$ = insucces factor,
F_s = insuccess factor concerning the installation operation.

The probabilist mathematic model of the expenses for the reliability may be written;

$$(2-79) \quad C_{sF}^{pr} = \sum_{f=1}^{nf} (m_f p_{af} C_f + t_f p_{mf} \cdot p_c \cdot p_{af}) = \sum_{f=1}^{nf} [m_f C_f + S_f (1 - p_f)] p_{af}$$

where :

m_f = number of operating elements in the analized diagram
c_f = cost of the faulty element taking into account the conditions of normal or exceptional purchase.
t_f = the installation outage duration.
p_c = the cost price of the production undelivered during the outage time, to which the damages appearing to the consumer or supplyer (installation failures, production outages to the consumer caused by the undelivering of the unmanufactured product should be added.
s_f = the cost of failure at the interruption of the technologic line when the element (f) failed.
P_f = operation probability of the element (f) in the considered diagram.

In order to determine the operation probabilities it is considered a technologic line formed by parallelly connected elements in series. The probability (P) that all elements in the diagram with the parallel elements

to operate with out failures is calculated asfollows :

$$(2-80) \qquad P_p = 1 - \prod_{i=1}^{mf} (1-P_i) = \left(1 - \prod_{i=1}^{mf} q_i\right)$$

P_i = the element operating probability
q_i = the element (i) fault probability

The relation (2—80) is good for the link with elements in parallel. If the elements are considered in series — parallel the probability is calculated by relation :

$$(2-81)\ P = P_{s-p} = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \prod_{i=1}^{mf} (1 - p_{ij})\right] \text{ or } p_{s-p} = [1-(1-p)^m]^n = p$$

The reliability of a production system may be extended from part and machines to material stocks, spare parts and even men. Therefore a particular care should be observed to the materials and spare parts acceptance, and to the adequate qualification of all categories of employees so that the entropy of the analysed system should be in continuous decrease.

Management Chair
Polytehnical Institute ,.Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *Nicolae Ceauşescu* Raport la cel de al X-lea Congres al P.C.R., Editura Politică Bucureşti 1969.
2. *Manea Mănescu*, ş.a. Metode matematice moderne aplicate în organizarea şi planificarea lucrărilor de construcţii şi montaje Editura Academi i R.S. România, 1969.
3. *Bîrlea Ştefan* — Entropia în sistemele cibernetice industriale Comunicare la sesiunea cadrelor didactice din Institutul politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, mai 1970.
4. *Penescu C.* ş.a — Procese optimale Editura Academiei R.S. Română, Bucureşti 1970.
5. *Oskar Longe* — Decizii optimale. Bazele programării Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1970.
6. *Onicescu Octav* — Principiile teoriei probabilităţilor Editura Academiei R.S. Română, Buc. 1970.
7. *Rusitoru Gh. şi Costache N.* — Contribuţii la studiul aplicării sistemuluj PROMT în întreprinderile constructoare de maşini — Comunicare la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'', Bncureşti, 1970.
8. *Anton Gheorghe, A. Carabulea şi Gh. Rusitoru* — Contribution to the Study of the Premises of Decisional Informaties În Buletinul Institutului politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej'', Bucureşti, nr. (1—2) 1971.
9. *A. Petrescu* — Calculatoare automate şi programare Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti 1971.

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele şi iniţialele de prenume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

I.P.I. c. 3279

40 820

1974 MAR 30

1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXXV NUMĂRUL 6 ANUL 1973,
NOIEMBRIE – DECEMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquees" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых вышусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского сосратва Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинституских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présenté, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVITEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI KÖNYVTÁR

BULETINUL
INSTITUTULUI
POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI

TOMUL XXXV — NUMĂRUL 6

NOIEMBRIE — DECEMBRIE
1973

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. dr. ing. *Petru Baltă*; Prof. dr. docent ing. *George Bărănescu*, Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent *Emilian Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Gleb Dăgan*; Prof. dr. ing. *Alexandru Fransua*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* (secretar științific) Prof. dr. docent *Gheorghe Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. ing. *Nicolae Manolescu*; Prof. ing. *Ștefan Mantea*; Prof. dr. ing. *Marius Preda*; Prof. ing. *Mihai Renert*; Conf. dr. ing. *Mircea Soare*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*.

Redactor responsabil

Rector

Prof. dr. docent *Radu Voinea*

Membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

Elena Tănăsescu
Asupra comportării asimetrice a funcțiilor de o variabila 21

Z. Stoian
Asupra compatibilității și dependenței evenimentelor 29

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

T. Ionescu, M. Turtoi, Aurelia Tudor Cristescu
Das Studium des Verhaltens der WO_4^{2-}—, VO_3 —, und MoO_4^{2-}— Ionen aus den Na_2CO_3 Lösungen auf verschiedenen Typen von Anioniten 31

Fl. Daneș
O metodă de studiu a dependenței regimului cinetic al procesului catalitic și a activității catalizatorilor de parametrii texturali și de proprietățile fazei externe 39

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

B. Grünwald, I. Ianovici
Possibilities to Estimate the Convective Heat Transfer within the Combustion Engine Cylinder 57

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru
Determinarea soluțiilor optime de arbori cotiți pentru motorul în V, în doi timpi, cu cilindri intercalați 77

UTILAJ CHIMIC

Z. Manolache
Starea de eforturi unitare în învelișul cilindric cu perete subțire în procesul de ridicare 93

AVIAȚIE

Al. Marinescu, St. Staicu
Manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice . . 103

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIEI DE MAȘINI

C. Dumitraș
Considerații privind starea de eforturi unitare în cazul așchierii metalelor . . 125

MANAGEMENT

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru
Contributions to the Study of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions III 133

Резюме

Д.К, 517

Е. Тэнэсеску

К вопросу об асимптотическом представлении функций одной переменной

В настоящей статье дается несколько типичных примеров асимтотических кривых данной функции и способ их вычисления. Эти кривые весьма важны для сравнения данной функции с другими в окрестностях несобственных точек ($+\infty$) и ($-\infty$).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 517

З. Стоян

К вопросу о совместимости и зависимости явлений

Выводится понятие „отношение совместимости" двух явлений и понятие „отношение зависимости", при помощи которых можно сравнивать вероятность явления, находящегося в поле вероятности, и вероятность того же явления, находящегося в подполе вероятности, приложенного в начале. Понятие зависимости исследуется только как частный случай а именно, когда отношение зависимости равно единице.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 66

Т. Д. Ионеску Д. Туртой, А. Т. Кристеску

Исследование адсорбции WO_4^{2-}, VO_3 и $M_0O_4^{2-}$ ионов из карбонатных растворов на разных типах анионитов

Представляются лабораторные данные по адсорбции вольфрамат, ванадат и молибдат-ионов из растворов карбоната натрия при помощи анионного обмена. На основе полученных данных были установлены лиотронные ряды анионитов для изучения анионов и была показана возможность извлечения вольфрама из щелочей, полученных при щелочном выщелачивании.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 541.1

Ф. Данеш

Метод исследования кинетического режима каталитического процесса и активности катализатора.

Показано, что выражение скорости сложного каталитического процесса может быть упрощено с помощью нового метода — выражение общей скорости как функцию предельных скоростей отдельных процессов. Этот метод, основанный на аналогии с электрическими схемами, позволяет линиаризацию зависимости общей скорости от предельных скоростей процессов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Summary

D.C. 517

Elena Tănăsescu

On the Asymptotic Behavior of one Variable Functions

This paper contains some signifficant examples of asymptotic curves of a given curve and the method by which they are computed.

These curves have a great importance in the comparasion and aproximation of a function by other more simple ones in the neighbourhood of the improper points $(+\infty)$ and $(-\infty)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 517

Z. Stoian

On Compatibility and Dependence Events

The notion of compatibility ratio of two events and that of dependence ratio are presented, by means of which a comparison is made between the probability field and the probability of the same event in a probability sub-field of the one given at first. The notion of independence represents a special case when the dependence ratio is equal to the unity.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 66

T. Ionescu, M. Turtoi, Aurelia Tudor Cristescu

The Study of the Retention of VO_4^{2-}, VO_3^- and MoO_4^{2-} Ions from Na_2CO_3 Solutions by Anionic-exchange,

In this paper, the experiments regarding the retention of WO_4^{2-}, VO_3^- and MoO_4^{2-} ionsfrom sodium carbonate solution by anionix — exchangers are presented.

On the basis of experimental results affinity series were established and the possibility of using this method for the separation of tungstat ion from solution obtained from the alkaline attack was shown.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 541.1

Fl. Daneş

Method for Study of the Kinetic Regime of the Catalytic Process and of the Catalyst Activity.

The relationship for the global rate of the catalytic process can be simplified by expressing of the global rate in terms of so-called „maximal rater „of the component processes.

Founded on the analogy with the electrical skema, this method allows the linearisation of the real relationship for the global rate as a function of the maximal rates of the component processes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 621.43

Б. Грунвалд, И. Ианович

Возможности оценки теплопедачи в цилиндре лвигателя цнутреннго сгорания

В статье описываются исследования проведенные авторами для получения наилучшей величины глобальной передачи а также среднего тепла, от газов к стенкам цилиндра двигателя внутреннего сгорания, на основе диаграммы давления.

Сравниваются величины полученные для различных гипотез расчета при обработке експериментальной диаграммы а также оцениваются различные причины погрешностей.

Заключеним, представляется программа расчёта на языке ФОРТРАН, используемая для обработки индикаторных диаграмм.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

Д.К. 621.34

Анка Родика Бэрэнеску, А. Маноле, К. Сильвестру

Формы коленчатых валов оптимальные для V-образных двухтактных двигателей с вставленными цилиндрами

Представляется анализ конструктивных форм оптимальных с динамической точки зрения для V-образных двухтактных двигателей с вставленными цилиндрами, равномерной раскладкой ожигания, с 2,4 и 6 цилиндрами. Устанавливаются формы коленчатых валов, угол между рядами цилиндров и порядок работы которые удовлетворяют требование наилучшей уравновешенности двигателя.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 66

З. Манолаке

Состояние напряжений в тонких цилиндрических стенках при подъеме.

В работе рассмотрено состояние напряжений в тонких цилиндрических стенках в случае подвески обечайки, по образующей, находящейся под действием собственного веса.

Подчеркивается, что для обечаек больших размеров, напряжения приобретают большие значения и могут достигать предела текучести. Таким образом появляются остаточные деформации, которые имеют отрицательное влияние на точность обечайки.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 629.135

Ал. Маринеску, Шт. Стайку

Оптимальное встречное маневрирование с минимальным количеством горючего на эллиптических орбитах

В работе изучается оптимальное маневрирование встречи двух космических аппаратов на эллиптических орбитах с минимальным расходом горючего. Мишень без пропульсирующих установок движется по эллиптической орбите вокруг Земли или другой планеты в виде сателита, а следящий аппарат, предусмотренный пропульсирующей установкой, движется по ближайщей орбите.

Вариационная задача маневрирования сформулирована как задача условного экстремума, имея ввиду как линейные уравнения движения, так и нелинейные движения следящего аппарата.

Выводятся точные и приблизительные выражения для оптимальных законов вариации параметров движения следящего аппарата, на основе которых производятся цифровые применения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д.К. 621

К. Думитраш

К вопросу о напряженном состоянии при резании металлов.

В работе изучается явление формирования стружки[как процесс объемной деформации и даются математические уравнения для определения величины напряжений сдвига по трем данным направлениям.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Д. ЛК. 65.012.4

А. Карабукеа, Г. Антон Г. Рущитору,

К вопросу об изучении пограммирования производства в условия юверенности и неуверенности III

Составляются математические определительные и вероятные образцы с целью изучения программирования производств в условиях уверенности и неуверенности.

Составленный алгоритм имеет в основе концепты операционального исследования, облегчающие изменение структуры расчетных расходов, имея в виду теорию стоков, теорию ожидания теорию износа и надежности в эксплуатации теорию рабочей силы, а также теорию распределения во времени капиталовложений в уверенных или неуверенных условиях праграммирования производства.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

D.C. 621.43

B. Grünwald, I. Ianovici

Possibilities to Estimate the Convective Heat Transfer within the Combustion Engine Cylinder

The present wotk shows the authors' attempt to obtain the best values for the total heat transfer and for the average heat fluxes, using only the pressure-time history.

Since instantaneous gas pressure was used, it was important to check all the requirements of this method.

The results derived from an experimental pressure history, obtained with different calculation hypotesis are presented, and the error sources are evaluated.

Finally the program, written in FORTRAN language is presented, adequate to be used when a pressure history is available.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

D.C. 621.34

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru

Optimal Crankshaft Solution for 2- Stroke Vengines with Intercalated Cylinders.

The paper analizes the optimal crankshaft solutions, from a dynamic point of view for 2 — stroke V engines with intercalated cylinders and uniform distributed solutions, having 2, 4 and 6 cylinders.

For each solution, the ignitions succession and V angle values are establisched to insure the best balancing.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 66

Z. Manolache

The State of Unit Stress During the Lifting of a thin Wall Cylinder

This paper is dealing with the state of unit stress along the generator, when lifting a cylinder with thin wall under his own load.

It is shown that in the case of a great dimension cylinder the unit stress could reach a considerable value, very close to the limited creep stress and could lead to remanent deformations with unfavorable effects on the execution accuracy.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 629.135

Al. Marinescu S. Staicu

Optimal Rendezvous Manoeuvre at the Elliptic Pathes with Minimum Fuel Consumption.

The optimal rendezvous manoeuvre of two space elliptic flight pathes with minimum fuel consumption is investigated. The target body shall move on an elliptic flight path as a satellits of the earth or another planet and the foolwing (propelled) body on a neighbouring path. The variational problem for the manoeuvre is formulated as an extremum task with constraints with considering the linear and the nonlinear equations of motion for the propelled flying body.

Exact and approximative expressions for the optimal variational laws of the flight parameters of the propelled flying body are derived due to wich numerical appalications are performed.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 621

C. Dumitraş

Considerations on the Unit Stresses in Metall Cutting

The work deals with the chip formation phenomenon as a volume distor-tion process and presents equations for the unit shearing stress magnitude in three given directions.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.C. 65.102.4

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru,

Contributions to the Study of the Production Programming in Certaintù and Uncertaintù Conditions III

The paper shows the way to develop determinist and probabilist mathematical models whose application facilitates the optimation of production programming in certainty and uncertainty conditions.

The conceived algortihm is based on the operational research concepts for building the mathematical model structure by which such theories as storage, waiting, wear, production order, reliability, and production quality, general time bagged and investments theory are operating. These mathematical models can be applied in certainty and uncertainty conditions of production programming.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

C. D. 621.43

B. Grüunwald, I. Ianovici

Possibilités d'estimation du transfert de chaleur du cylindre d'un moteur à combustion interne

L'article présente les recherches effectuées par les auteurs au but d'obtenir la meilleure valeur du transfert global et du flux moyen de chaleur des gaz vers les parois du cylindre d'un moteur à combustion interne, conformément à la diagramme d'indicateur.

Les valeurs qui sont obtenues en interpretant une diagramme d'indicateur expérimentale dans plusieurs hypothèses de calcul sont comparées et les différentes sources d'erreurs sont évaluées.

Finallement, on présente le programme de calcul en langage FORTRAN qui peut être utilisé à l'interpretation d'une diagramme d'indicateur.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

C.D. 621.34

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru

Solutions de vilebrequins optima pour les moteurs en V à deux temps à cylinres intercalés

L'ouvrage analyse les solutions constructives, optima du point de vue dynamique pour les moteurs en V à cylindres intercalés, à deux temps, à allumages uniformément répartis, avec 2, 4 et 6 cylindres. On précise les solutions de vilebrequins, l'angle entre les lignes des cylindres et la succésionn des allumages entre les lignes des cylindres qui assurent le meilleur équilibrage du moteur.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 66

Z. Manolache

L'état des efforts unitaires dans l'enveloppe cylindrique à paroi mince dans le procesSus du levage

L'article analyse l'état des efforts unitaires dans le cas d'attache du tronçon cylindrique à paroi mince sur la génératrice, sollicitépar le poids propre.

On montre que, pour les tronçons de grand gabarit, les efforts unitaires sont importants, pouvant atteindre la limite du coulement et donc, l'apparition des déformations rémanentes, avec des conséquences défavorables sur la précision de l'exécution.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 629.135

Al. Marinescu St. Staicu

Manoevre optimale de rencontre sur des trajectoires elliptiques ayant une consommation de combustible minimale

L'étude concerne la manouvre rencontre optimale de deux engins spatiaux sur des trajectoires elliptiques ayanr une consommation de combustible minimale. La cible dé pourvue d'installations de propulsion este destinée à se mouvoir sur une trajectoire elliptique en tant que satellite de la Terre ou d'une autre planète et l'engin de poursuite (propulsé) doit se mouvoir sur une trajectoire voisine. Le probléme variational pour la manoeuvre est formulé comme tâche extremum aux conditions additionnelles, en tenant compte des equiations de mouvement lineaires et non — lineaires pour l'engin propulse. On déduit des expressions exactes et approximatives pour les lois de variation optimales des paramètres de vol de l'engin propulsé.

Utilisant ces expressions on a exécuté des applications numèriques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 621

C. Dumitraş

Considérations concernant l'état des eforts unitaires pendant la coupe de métaux

L'ouvrage traite le proces de formation des copeaux comme un proces de déformation de volume. On présente les relations mathématiques pour déterminer l'efort unitaire de coupe, suivant trois directions données.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 65-012-4

A. Carabulea, Gh. Anton Gh. Ruşitoru,

Contribution a l'étude de la programmation de la production dans des conditions de certitude et d'incertitude III

On construit des modeles mathématiques déterministes et probabilistes pour étudier la programmation de la production dans des condition de certitude et d'incertitude.

L'algorithme conçu est basé sur les concepts de la recherche opérationnelle qui facilitent le changement de la structures des depenses de calcul en tenant compte de la théorie des stoks, la théorie de l'attente. la théorie de l'usure et de la sureté en fonctionnement, la théorie de la force de travail et la théorie de deploiement en temps des investissements dans des conditions de certitude et d'incertitudes de la programmation de la production.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

Résumé

C.D. 517

Elena Tănăsescu

Sur le compartement asymptotique des fonctions d'une variable

Cet article contient quelques exemples de courbes asymptotiques d'une courbe dennée et le principe utilisé pour leurs détermination.

Elles ont une importance particulière pour la comparaison et l'approximation fonction par d'autrs fonctions plus simples au voisinage dea points impropres $(+\infty)$ et $(-\infty)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 517

Z. Stoian

Sur la compatibilitée et sur la dépendence des événements

On introduit la notion de rapport de compatibilite et celle de rapport de dépendence à l'aide de qui on peut faire une comparaisen entre la probabilitee d'un événement dans un champ de probabilitée et la probabilité de celui considéré. La notion d'indépendence se dégage comme un cas particulier, quand le rapport de dépendence este égal a l'unité.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 66

T. D. Ionescu D. M. Turtoi Aurelia Tudor-Cristescu

L'étude sur la retention d'ions de WO_4^{2-}, VO_3^- et MoO_4^{2-} dans des solutions de Na_2CO_3 sur différéntes sortes d'echangeurs d'anions.

Dans cete étude on présente les résultats obtenus dans laboratoire concernant la retention d'ions de wolframate, vanadate et molybdate dans les solutions de Na_2CO_2 par anionéchange. Sur ces resultats on a établi des séries d'affinitee pour les échangeurs d'anions qui ont ete étudiés. On a ete démontré aussi, la possibilité d'emploi de cette méthode pour la séparation de wolfram de solutions obtenues par désagregation alcalíne.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C.D. 541.1

Fl. Daneş

Methode pour l'étude du régime cinétique du processus catalytique et de l'activité du catalyseur

On montre que l'étude de la vitesse du procéssus catalytique, quand celui-ci dépend d'un grand nombre des variables, peut être simplifié en utilisant une méthode qui exprime la vitesse globale comme fonction des vitesses maximum possible des sous-procèsses composants. Par une analogie avec les schémas électriques, cette méthode permet la linéarisation des dépendances réelles, de la vitesse globale des vitesses maxima des sous-processes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Zusammenfassung

D.K. 517

Elena Tănăsescu

Uber die asymptetische Betragung von Funktionen von einem Veranderliche

Diese Arbeit enthält einige konkrete Beispiele über asymptotische Kurven für eine bestimmte Kurve und die Art ihrer Bestimmung.

Diese Kurven sind sehr wichtig für den Vergleich einer Funktion mit anderen einfacheren Funktionen in der Nachbarschaft der ungeeigneten Punkte $(+\infty)$ und $(-\infty)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Z. Stoian D.K. 517

Über die Verträglichkeit und über die Abhängigkeit der Ereignisse

Es wird der Begriff eines Verträglichkeitsverhältnisses und derjenige eines Abhängigkeitsverhältnisses von zwei Ereignissen eingeführt. Mit Hilfe dieser Begriffe kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem Wahrscheinlichkeitsraum und die Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses in einem Wahrscheinlichkeitsunterraum des ersteren verglichen werden. Der Begriff der Unabhängigkeit tritt als Sonderfall auf und zwar wenn das Abhängigkeitsverhältnis der Einheit gleich ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.K. 66

T. D. Ionescu D. M. Turtoi Aurelia Tudor-Cristescu

Das Studium des Verhaltens der WO_4^{2-}, VO_3^- und MO_4^{2-} Ionen aus den Na_2CO_3 Lösungen auf verschidenen Typen von Anioniten

In der Arbeit werden Versuchergebnisse bezüglich des Verhaltens von Wolframat, Vanadat und Molybdationen durch ionenaustausch gebracht. Auf Grund dieser Daten werden Affinitätsserien der Anionentauscher für die untersuchten Anionen bestimmt und es wird die Möglichkeit der Anwendung der Separationsmethode für Wolfram au s bei alkaliner Zersetzung erhaltenen Lösungen gezeigt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Fl. Daneş D.K. 541.1

Untersuchungsmethode des kinetischen Regimes und der Aktivität des Katalysators

Es wird gezeigt, dass die Untersuchung der Geschwindigkeit eines von mehreren Variablen abhängigen katalytischen Prozesses vereinfacht wird, wenn die Gesamtgeschwindigkeit als Funktion der maximal möglichen Werte von Geschwindigkeiten der Teilprozessen ausgedrückt wird. Die vorgeschlagene Methode wendet eine Analogie mit den elektrischen Schemata an, und besteht aus der Linearisierung der reelen, nicht linearen Abhdngigkeit der Gesamtgeschwindigkeit von den maximalen Werten der Geschwindigkeiten der Teilprozessen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

DK 621.43

B. Grünwald, I. Ianovici

Mogliehkeiten für die Schötzung der Wörneübertragung in den Zylinder des Verbrennungsmtors

Die Arbeit stellt die von Verfasern durchgeführte Versuchen, zwecks der Bestimmung des genauestes Wert für die gesamte Wörmemenge und für den duchschnittlichen Wörmedurchfluss zum Zylinderwand eines Verbrennungsmotor, auf Grand der p—v Diagramme dar.

Dei Werte, die durch verschiedene Rechnungsannähmen, für die Bearbeitung einer experimentäller p—v Diagramme erericht wurde, wird vergleicht und die verschidenen Fehlerquelle wird geschätzt. Am Ende wird der Rechnungsprogramm in FORTRAN-sparche dargestellt, der nutzbar für die bearbeitung einer p—v Diagramme ist.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti., Tom. XXXV, Nr. 6/1973

D.K. 621.34

Anca Rodica Bărănescu A. Manole C. Silvestru

Optimale Formen der Kurbelwelle für Zweitaktverbrennungs motoren in V-Form mit zwischengeschalteten Zylindern

In der Arbeit werden die konstruktiven Formen der Kurbelwelle analysiert, welche für Zweitaktverbrennungsmotoren in V—Form, mit 2, 4 und 6 zwischengeschalteten Zylindern und mit uniform verteilten Entzündungen bestmöglich sind. Hier werden die Kurbelwellenformen, der Winkel zwischen den Zylinderreihen und die Zündordung bestimmt, die optimall für das Gleichgewicht des Verbrennungsmotors sind.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

Z. Manolache D.K. 66

Zustand der Einheitsspannungen in einem Zylinder mit dünnen Wänden beim Heben

Die vorliegende Arbeit untersucht den Zustand der Einheitsspannungen beim Heben eines Zylindermantels mit dünnen Wänden entlang der Erzeugenden, durch Eigengewicht hervorgerufen.

Es wird gezeigt, dass im Falle eines Zylindermantels von grossen Abmassen die Einheitsspannungen einen erheblichen Wert aufzeigen, den sogar die Flussgrenze erreichen können und somit auch zu remanenten Verformungen führen, mit ungünstiegen Folgen für die Bearbeitungsgenauigkeit.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.K. 629.143

Al Marinescu St Staicu

Optimale Rendezvousmanöver auf elliptischen Flugbahnen bei minimalem Treibstoffverbrauch

Es wird das optimale Rendezvousmanöver zweier Raumfahrzeuge auf elliptischen Flugbahnen bei minimalem Treibstoffverbrauch untersucht. Der Zielkörper soll sich auf einer elliptischen Flugbahn als Satellit der Erde oder eines anderen Planeten un der verfolgende (angetriebene) Flugkörper auf einer benachbarten Bahn bewegen. Das Variationsproblem für das Manöver wird als Extremumaufgabe mit Nebenbedingungen formuliert, wobei sowohl die linearen als such die nichtlinearen Bewegungsgleichungen für den angetriebenen Flugkörper berücksichtigt werden. Es werden exakte und angenäherte Ausdrücke für die optimalen Variationsgesetze der Flugparameter des angetriebenen Flugkörpers abgeteilt, auf Grund derer numerische Anwendungen Datenverarbeitungsanlagen durchgefürhrt wurden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

C. Dumitraş D.K. 621

Beitrag zur Ermittlung der Spannung bei der Zerspanungsbearbeitung

In der vorliegenden Arbeit beschreibt man das Prezess der Spanentstehung bei der Zerspannung als räumlicher Vorgang der Spannverformung. Auf diese Weise ist es möglich das Spanntstechungsprozess in bezug auf die Elastizität-Plastizitätstheorie zu klären.

Weiterhin wurden die Gleichungen zur Berechnung der Werte der Subspannung begründet, die in Abhängigkeit von den Werkstoffeigenschaften ermittelt worden sind.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti Nr. 6/1973

D.K. 65.01.24

A. Carabulea, Gh. Anton Gh. Ruşitoru,

Beiträge zum Studium der Produktionsprogrammierung unter Sicherheits und Unsiehercheits bedingungen III

Es werden die mathematischen determinierenden und Modelle zur Untersuchung der Produktionsprogrammierung unter Sicherheits — und Unsicherheitsbedigungen konstruiet.

Der entworfene Algorithmus grundet sich aud die Begriffe der Operationsforschung, die Anderung der Struktur des Rechnungsanfroands unter Berücksichtigung der Vorats-Warte zeit-Abunkungs- Betriebssichurheits-Arbeitskraft-Zeitechelomeren therie der Investitionen unter Sicherheits — und Unsichicherheits bedingungen ermöglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" Bucureşti,, Tom. XXXV, Nr. 6/1973

SUMMARY OF THE 1973 REVIEW

MATHEMATICS

D. Filipescu, The Measure of Some Aleatory Sets Within the Riemann Spaces with Constant Courvature (1—1973).

C. Radu, The Dependence Stress Straine in for the Polymer Crystaline Material (2—1973).

C. Bucur, Approximation Formula of Interpolated Type for Descontinuous Functions (2—1973).

D. Filipescu, About Some Aleatory Sets within the Spaces E_3 and En (3—1973).

C. Bucur, Mixed Approximation Formula for Two Variables Functions (3—1973).

C. Drăguşin, The Study of the Equivalence of the Multipoles by Means of the Bollean Equations (4—1973).

N. Mirescu, About a Transformation in the Field of an Epure (4—1973).

Liana Alexandra Popescu, An Effective Method for Construction of Algebric Pollinomials of Best Approximation for Functions) (5—1973).

Elena Tănăsescu, On the Asymptotic Behaviour of one Variable Functions (6—1973).

Z. Stoian, On Compatibility and Dependence Events (6—1973).

PHYSICS

G. C. Moisil, Reciprocity of the Electric Potential and of the Conductivity in Inhomogeneous Media in Steady-state Condition (2—1973).

C. Moţoc, G. Teodorescu, G. Cone, Radiation Effects on Ammonium Dihydrogen Phosphate by Electron Irradiation (2—1973).

D. Bogdan, Tr. Creţu, Gh. Macarie, The Establishment of the Formfactors Formulae for Beta Transitions Bettwen Nuclear States Described by Quasiparticle — Phonon Interaction (4—1973).

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. Teoreanu, Marcela Muntean, The Influence of Electrolytes upon the Hardening of Portland Cement and its Silicatic Constituents (1—1973).

Viorica Cimpu, Helpporcelains from Roumaninan Raw Materials (1—1973).

Fr. Albert, The Calculation of Molecular Formulas from the Molecular weight and the Functional Analysis (2—1973).

I. Drimuş, I. Iliuţă, Naphthenic Nitriles and Naphthenic Amines (2—1973).

S. Daneş, F. Daneş, Liquid Ionites, Physico-chemical Bases for Technological Application (2—1973).

Th. Bădescu, T. D. Ionescu, Studies about Interdependence between the Pigments Moistering and Rheologycal Propertyes of Ony Dispers Systems on Yellow Chrom Bases (3—1973).

Gr. Teodorescu, Methods for the Determination of Quinine and Quinidine. Visible and I.R. Spectra of the comprind obtained by the combination between quinine and ammonium reineckate (3—1973).

G. Costeanu, Orlansa Landauer, Cornelia Mateescu, The Influence of the Medium Viscosity on the Reaction Velocity in Acids Hydrolyse of Some Aliphatic Esters in Mixed Solvents (4—1973).

I. Constantinescu, Irina Constantinescu, Obtention of a Fertilizer with Suspension Microelement (4—1973).

Agneta Bâtcă-Cerbu, M. Ionescu, Silver Dosage from Solutions by Means of Synthetic NaA Type Zeolite (5—1973).

T. Ionescu, M. Turtoi, Aurelia Tudor Cristescu, The Study of the Retention of WO_4, VO_3 and M_0O_4 Ions from Na_2CO_3 Solutions by Anionic — exchange (6—1973).

Fl. Daneş, Method for Study of the Kinetic Regime of the Catalytic Process and of the Catalyst Activity (6—1973).

MECHANICS

D. Voiculescu, Method for Determining Deformation in a Straight bar Untergoing Discontinuous Transverse Loads (1—1973).

N. I. Pandrea, A General Graphic Method for the Kinetic Analysis of Plane Mecanisms (2—1973)

I. Roşca, Study of the Shifts in a Cylinder where an Axially Symmetric Temperature Field is Applied (2—1973).

T. Demian, E. Curatu, D. Tudor, Synthesis of Liver Amplification Mechanisms used in Measuring Apparatuses Having Step Sensitivity (2—1973).

Al. Marinescu, St. Staicu, Francine Atanasiu, The Equations of the Orbital Approaching and Rendez-vous Relative Motion Taking into Account the Planet (4—1973).

O. I. Popescu, Precision Ball Measurements Using a Mechanical Caliper Coupled with a Laser Interferometer System (4—1973).

Z. Manolache, The State of Unit Stress During the Lifting of a thin Wall Cylinder (6—1973).

N. I. Manolescu, C. Niţă, Contribution to the Problem for Establismment of the Conditions for Assuring the Permanent Contact in the Polidine Cams Mecanismes (3—1973).

STRENGTH OF MATERIALS

I. Constantinescu, Lucia Fetcu, Oltea Bogdan. Experimental Determination of Unit Loads at the Interesection Between a Cylindrical Cover and an Ellipsoidal Cover Stressed by Internal Pressure (5—1973).

M. Renert, V. V. Jinescu., G. Nucă, V. Chiriac, E. Fischer, D. Flondor, Stresses and Strains in Laterally Supported Vertical Cylindrical Pressure Vessels (2—1973).

K. Schuller, A. Study on a Non-destructive Method for Determining the Technical Yield Stress for Steel (3—1973).

V. Bogdan, Oltea Bogdan, The Experessions of the Stresses and of the Deformations in a Disk in a Rotation Movement (4—1973).

Vasilica Cossac, Lateral Vibrations of Hanging Pendular Deams with „n" Supports, in the Case of Antisymmetric Buckling (5—1973).

HEAT ENGINE

N. Apostolescu, B. Grunwald, The Estimation of the Gas Temperature within the Cylinder of a Compression Ignition Engine (2—1973).

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru, The Optimal Crankshaft Solutions from a Dynamic Point of V, for 4 Stroke V—Engine with Intercalated Cylinders. (5—1973).

B. Grunwald, I. Ianovici, Possibilities to Estimate the Convective Heat Transfer within the Combustion Engine Cylinder (6—1973).

Anca Rodica Bărănescu, A. Manole, C. Silvestru, Optimal Crankshaft Solutions for 2—Stroke Vengines with Intercalated Cylinders (6—1973).

THERMODYNAMICS

Vs. Radcenco, The Computation of the Losses Generated by the Irreversibility of the Irreversibility of the Gases and Vapour Drosell Effect in the Thermal Engines and Refrigeration Machines (5—1973).

AVIATION

R. Patraulea, On the Supersonic Flow Around the thin Delta Wing with Board Finite Velocities (1—1973).

C. Guță, Some Problems Regarding the Spacecraft Control on Reentering the Atmosfere (2—1973.

St. Găletușe, The Pressure Distribution for the Turbulent Motion of the Air Film, by Considering the Influence of the Inertia Forces (3—1973).

C. Berbente, On a Method for the Aerodynamic Calculation of Wings of Finite Span in Incompresible Flow (5—1973).

Al. Marinescu St. Staicu, Optimal Rendezvous Manoevre at the Elliptic Pathes with Minimum Fuel Consumption (6—1973).

HYDRAULICS

St. Zarea, N. Vasiliu, Analysis of the Pressure Vaves Propagation within a Buffer Reservoir Tapped an a Pipe System (1—1973).

Julieta Florea, V. Panaitescu, On the Study of a Fluid Movement Stability with the Help of Analogue Computers (3—1973).

St. Zarea, N. Vasiliu, New Method for the Construction of the Pelton Bucket and the Experimental Test on a Model (4—1973).

ELECTRICITY

M. Preda, H. Gavrilă, M. Iordache, Application of Splitting Method for Flow-graphs-problems and the Deduction of New Topological Relation (1—1973).

ELECTRIC POWER

Maria Tudose, M. Eremia, Camelia Marinescu, The Calculus of the Dynamic Stability of an Electrical System which Uses the SSR (Scientific Subprogram Package) of the IBM 1130 Computer (4—1973).

AUTOMATION

A. Petrescu, Electrical Model for the Study of Some Traction Problems (2—1973).

V. Găburici, New Fluidic Oscillators (4—1973).

Irina Athanasiu, The Program ACENC — for the Analysis of Nonlinear Electronic Circuit in d.c. (5—1972)

ELECTRONICS

D. Stoichescu, Some Methods and Techniques for Data Transmisson with Error Detection and Correction (3—1973).

D. Stanomir, A Method for the Analysis of the Systems with Distributed Parameters and Working in Stationary Conditions (5—1973).

MACHINES BULDING TECHNOLOGY

V. Tabără. Contributions to the Study of Hydrostatic Bearing for Precision Machinetools (1—1973).

Z. Duca, C. Minciu, Geometrical Accuracy of Vertical Shaperwheel for Gears Machining by Rolling (1—1973).

I. Ungureanu, V. Tache, Contributions to the Establishing of the Basis of the Calculus of Clamping Forces in Fixtures (3—1973).

C. Minciu, Vibration Mode Determination for the Fictitions Mechanism of the Working Kinematic Chain of the Gear-loath Culling Machines (3—1973).

A. Brăgaru, I. Popescu, On the Concept of Elastic Technological System in the Technology of Construction of Engines (4—1973).

Al. Dorin, Programming of the Vertical Numerical Control Milling Machines in the Case of Working Some Curve Surfaces (4—1973).

Z. Duca, I. Gheorghe, Al. Dorin, Fl. Ionescu, The Shock Sourse of Vibrations in the Frontal Finishing Milling (5—1973).

C. Dumitraș, Considerations on the Unit Stresses in Metall Cutting (6—1973).

TRANSPORT

Al. Neagu, Contributions to the Stating of the Starting Load Variation on the Full-adherence Locomotive Axles with Semi-suspended Engines (1—1973).

A. Cotoranu, Contributions to the Optimizing of the Tonnages and Speeds of the Goods Trains (5—1973).

Al. Stoicescu, About the Stability on Small-Disturbances of the Steady Circular Motion of an Automobile Equiped with Self-Locking Differential (5—1973).

MANAGEMENT

Al. Popa, A. Carabulea, Contributions to the Study of the Operational Duty Optimizing of the Electric Traction I (2—1973).

Al. Popa, A. Carabulea, Contributions to the Study of the Operational Duty Optimizing of the Electric Traction II (3—1973).

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru, Contributions to the Study of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions II (4—1973).

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru, Contributions to the Study of the Production in Certainty and Uncertainty Conditions II (5—1973).

A. Carabulea, Gh. Anton, Gh. Ruşitoru, Contributions to the Study of the Production Programming in Certainty and Uncertainty Conditions III (6—1973).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

MATEMATICA

C.Z.: 517

ASUPRA COMPORTĂRII ASIMPTOTICE A FUNCȚIILOR DE O VARIABILA*

ELENA TĂNĂSESCU

Comportarea funcțiilor algebrice de o variabilă pentru valori foarte mari ale lui $|x|$, adică precizarea monotoniei, concavității, comportării asimptotice în vecinătățile respective ale punctelor improprii $+\infty$ și $-\infty$, joacă un rol important în studiul șirurilor și seriilor de funcții, încît apare necesitatea comparării lor cît mai bune cu funcții mult mai simple.

Definiție Fie $f: E \to R$, o funcție reală astfel încît infinit este punct de acumulare al lui E (în sensul că oricare ar fi $a \in R$, E conține numere reale mai mari decît a, se mai spune în această situație că f are ramuri nemărginite la infinit. Presupunem că există o funcție reală $g: F \to R$ astfel încît ∞ este punct de acumulare pentru F și în plus $\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)]$ există și este egală cu 0. În acest caz, se spune că graficul lui g este o curbă asimptotă la infinit pentru graficul lui f, sau echivalent că cele două funcții f și g sînt asimptotice la infinit. Se pot da definiții echivalente la minus infinit.

Evident, funcția liniară $g(x) = mx + n$, $m, n \in R$ are ramuri nemărginite la infinit. Dacă $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - n]$ există și este nulă, regăsim definiția asimptotelor drepte. Condiția necesară și suficientă pentru existența asimptotelor drepte la infinit este ca $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ să existe și să fie egală cu $m \neq \pm\infty$ și $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$ să existe și să fie egală cu $n \neq \pm\infty$. Cazul asimptotelor orizontale este pentru $m = 0$. Rezultă de aici unicitatea asimptotelor drepte. De la început trebuie spus că spre deosebire de asimptotele drepte, la asimptotele curbe proprietatea de unicitate nu este îndeplinită, deoarece dacă $g(x)$ este o asimptotă curbă a lui $f(x)$ și $h(x)$ este o funcție oarecare pentru care $\lim_{x\to\infty} h(x)$ există și este egală cu zero, atunci $g + h$ este încă o asimptotă curbă a lui $f(x)$. De aici, rezultă că, singurul interes de a studia asimptotele curbe îl constituie indicarea eventuală a unor funcții asimptote cît mai simple sau indicarea unor asimptote curbe de o formă anumită.

* Manuscris predat redacției la data de 3 mai 1972

I. — Dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ şi $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, înseamnă că m, care reprezintă o pantă şi deci o direcţie fiind egal cu zero, indică într-o direcţie paralelă cu axa ox, existenţa unei asimptote orizontale de tip parabolic.

Exemplu

Fie funcţia $f(x) = \frac{x\sqrt{2x}}{x-4}$ unde $E = [0,4) \cup (4, \infty)$

Se observă că graficul acestei funcţii nu admite asimptote drepte la plus infinit. Ne punem problema găsirii unor asimptote curbe la plus infinit de forma $y = a\,x^r$, cu r număr real. Aşa dai impunem ca :

$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax^r] = 0$, deci $\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{2x} + \frac{4\sqrt{2x}}{x-4} - ax^r\right] = 0$ de unde rezultă că $a = \sqrt{2}$ şi $r = \frac{1}{2}$, deci funcţia admite asimptotă curbă pe $y = \sqrt{2x}$.

Se poate indica un mod sistematic de obţinere a unei clase de curbe asimptote. Amintim că au loc dezvoltările în serie :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

unde, seriile sînt convergente pentru orice $x(-1, 1)$. Ne trebuiesc dezvoltări în serii geometrice, al căror domeniul de convergenţă să aibe punctele improprii plus infinit sau minus infinit ca puncte de acumulare. De aceea scriem aşa :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots\ldots\right)$$

şi dezvoltarea din paranteză are loc pentru $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ adică $|x| \geqslant 1$ şi deci satisface condiţia de mai sus cu infinitul, punct de acumulare.

Pentru acest exemplu avem :

$$f(x) = \sqrt{2x}\left(1 + \frac{4}{x-4}\right) = \sqrt{2x}\left[1 + \frac{4}{x}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{16}{x^2} + \ldots.\right)\right]$$

Aceasta constituie așa numita dezvoltare în serie a lui $f(x)$ într-o serie convergentă în puncte oricît de apropiate de infinit.

Curbele asimptotice ale funcției $f(x)$ sînt:

$$g_1(x) = \sqrt{2x},\ g_2(x) = \sqrt{2x}\left(1 + \frac{4}{x}\right),\ g_3(x) = \sqrt{2x}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{16}{x^2}\right),\ \text{etc.}$$

cea mai simplă curbă asimptotică este $g(x) = \sqrt{2x}$ și numai pe aceasta o vom reprezenta:

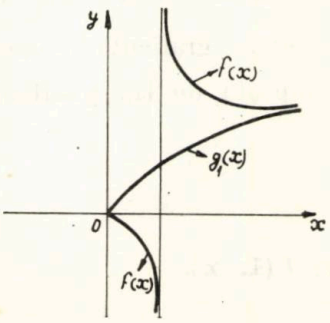


Fig. 1

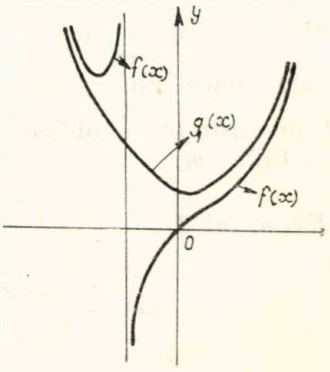


Fig. 2

II. — Dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ și $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ Deoarece m indică o direcție înseamnă că ramura nemărginită a graficului, admite cel puțin o curbă asimptotică, de tip parabolic în direcția axei oy $\left(m = tgu,\ m = \infty \text{ implică } u = \pm\frac{\pi}{2}\right)$

Exemplu

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1} \qquad E = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

Funcția se poate scrie:

$$f(x) = \frac{x^3}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots\right) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots$$

Deci, curbele asimptote graficului acestei funcții sînt:

$$g_1(x) = x^2 - x + 1,\quad g_2(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x},\quad g_3(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},\ \text{etc.}\ \ldots$$

Cea mai simplă curbă asimptotă este $g(x) = x^2 - x + 1$. Fig. 2

III. — Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, există și este finită și în plus dacă $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \pm\infty$ atunci graficul funcției nu va admite asimptote oblice drepte ci o asimptotă de tip parabolic în direcția finită m.

Exemplul 1.

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\qquad E = (0,1)\ U(1,\infty).$$

Într-adevăr $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x} - 1} = \infty$. Curbele asimptotice ale acestei funcții le vom obține scriind funcția astfel:

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \ldots\right) = x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \ldots$$

de unde rezultă că admite următoarele curbe asimptotice

$$g_1(x) = x + \sqrt{x} + 1,\quad g_2(x) = x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{x},\quad g_3 = x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x},\ \text{etc.}$$

Cea mai simplă curbă asimptotică este $g(x) = x + \sqrt{x} + 1$, pe care o vom reprezenta în figura 3.

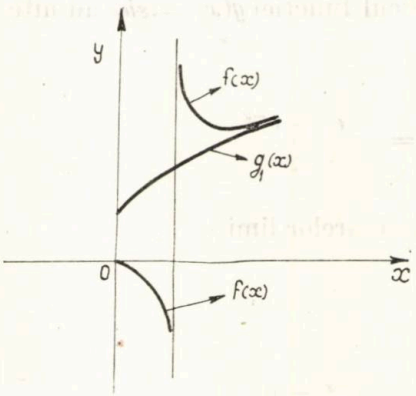


Fig. 3

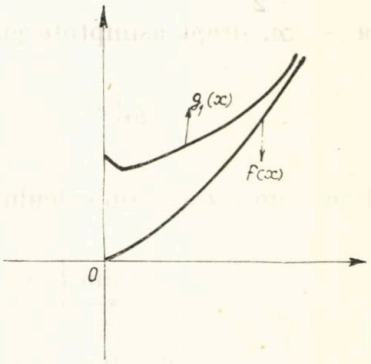


Fig. 4

Exemplul 2.

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \quad E = (0, \infty) \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad m = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1\ \sqrt{x}+1} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x}+1} = -\infty$$

Deci această funcție nu admite asimptote oblice drepte, dar admite o clasă de asimptote curbe în direcția de pantă $m = 2$.

Întreaga clasă de curbe asimptotice se găsește printr-un procedeu analog exemplelor precedente scriind funcția astfel:

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = 2x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \cdots\right)$$

pot fi curbe asimptotice funcției considerate următoarele funcții:

$$g_1 = 2x - 2\sqrt{x} + 2, \quad g_2 = 2x - 2\sqrt{x} + 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad g_3 = 2x - 2\sqrt{x} + 2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}, \quad \ldots$$

Dintre acestea reprezentăm doar curba $g(x) = 2x - 2\sqrt{x} + 2$ în figura 4.

Curbe asimptotice de tip exponențial. Figura 5.

Graficul funcției $f(x) = chx$ admite la $+\infty$ asimptote curbe pe $h(x) = \frac{e^x}{2}$ și pe $g(x) = shx$, în timp ce graficul funcției $g(x) = shx$ admite la $-\infty$, drept asimptote curbe pe :

$$g_1(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \text{ și } g_2(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

după cum rezultă din calculul direct al următoarelor limite :

$$1) \lim_{x\to\infty}\left[\operatorname{ch}x - \frac{e^x}{2}\right] = 0$$

$$2) \lim_{x\to\infty}\left[\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x\right] = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

$$3) \lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{sh}x + \frac{e^{-x}}{2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2} = 0$$

$$4) \lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{sh}x + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

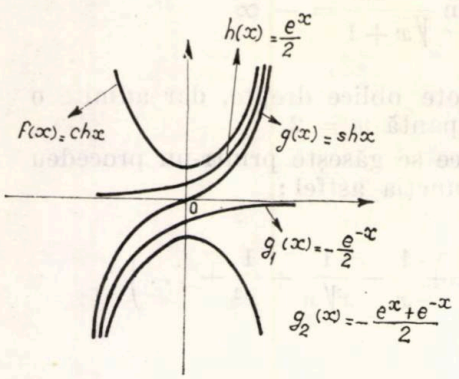


Fig. 5

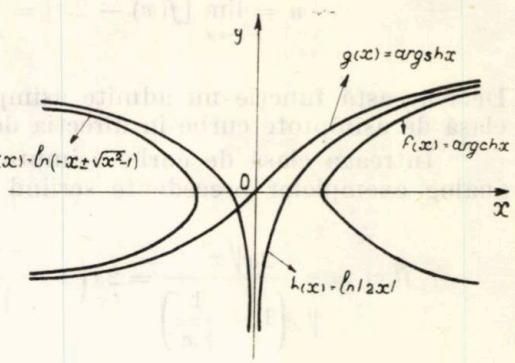


Fig. 6

Curbe asimptotice de tip logaritmic. Figura 6.

Se observă, că ramura nemărginită pozitivă a funcției arch$x$ este asimptotică graficului funcției argsh$x$ cînd x tinde la plus infinit, deoarece : $\lim_{x\to\infty}[\operatorname{argch}x - \operatorname{argsh}x] = 0$. Mai mult chiar, este ușor de văzut că aceste ramuri nemărginite sînt asimptotice și ramurei nemărginite a graficului funcției $h(x) = \ln|2x|$, deoarece : $\lim_{x\to\infty}[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \ln 2x] = 0$

Pe de altă parte, la minus infinit sînt asimptotice, curbele : $\varphi(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 - 1})$ și $h(x) = \ln |2x|$, întrucît

$$\lim_{x \to -\infty} [\ln(-x + \sqrt{x^2 - 1}) - \ln(-2x)] = 0$$

și respectiv sînt asimptotice și ramurile nemărginite ale curbelor

$$\varphi(x) = \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}) \text{ și } g(x) = \operatorname{argsh} x$$

deoarece : $\lim_{x \to -\infty} [\varphi(x) - g(x)] = 0$

În geometria analitică, noțiunea de curbă asimptotă are o definiție puțin diferită de cea din analiza matematică. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții definite și derivabile pe aceeași mulțime E și $x_0 \in E$. Se spune că graficele lui f, g au în x_0 un contact de ordin unul dacă : $f(x_0) = g(x_0)$ și dacă $f'(x_0) = g'(x_0)$. Extinzînd această definiție, graficele lui f și g se zic asimtotice la plus infinit dacă plus infinit este punct de acumulare pentru E și în plus $\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ și $\lim_{x \to \infty} [f'(x) - g'(x)] = 0$

Cu această definiție, apare clar de ce se spune uneori că asimptotele drepte ale unei curbe sînt tangente la curbă în punctele de la infinit.

În particular, dacă o dreaptă $y = mx + n$ este asimptotă la graficul unei funcții derivabile f, la infinit atunci $m = \lim_{x \to \infty} f'(x)$ (o nouă formulă pentru calculul pantei asimptotelor).

Cu această nouă definiție, mai restrictivă a curbelor asimptotice se pot reface exemplele precedente, observînd că din dezvoltările în serie, trebuie luați mai mulți termeni.

Din nou, unicitatea curbelor asimptotice nu este asigurată. Dacă $g(x)$ este asimptotă curbă la $f(x)$ și dacă $h(x)$ este o funcție astfel încît $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$, și $\lim_{x \to \infty} h'(x) = 0$, atunci $g + h$ este deasemenea o asimptotă curbă.

Catedra de matematici

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

NOTĂ

C.Z.: 517

ASUPRA COMPATIBILITĂȚII ȘI DEPENDENTEI EVENIMENTELOR*

ZAHARIA STOIAN

Fie $\{E, K, P\}$ cîmp de probabilitate.

K fiind închisă față de operațiile $\cup$ și $\cap$ și cum R este un corp ne punem problema ce semnificație și ce legătură avem între $P(A \cap B)$ și $P(A) + P(B)$ respectiv $P(A \cup B)$ și $P(A) \cdot P(B)$

Vom arăta că această comparație ne conduce la ideia de compatibilitate și respectiv de dependență a evenimentelor.

Definiția 1. Vom numi raport de compatibilitate a două evenimente $A, B \in K$ numărul $c = \dfrac{P(A) + P(B)}{P(A \cup B)}$ și justificarea denumirii va rezulta din comentariile care vor urma.

Observația 1. Orice $A, B \in K$ avem $c \in [1, \infty)$ deoarece $P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$. Pentru $c = 1$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ și rezultă $P(A \cap B) = 0$, deci $A \cup B \sim \emptyset$ adică A și B sînt aproape sigur incompatibile.

Pentru $c \geqslant 1$, $P(A) + P(B) > P(A \cup B)$ și cum $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ rezultă $P(A \cap B) > 0$ adică probabilitatea realizarii ambelor evenimente este pozitivă, deci sînt compatibile.

Definiția 2. Vom numi raport de dependență a două evenimente $A, B \in K$ numărul $d = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A) \cdot P(B)}$ și justificarea denumirii va urma.

Observația 2. Orice $A, B \in K$ avem $d \in [0, \infty)$

Întrucît $d \cdot P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ vom numi acest produs probabilitatea lui B condiționează de realizarea lui A și analog, $P(A) = d\, P(A)$.

Comentariu. Deoarece realizarea unui eveniment A face posibilă considerarea cîmpului $A \cap K$ în care $P(A) = 1$ și orice eveniment B poate fi considerat în $\{E, K\}$ sau în $\{A, A \cap K\}$ vom arăta că d ne informează asupra următoarei probleme: Cum este probabilitatea lui B în cîmp, față de probabilitatea în subcîmp mai mare sau mai mică?

* Manuscris predat redacției la data de 25 septembrie 1972

Cazul $d < 1$, atunci $d \cdot P(B) = P_A(B)$ deci $\frac{P_A(B)}{P(B)} < 1$ adică probabilitatea lui B pe cîmpul $A \cap K$ e mai mică decît probabilitatea sa pe cîmpul K dacă raportul de dependență este subunitar.

Cazul $d > 1$, atunci $d \cdot P(B) = P_A(B)$ deci $\frac{P_A B)}{P(B)} >$ adică probabilitatea lui B pe cîmpul $A \cap K$ este mai mare decît probabilitatea sa pe K dacă raportul de dependență este supraunitar.

Cazul $d = 1$ $P(B) = P_A(B)$ apare ca un caz particular de dependență și el este tocmai cazul cînd cele două evenimente sînt independente adică probabilitatea lui B pe $A \cap K$ și pe K este aceeași.

Propoziție. Între raportul de compatibilitate, raportul de dependență și probabilitățile celor două evenimente există următoarea relație : $P(A) = \frac{(c-1)\,P(B)}{c+1-c \cdot d \cdot P(B)}$.

Aceasta rezultă din definiția lui c. d, și a relației

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Catedra de matematici II
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

Loéve M. Probability Theory ed 2-a New Tork, 1960.

Neveu I. Bases mathematiques du calcul des probabilities. Masson et Cie. Paris 1964.

Onocescu C, Mihoc Ghe., C. T. Ionescu Tulcea. Calculul probabilităților și aplicații Edit. Acad. R.P.R. 1956.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z.: 66

DAS STUDIUM DES VERHALTENS DER WO_4^{2-} —, VO_3^- —, UND MoO_4^{2-} —IONEN AUS DEN Na_2CO_3 LÖSUNGEN AUF VERSCHIEDENEN TYPEN VON ANIONITEN*

T.D. IONESCU, D.M. TURTOI, AURELIA TUDOR-CRISTESCU

Das Verhalten der Wolframat-, Vanadat- und Molybdationen aus den Natriumkarbonatlösungen erweisen ein technologisches Interesse bei der Herstellung des Wolframs in der Extraktionsphase aus den Laugen, die bei dem Aufschluss erhalten werden und in der Reinigungsphase von den begleitenden Elementen.

Der Aufschluss der Wolframkonzentrate kann basisch oder sauer durchfegührt werden. Im Falle der rumänischen Wolframkonzentate wurde festgestellt, dass man eine erhöhte Extraktionsleistung unter vorteilhaften technisch-ökonomischen Bedingungen sichern kann, durch den Aufschluss der Scheelitkonzentrate in Autoklaven bei 10 at mit Natriumkarbonatlösungen, wobei man einen Überschuss von 300 — 400 % an Aufschlussagenten im Vergleich zu der theoretisch notwendigen Quantität verwendet /1/. Die erhaltenen Lösungen haben folgende Durchschnittszusammensetzung: WO_3 — 140 g/l, Na_2CO_3 — 320 g/l und Verunreinigungen, die aus dem Wolframkonzentrat stammen. Die begleitenden Elemente, welche am schwersten von Wolfram, wegen ihren sehr ähnlichen Eigenschaften zu trennen, sind, sind Vanadium und Molybdän, deren Inhalt manchmal 1% der Quantität an metallischem Wolfram überschreiten kann.

Die Trennung und Reinigung des Wolframs aus den, bei dem Aufschluss der Konzentrate erhaltenen Lösungen, wird durch die Neutralisation der Lösungen und das Niederschlagen der Wolframsäure mit Salzsäure erzielt. Für das Niederschlagen des Wolframs aus sehr verunreinigten Lösungen wird eine intermediäre Niederschlagung mit Kalziumchlorid oder mit Kalkmilch gemacht, danach wird das getrennte Kalziumwolframat mit Salzsäure aufgeschlossen. Die Wolframsäure wird in Ammoniumhydroxyd gelöst und das erhaltene Ammoniumwolframat geht durch Erwärmung oder Behandlung mit Salzsäure in Ammoniumparawolframat über, welches wenig löslich ist. Nach dem Filtrieren wird das Ammoniumparawolframat, wenn dieses dem verlangten Reinigungsgrad ents-

* Manuskript am 20 Iuni 1972 eingegangen

pricht, zu WO_3 verascht oder geht es mit Salzsäure in Wolframsäure über und diese wird zu WO_3 verascht, welches als Endprodukt geliefert wird. Im allgemeinen enthält das Ammoniumparawolframat Verunreinigungen, die zur Notwendigkeit wiederholter Reinigungen durch Behanflungen im folgenden Zyklus führen: Wolframsäure-Ammoniumwolframat-Ammoniumparawolframat /2/.

Alle diese Verfahren führen zu einem erhöhten Verbrauch an Reaktant, Arbeitsleistung und Einrichtungen, Verbrauch grosser Volumen von Lösungen, bedeutenden Verlusten an Wolfram in dem Mutterwässern. Die Verfahren sind schwirig und schaffen technologische Schwierigkeiten in ihrer Durchführung /3/.

In diesem Studium haben wir uns vorgeschlagen, die Ersetzungsmöglichkeiten dieser schwierigen technologischen Phasen durch die selektive Rückhaltung des Wolframions aus den, bei dem Aufschluss der Scheelitkonzentrate mit Sodalösungen erhaltenen Lösungen auf Anioniten zu studieren.

In der Literatur findet man viele Studien bezüglich der Aufhaltung und Trennung des Wolframs von anderen Elementen mit Hilfe der Ionenaustauschharze, aber alle haben einen rein analytischen Charakter, weil, vom technologischen Standpunkt aus gesehen, sie unannehmbare Bedingungen stellen.

In schwach sauren, neutralem oder basischem Medium befindet sich das Wolfram in anionischer Form und diese Tatsache führte zu einem schwachen Studium des Aufhaltens des Wolframs auf Kationiten. Man kann eine Trennung des Wolframs vom Molybdän aus Lösungen mit einem pH kleiner als 3 auf Kationiten erzielen, weil das Molybdän ans Kation auf dem Kationit aufgehalten wird, während das Wolfram als Anion in den Abfluss übergeht /4 — 6/. Das Einstzen der Kationiten in der analytischen Chemie des Wolframs findet besonders bei der Trennung der Wolframat-, Vanadat-, und Molybdationen von den Elementen die sich unter kationischern Form befinden, Anwendung /7 — 13/.

Sischkow und Kolewa /14/ haben das Aufhalten des Wolframs (VI) und Molybdäns (VI) auf verschiedenen Kationenaustauschharzen aus 0,1 M Ameisensäurelösungen studiert. Bei pH = 1 halten die geprüften Kationiten das Wolfram in Form folgender Serie auf:

$$KU - 2 > \text{Wofatit CN} > KU - 1$$

und das Molybdän in Form folgender Serie auf:

$$\text{Wofatit CN} > KU - 1 > KU - 2$$

Die Wolframat-oder Molybdationen können auf basischen Anionen austauschharzen aus sauren Lösungen in Gegenwart einiger Komplexationsagenten (wie zum Beispiel Thioglykolsäure /15/, Borsäure /16/) oder in deren Anwesenheit /17/ aufgehalten werden.

Wolfram (VI) und Molybdän (VI) können quantitativ getrennt werden, indem sie zusammen auf dem Anionenaustauschharze Dowex 1 aufgehalten werden. Das Wolfram wird mit einer Lösung von HCl 9N + + HF 1 N und danach mit einer Lösung von HF 1N eluiert /18/.

Mehrere Studien zeigen die Trennung der Elemente aus HF + + HCl Lösungen /19 — 20/, oder HNO_3 Lösungen /21/.

Darbinian und Danielian /22/ erlangen die Trennung des Wolframs von Molybdän auf dem Anionit AV-27 aus Natriumhydroxydlösungen 4 — — 5N; das Wolfram wurde mit HCl 10 N eluiert.

Die Ureigenschaften der Lösung sind denen, der durch basische Verarbeitung der Wolframkonzentrate erhaltenen Lösungen annahernd und diese Trennung kann für eine eventuelle Anwendung in der Technologie in Betracht gezogen werden.

Sischkow und Sischkowa /23/ studierten die Trennung des Molybdäns von Vanadium und stellten die Bedingungen zur selektiven Aufhaltung des Molybdäns auf dem Anionit PE-9 fest.

Die Lösungen, die bei dem Aufschluss der Scheelitkonzentrate mit Natriumkarbonat in Autoklaven erhalten werden, enthalten die Anionen: WO_4^{2-}, VO_3^-, MoO_4^{2-}, und CO_3^{2-}, alle sind Anionen der betreffenden schwachen Säuren mit einer kleinen Dissoziationskonstante. Für das Studium des Aufhaltens dieser Ionen auf Anionenaustauschharzen ist es notwending starke oder mittelbasische Anioniten in Betracht zu ziehen. Es wurden folgende Anionenaustauschharze verwendet:

— Vionit AT-1, starkbasischer Anionit vom Typ I;
— Vionit AT-2, starkbasischer Anionit vom Typ II;
— Vionit AS-1, mittelbasischer Anionit;
— Kastel A-300, starkbasischer Anionit vom Typ II.

Die Dosierung des Wolframs in Natriumkarbonatlosungen wurde auf radiochemischem Weg durchgefuhrt, wobei man den radioaktiven W^{185} (T/2 = 74 Tage) verwendete.

Das Molybdän wurde in Natriumkarbonatlösungen durch die photocolorimetrische Methode festgestellt. Molybdän (VI) wurde zu Molybdän (V) reduziert, welches in Gegenwart von Kaliumrhodanid und im Salzsäuremedium die Lösung zu orangerot färbt /24/.

Das Vanadium wurde in Natriumkarbonatlösungen durch die Photocolorimetrie der analysierten Lösung in Salzsäuremedium dosier welche sich durhc die Zugabe einer wässerigen Lösung von Diphenylamin intensiv violett färbt /25/.

Das Studium des Aufhaltens der WO_4^{2-}, VO_3^-, umd MoO_4^{2-} Ionen aus den Natriumkarbonatlösungen aud Anionenaustauschharzen wurde in statischen Bedingungen für jedes Anion einzeln ausgeführt. Die verwendeten Lösungen waren diejenigen der technischen Lösungen und sind in den Tabellen 1 — 3 angegeben.

Die Anionenaustauschharze wurden zuerst als R_2CO_3 dargestellt und nach dem Waschen mit Wasser und der Entfernung des Überflusses an Wasser wurde ihr Feuchtigkeitsgehalt festgestellt. Nachher wurde die für 1g trockenes Harz notige Quantität an feuchtem Anionenaustauschharz berechnet. Diese Quantität wurde gewogen und in einem Kontaktbehälter zusammen mit 10 ml Lösung eingeführt. Der luftdicht geschlossene Behälter wurde 24 Stunden aufgehoben, um das Gleichgewicht zu erreichen. In der Lösung, die nach dem Ionenaustausch geblieben ist, wurde die Quantität an VO_4^{2-}, VO_3^- und MO_4^{2-} — Ionen bestimmt, die von einem Gramm Anionit aufgehalten wurde. Danach wurden die Verteilungsverhalt-

Die Aufhaltung des Wolframs auf verschiedenen Anioniten

Tabelle 1

Anionen-austauschharze	Inhalt an $Na_2WO_4 \cdot 2H_2O$ (mg/ml) aus der		Aufhaltungs kapazität mqA/g	Verteilung-verhaltnis
	Anfangslösung	Lösung nach der Erhaltung des Gleichgewichts		
Vionit AT-1	199,00	169,75	1,89	0,17
	19,90	7,72	0,79	1,57
	1,99	0,10	0,12	19,20
Vionit AT-2	199,00	139,50	3,80	0,43
	19,90	7,65	0,79	1,60
	1,99	0,08	0,12	24,50
Vionit AS-1	199,00	150,00	3,16	0,32
	19,90	8,10	0,76	1,45
	1,99	0,09	0,12	21,60
Kastel A-30	199,00	174,95	1,55	0,14
	19,90	14,50	0,34	0,37
	1,99	0,17	0,12	10,63

Die Aufhaltung des Molybdäns aud auf verschiedenen Anioniten

Tabelle 2

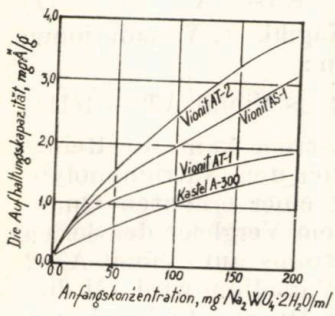
Anionenaustausch-harze	Inhalt an $Na_2MoO_4\ 2H_2O$ (mg 10^{-2}/ml) aus der		Aufhaltungs-kapazität mq $A.10^{-3}$/g	Verteilungs-verhaltnis
	Anfangs-lösung	Lösung nach der Erhaltung des Gleichgewichts		
Vionit AT—1	280,00	61,55	180,4	3,55
	28,00	0,55	22,4	49,89
	2,80	0,00	2,3	∞
Vionit AT-2	280,00	0,42	196,6	5,91
	28,00	0,01	22,0	214,23
	2,80	0,00	2,3	∞
Vionit AS-1	280,00	0,76	168,3	2,67
	28,00	0,02	21,8	17,29
	2,80	0,00	2,3	∞
Kastel A-300	280,00	1,30	122,8	1,15
	28,00	0,06	18,1	3,65
	2,80	0,03	2,0	7,75

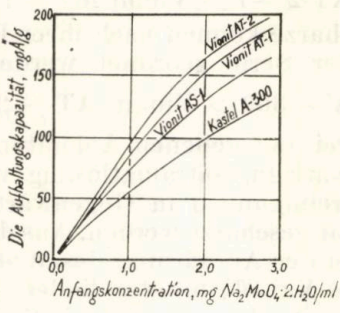
Die Aufhaltung des Vanadiums auf verschiedenen Anioniten

Tabelle 3

Anionen-austauschharze	Inhalt an $NaVO_3$ ($mg.10^{-2}$/ml) aus der		Aufhaltungs-kapazität $mqA.10^{-3}$/g	Verteilungs-verhältnis
	Anfangslösung	Lösung nach der Erhaltung des Gleichgewichts		
Vionit AT-1	265,60	261,17	3,63	0,02
	26,56	22,30	3,49	0,20
	2,66	0,00	2,09	∞
Vionit AT-2	265,60	233,70	25,32	0,13
	26,56	17,20	7,67	0,55
	2,66	0,00	2,09	∞
Vionit AS-1	265,60	100,90	135,00	1,63
	26,56	10,09	12,83	1,43
	2,66	0,00	2,09	∞
Kastel A-300	265,60	132,80	108,85	1,00
	26,56	11,95	11,97	1,23
	2,66	0,00	2,09	∞

nisse unter dem Anionit und der Lösung der in Arbeit genommenen Ionen berechnet, Die experimental erhaltenen Ergebnisse werden in den Tabellen 1 — 3 und in den Bildern 1 — 3 gezeigt.





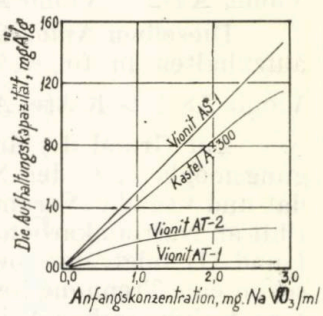


BILD 1: Die Aufhaltung des WO_4^{2-} Ions aud verschiedenen Anionitharzen;
BILD 2: Die Aufhaltung des MO_4^{2-} Ions auf verschiedenen Anionittharzen;
BILD 3: Die Aufhaltung des VO_3^- Ions auf verschiedenen Anionitharzén.

So wie es aus der Tabelle 1 und dem Bild 1 hervorgeht, wird Wolfram befriedigend aus den studierten Harzen aus relativ konzentrierten Lösungen aufgehalten. Bei immer kleineren Konzentrationen ist die Aufhaltung immer schwächer, mit immer näherwerdenenden Werten

für alle studierten Anioniten, Nach der Aufhaltungskapazität des Wolframions können die Anionitharze in folgender Serie gruppiert werden:

Vionit AT-2 > Vionit AS-1> Vionit AT-1> Kastel A — 300 (I)

Die Aufhaltung von fast 600 mg Wolframationen von einem Gramm Anionitharz Vionit AT-2, was ungefähr 475 mg metallisches Wolfram bedeutet, bietet vorteilhafte technisch-ökonomische Anwendungsmöglichkeiten. Die technischen Lösungen, die beim Aufschluss erhalten werden, können einem Ionenaustauschprozess zur Aufhaltung von 90 — 95% der Wolframquantität unterworfen werden. Die Wolframationen aus der Lösung werden als Folge dieses Prozesses mit Karbonationen ersetzt, in welchem Falle die Konzentration der Lösung an Natriumkarbonat wächst, beinahe bis zur Konzentration der Lösung die bei dem Aufschluss in Autoklaven notwendig ist. Nach dem Ergänzen mit Natriumkarbonat bis zur optimalen Konzentration kann die Lösung wieder verwendet werden. Das Wolframat, welches nicht vom Anionit aufgehalten wurde, bleibt in dieser Lösung und kann im Kreislauf verwendet werden. Folglich werden praktisch keine Verluste an Wolfram sein. Desgleichen wird der Verbrauch an Natriumhydroxyd im Vergleich zum klassischen Prozess, in welchem eine 3 — 4 Mal grössere Menge als theoretisch notwendig ist, mit Salzsäure neutralisiert wurde, gesenkt. Die Salzsäure wird im technologischen Prozess vollkommen ausgeschlossen. Alle diese Messnahmen führen zu wesentlichen Einsparungen.

Bei der Aufhaltung der Vanadat-und Molybdationen (Bild 1 und 3) kann man ebenfalls eine Senkung ihres Aufhaltens mit der Verkleinerung der Konzentration der Lösungen feststellen.

Gemäss ihrer Fähigkeit, Molybdationen aufzuhalten, können die studierten Anionitharze in folgender Serie aufgereiht werden:
Vionit AT-2 > Vionit AT-2 —1 > Vionit AS — 1 >Kastel A — 300 (II)

Dieselben Anionitharze können nach ihrer Fägihkeit, Vanadationen aufzuhalten in folgender Serie geordnet werden:

Vionit AS-1 > Kastel A — 300 > Vionit AT — 2 > Vionit AT — 1(III)

Auf Grund der drei angegebenen Anionitenserien kann die Reinig gungsmöglichkeit der Natriumwolframatlösung von den Natriummolybdat und vanadat Verunreinigungen in Gegenwart einer erhöhten Quantität an Natriumkarbonat geschätzt werden. Aus dem Vergleich der Serien I und III folgt, dass bei der Aufhaltung des Wolframs auf Vionit AT-2 schon eine Trennung des Vanadiums stattfindet. Vanadium wird auf diesem stark basischen Anionit schwächer aufgehalten. Die eventuellen Vanadiumspuren die auf dem Harz aufgehalten werden, werden bei der Elution im ersten Teil des Abflusses erscheinen.

Was die Trennung der Wolframat-und Molybdationen aus den Serien I und II anbelangt, werden die sehr ähnlichen Aufhaltungskapazitäten dieser Anionen festgestellt. Bei der Aufhaltung des Wolframs auf Vionit AT-2 aus den technischen Lösungen kann man nicht mit einer Trennung dieser Ionen rechnen. Eine eventuelle Trennung könnte man durch eine nachher durchgeführte Aufhaltung des Molybdations auf Vionit AT-1 durchführen. In diesem Falle kann man eine genügend hohe Ionenaustauschsäule verwenden, um das Molybdation neben einer gewis-

sen Menge Wolfram aufzuhalten, wobei man einen Abfluss mit geringem Inhalt an Molybdän erhält.

Die Repartisierung der studierten Ionen zwischen dem Harz und der Lösung kann als sehr gut geschätzt werden; im Falle des Wolframs wird eine gesenkte Repartisierung bei grossen Konzentrationen der Lösung erhalten, weil die Sättigung der Harze erreicht wird. Die Infinitwerte der erhaltenen Repartisierung im Falle des Vanadiums und des Molybdäns zeigen, dass praktisch diese Metalle total auf den betreffenden Anionenaustauschharzen aufgehalten werden, wobei ihre Konzentration in der Lösung unter den Fehlergrenzen der Analyse bleiben.

Schlussfolgerungen

Das Studium des Aufhaltens der Wolframat- und Vanadat- und Molybdationen aus den Natriumkarbonatlösungen führt zu folgenden Schlussfolgerungen:

1. Man kann die Anionen der studierten Metalle aus den technischen Lösungen aufhalten, wobei man technisch,-ökonomische Vorzüge erzielt, dadurch, dass man den Verbrauch an Natriumkarbonat und Salzsäure wesentlich senkt, die Extraktionsphase des Wolframs aus den, beim Aufschluss erhaltenen Laugen vereinfacht.

2. Für die studierten Harze hat man auf Grund ihrer Aufhaltungsfähigkeit folgende Serien festgelegt:

Fur WO_4^{2-}:
Vionit AT-2 > Vionit AS-1 > Vionit AT-1 > Kastel A-300
Fur MoO_4^{2-}:
Vionit AT-2 > Vionit AT-1 > Vionit AS-1 > Kastel A-200
Für VO_3^-:
Vionit AS-1 > Kastel A-300 > Vionit AT-2 > Vionit AT-1

3. Durch Ionenaustausch kann auch die Reinigung des Wolfram von den begleitenden Elementen — Vanadium und Molybdän — erzielt werden. Die Reinigung von Vanadium kann schon in der ersten Phase des Aufhaltens des Wolframs auf Vionit AT-2 durchgeführt werden. Die Reinigung von Molybdän benützt eine zusätzliche Ionenaustauschphase, in welcher Molybdän auf Vionit AT-1 aufgehalten wird.

Lehrstuhl für die Technologie der anorganischen Stoffe.
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bukarest.

LITERATUR

1. *L. Grigoriu, L. Drăgan, D. Turtoi*, Revista de Chimie, vol. 15, nr. 6, iunie 1964, 324 — 329
2. *C. Agte, J. Wacek*, Wolfram und Molybdan, Akademie Verlag Berlin 1959; Ed. rusă, Izd. Energhia, M — L 1964
3. N.N. *Sevrjukow, B. A. Kuzmin, F. V. Celistchew*, Obsciaia metallurghia, Moskva, 1962
4. *T. Ionescu*, Schimbători de ioni, Bucureşti, Ed. Tehnică, 1964
5. *J. Korkisch, S. S. Ahluwalja*, Talanta, vol. 14, 1967, 155 C.A. 67, 39821 j
6. *J. Korkisch, S. S. Ahluwalja*, Talanta, vol. 14, 1967, 1069 C.A. 67, 39822 a
7. *E. W. F. Strelow, R. Rethemayer, J. C. Brthma*, Anal. Chem., vol. 37 1965, 106
8. F. *W. E. Strelow*, Anal. Chem., vol. 32, 1960, 1185
9. *R. Klement*, Z. analyt. Chem., vol. 136, 1952, 17
10. *H. Buchwald, F. Richardson*, Talanta, vol. 9, 1962, 931

11. *A. H. Black, J. D. Bonfiglio*, Anal. Che., vol. 33, 1961, p. 431.
12. *L. H. Dahmer*, U. S. At. Energy Comm. IS — T — 113 Arail Dep; CESTI, 1966.
13. *D. A. Schischkow, L. G. Schischkowa*, Talanta, vol. 12, nr. 9, 1965, 857 — 958; C. A. 63, 9114 h.
14. *D. A. Schischkow, F. G. Kolewa*, Zalanta, vol. 12, nr. 10, 1965, 865; C. A. 63, 10732 h.
15. *M. Ziegler, W. Ritter*, Z. Analyt. Chem., vol. 164, 1958, p. 310
16. *F. Blasius*, Angew. Chem., vol. 65, 1953, p. 348.
17. *F. Blasius, H. Pattack*, Angew. Chem., vol. 71, 1959, p. 445.
18. *K. A. Kraus, E. Nelson, G. E. Moore*, J. Am. Chem. Soc., vol. 77, 1955, p. 3972.
19. *A. I. Kalinin, R. A. Kuznetzow, V. V. Moiseew, V. F. Tschehepurnjeks*, Radiohim. metodi opred. Mikroelementov, Akad. Nauk. SSSR, Sb. statei, 1965, 176 — 179.
20. *V. A. Pokholkow, V.E. Panikorowski*, Izv. Vyssh. Ucebn. Zaved., Him. i Him. tehnol., vol. 10, nr. 2, 1967, p. 168 — 170.
21. *Iu. N. Iurkeiwitch, R. M. Swiridorskaja*, Sb. Tr. Vses. Naucin, Issl. Inst. Tverd. Splavov, nr. 5, 1964, p. 245 — 248.
22. *M. W. Darbinjan, A. A. Danieljan*, Izv. Ak. N. Arm. SSR, Him. Nauk, vol. 17, nr. 5, 1964, 495 — 497; C. A. 62, 11128 e.
23. *D. A. Schischow, L. G. Schischkowa*, Compt. Rend. Acad. Bulgare Sci., vol. 16, nr. 8, 1963, 833 — 835.
24. *G. Charlot, D. Bezier*, Analyse quantitative minerale, Masson et C-ie, Paris, 1955, p. 593
25. *W. Sandell*, Colorimetric metal analyses, Third. Ed., Interscience Publishers, Inc. New York. 1959, p. 435

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

C.Z.: 541.1

O METODĂ DE STUDIU A DEPENDENȚEI REGIMULUI CINETIC AL PROCESULUI CATALITIC ȘI A ACTIVITĂȚII CATALIZATORILOR DE PARAMETRII TEXTURALI ȘI DE PROPRIETĂȚILE FAZEI EXTERNE *

FLORIN DANEȘ

A. Introducere

Atît evaluarea performanțelor tehnologice ale unui proces de contact cît și studierea chimismului catalizei implică, pe lîngă cunoașterea mecanismului transformărilor chimice ale substanțelor pe suprafața catalizatorului, și stabilirea precisă a dependenței vitezei de transformare de factori nechimici: temperatura, presiunea și compoziția fazei externe (determinînd activitatea catalitică atît direct cît și prin intermediul proprietăților de transport) pe de o parte și dimensiunea medie, distribuția granulometrică sau forma granulelor de catalizator pe de altă parte. În cazul catalizatorilor poroși intervin și parametrii texturali, legați de distribuția fazelor în granulă (dacă este vorba de un contact polifazic) de porozitate, de raza medie a porilor, ca și de distribuția porilor după dimensiuni, forma și modul de comunicare a porilor, gradul de izotropie al structurii poroase, omogenitatea distribuției porilor în granulă și a componenților catalizatorului în diverși pori.

Teoria proceselor eterogene permite deja o evaluare calitativă a influenței diferiților factori enumerați asupra vitezei de reacție. Mult mai puțin elaborată este însă exprimarea cantitativă a acestor dependențe. În mod obișnuit se consideră că procesul are loc în unul sau altul din domeniile cinetice prevăzute de teoriile macrocineticii, și în acest fel se reduce problema la considerarea unui număr redus de parametri ce influențează procesul catalitic. Deficiențele acestui tratament constă pe de o parte în neglijarea domeniilor cineticii intermediare și pe de alta în lipsa posibilităților de evaluare apriorică a regimului macrocinetic, care trebuie deci determinat tot experimental.

În cele ce urmează ne propunem a contribui la înlăturarea deficiențelor menționate, prin introducerea unor relații de aproximare care, plecînd de la expresiile considerate cunoscute ale vitezelor tuturor etapelor

* Manuscris predat redacției la data de 23 aprilie 1971.

posibile ale mecanismului, să exprime dependența globală a vitezei procesului catalitic de parametrii „externi" și „interni" menționați, și să poată de asemenea prevedea rolul acestor parametri în stabilirea predominării unuia sau altuia dintre domeniile macrocinetice.

B. Extinderea la procese succesive cu cinetică neliniară a principiului aditivității rezistențelor

Pentru procesele succesive (compuse din etape care se succed obligatoriu, într-o ordine dată) și ireversibile este deja cunoscut că, dacă un singur component suferă transformări iar viteza v_1 a fiecărei etape depinde linear de concentrația c, se poate exprima viteza globală a acestui proces, v, prin relația :

$$v = \frac{c}{\Omega} \tag{1}$$

unde Ω este rezistența globală, definită ca sumă a rezistențelor tuturor etapelor :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \tag{2}$$

iar rezistența Ω_i a etapei cu numărul i este definită prin relația analoagă :

$$v_i = \frac{c_{i-1} - c_i}{\Omega} \tag{3}$$

unde c_i este concentrația componentului în starea intermediară între etapa $(j = i)$ și etapa $j = (i - 1)$, dacă $j = 1 \div (n - 1)$, cu excepția $c_n = 0$, iar c_0 este concentrația activă în prima etapă, c (la procese eterogene : concentrația în masa fazei externe).

În aceste condiții Ω are rolul inversului constantei de viteză a procesului :

$$\Omega_i = \frac{1}{k_i} \tag{4}$$

Astfel, pentru succesiunea difuziei în filmul de lichid ce înconjoară suprafața de contact urmată de o reacție chimică superficială de ordinul I se poate ușor arăta că viteza procesului global este dată de relația :

$$v = \frac{c}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \tag{5}$$

indicii 1 și 2 referindu-se la difuzie respectiv la reacția superficială, iar coeficienții k_1 și k_2 corespunzînd vitezelor de etapă :

$$v_1 = k_1(c - c_1) \tag{6a}$$

$$v_2 = k_2 c_1 \tag{6b}$$

unde c_1 este concentrația la interfață. Relația (5) se obține din cele două relații (6) introducînd condiția de staționaritate a procesului :

$$v = v_1 = v_2 \tag{7}$$

și eliminînd c_1. Se poate arăta că pentru cinetici de etape de forma (6) condiția de staționaritate este totdeauna realizată dacă intervalul de timp trecut de la punerea în contact a celor două faze este suficient de mare în raport cu cea mai mică dintre rezistențele Ω_1 și Ω_2.

Această teorie simplă nu permite evaluarea vitezei v decît dacă atît v_1 cît și v_2 sînt funcții lineare de concentrații, ca în relația (6). Or, dacă pentru difuzie se poate neglija în mod obișnuit fluxul stefanian /1/ a cărui introducere în expresia lui v_1 ar avea drept consecință nelinearizarea, nu același lucru se poate spune despre reacția chimică superficială în care caz expresia vitezei : $v_2 = f(c_1)$ este adesea de un ordin diferit de 1, întreg sau fracționar, sau poate avea chiar forma unui polinom sau fracție rațională. Vom arăta că totuși se poate aplica și în acest caz principiul aditivității rezistențelor, dar cu trei modificări importante :

a) Modificarea expresiei (1) în sensul că însăși inversul vitezei, și nu raportul c/v, va fi tratat și însumat ca o rezistență. Notînd noua formă de rezistență globală respectiv parțială cu Ω' și Ω'_i, rezultă :

$$v = \frac{1}{\Omega'} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \Omega'_i} \tag{8}$$

b) Pentru fiecare etapă în parte vom adopta pentru Ω'_i nu inversul vitezei v_i, ci inversul vitezei maxim posibile u_i a acestei etape :

$$\Omega'_i = \frac{1}{u_i} \tag{9}$$

Conform acestei definiții rezultă că :

$$\Omega'_i = \frac{1}{u_i} = \lim v_i \begin{cases} c_{i-1} \to c \\ c_i \to 0 \end{cases} \tag{10}$$

c) Se vede din relația (10) că u_i (și deci Ω'_i) depinde doar de caracteristicile etapei i și nu este de loc influențată de caracteristicile celorlalte etape, întrucît în expresia sa nu mai intră c_{i-1} și c_i (care desigur erau dependente de caracteristicile comparate ale tuturor etapelor). Această simplificare a calculului — descompunerea expresiei cinetice globale a

vitezei v în termeni ce depind de caracteristicile unei singure etape — are ca urmare o eroare, care însă nu modifică ordinul de mărime al valorii rezultate, după cum se va remarca din paragrafele C și D.

Se va adopta deci pentru v expresia :

$$v = f \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i}} \tag{11}$$

unde valorile u sînt date de expresia (10) iar f este un factor de corecție de ordinul unității, după cum se va vedea în paragrafele următoare.

Conceptul de extindere și modificare al noțiunii de „rezistență" menționat permite de asemenea prevederea regimului macrocinetic în care decurge procesul global. Întrucît în suma de la numitorul membrului drept al relației (11) ponderea unei etape este invers proporțională cu „viteza sa maximă" u_i (pe care o vom numi mai departe, pe baza acelorași analogii electrice, conductanță), rezultă că efectul principal asupra vitezei v o va exercita acea etapă pentru care conductanța u_i este minimă, deci :

$$\mathfrak{R} = j, \quad u_j = \min (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) \tag{12}$$

unde $\mathfrak{R}$ este regimul macrocinetic iar j este numărul etapei ce determină regimul.

Se poate de asemenea concepe și o definire a unor zone intermediare, adoptînd un factor de delimitare F (de exemplu $F = 4$) și distingînd între regimurile cinetice pure $\mathfrak{R}^{(1)}$ și cele mixte (duble $\mathfrak{R}^{(2)}$, triple $\mathfrak{R}^{(3)}$ etc.), după criteriul :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} = \{j\}, \quad F \cdot u_j < \min [\{U\} - u_j] \tag{13a}$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(2)} = \{j, k\}, \quad \begin{matrix} F \cdot u_i < \min [\{U\} - \{u_j, u_k\}] \\ F \cdot u_j < \min [\{U\} - \{u_j, u_k\}] \end{matrix} \tag{13b}$$

etc, unde $\{U\}$ este mulțimea tuturor valorilor u_i.

Calculînd regimul (sau regimurile) cinetice se poate anticipa rolul diferiților factori în modificarea vitezei procesului, orientînd astfel determinările experimentale în sensul variației acelora dintre factori care ar intra în expresia conductanței etapei determinante de viteză.

C. Evaluarea preciziei însumării rezistențelor la cinetica externă chimico-difuzională

Dacă procesul catalitic este compus din etapa difuzională caracterizată prin cinetica (6a) și o reacție superficială cu o viteză de tip $v_2 = \varphi(c')$ unde $\varphi(c')$ este o funcție neliniară, relația (11) devine :

$$v = \frac{f}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}} \tag{14}$$

unde conform (12) și (7a):

$$u_1 = k_1 c \tag{15a}$$

iar conform (12) și (16):

$$u_2 = \varphi(c') \tag{16b}$$

În ipoteza stării staționare, f poate fi evaluat egalînd $v_2 = \varphi(c')$ cu v_1 dat de (6a), prin eliminarea concentrației interfaciale c'. Astfel, dacă reacția superficială are o cinetică „normală", de tip putere:

$$v_2 = \varphi(c') = k_2 (c')^n \tag{16}$$

unde n este un număr real diferit în cazul general de 1, se poate arăta că:
— pentru $n < 0$ nu se poate realiza o stare staționară a procesului
— pentru $n \geqslant 0$ starea staționară este realizabilă, și este aplicabilă relația (14) în care u_1 este dat de (15a) iar

$$u_2 = k_2 c^n \tag{17}$$

și se poate calcula f, ca funcție de n și de „raportul de conductanță"

$$U = \frac{u_2}{u_1} \tag{18}$$

prin eliminarea mărimii x $\left(\text{ce are sensul raportului } \frac{c'}{c}\right)$ între relațile: $f = 1 - x + x^n$ și $U = \dfrac{1 - x}{x^n}$.

Studierea dependenței $f(n, U)$ pentru valori pozitive ale lui n și U arată că:
— pentru $U \to 0$ sau $U \to \infty, f \to 1$
— pentru $n > 1$, $f \leqslant 1$; pentru $n < 1$, $f \geqslant 1$; pentru $n = 1$, $f = 1$ (în cazul cineticii de reacție lineare)
— corecția f ia numai valori de ordinul unității $\left(\text{mai exact, cuprinse între 2 și } \frac{1}{2}\right)$ pentru orice valoare U și pentru valorile importante în practică ($0 \leqslant n \leqslant 4$) ale lui n.
— la n dat (deci pentru o reacție dată) variația lui U (consecință a modificării factorilor externi și a granulometriei contactului) duce la o dependență $f(U)$ de tipul prezentat în fig. 1. Se vede că indiferent de valoarea (pozitivă) a lui n, aceste dependențe prezintă un extremum; acesta este un minim pentru $n < 1$ și un maxim pentru $n < 1$. Extremumul este cu atît mai accentuat cu cît ordinul de reacție diferă mai mult de unitate, și este plasat la o valoare cu atît mai mare a factorului de conductanță cu cît ordinul de reacție este mai mare, fiind situat de altfel totdeauna în domeniul difuzional (la $U > 1$).

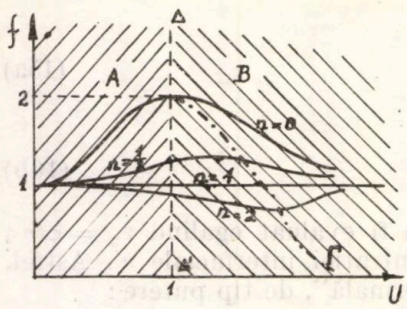


Fig. 1. Dependenţa de factorii externi a preciziei relaţiei de însumare a rezistenţelor, la cinetica mixtă de difuzie în filmul extern + reacţie superficială.
U — raport de conductanţă; f — factor de corecţie; n — ordin de reacţie; A — domeniul chimic („cinetic", „reactiv"); B — domeniul difuzional; ΔΔ′ — dreaptă separînd cele două domenii; Γ — curba abaterii maxime de la aditivitate.

Se poate arăta că punctul extremum are coordonatele:

$$U_{ex} = \exp\left[\frac{n \ln n}{n-1}\right] - n$$

$$f_{ex} = 1 + (1-n)\exp\left[-\frac{n \ln n}{n-1}\right]$$

În tabelul 1 se prezintă valorile lui U_{ex} în f_{ex} pentru cîteva valori n importante. Se observă că $f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 2$ şi că pentru valori n cuprinse între 4 şi 5 factorul extrem de corecţie f_{ex} se abate relativ mult de

Dependenţa de ordinul de reacţie n a valorii extremale f_{ex} a factorului de corecţie la însumarea rezistenţelor şi a valorii U_{ex} a raportului de conductanţă la care $f = f_{ex}$ la cinetica externă chimico-difuzională

Tabel 1

n	0	0,25	0,333	0,5	0,667	0,75	1	1,333	1,5	2	3	4	
f_{ex}	2	1,411	1,385	1,25	1,148	1,105	1	0,895	0,852	0,75	0,615	0,529	0
U_{ex}	1	1,334	1,399	1,5	1,583	1,620	1,718	1,827	1,875	2	2,196	2,336	

la unitate (coboară sub 1/2); însă ordine de reacţie de ordinul 5 sau mai mari (posibile, de altfel, doar la reacţii neelementare cu preechilibre) apar rar în practică.

Regimul cinetic dominant poate fi stabilit în cazul general prin relaţiile (12) sau (13). În cazul concret tratat există o posibilitate de distincţie mai exactă între regimuri, şi anume pe baza comparării efectelor relative $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ ale celor două conductanţe asupra vitezei globale:

$$\mathcal{E}_1 = \left(\frac{\partial \ln w}{\partial \ln u_1}\right)_{u_2}; \qquad \mathcal{E}_2 = \left(\frac{\partial \ln w}{\partial \ln u_2}\right)_{u_1} \tag{19}$$

şi anume:

$$\mathcal{R} = j, \quad \mathcal{E}_j = \min(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \tag{20a}$$

dacă se distinge doar între două regimuri, și :

$$\mathfrak{R}^{(1)} = 1, \ \pi \geqslant F \ ; \qquad \mathfrak{R}^{(1)} = 2, \pi \leqslant \frac{1}{F} \ ; \qquad \mathfrak{R}^{(2)} = \{1, 2\}, \frac{1}{F} < \pi < F \tag{20b}$$

unde :

$$\pi = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} \tag{21}$$

iar F este factorul de delimitare proporțional cu lățimea zonei de condiții în care se ia în considerare influența tuturor factorilor (și nu numai a celor care influențează doar pe u_1 sau doar pe u_2) asupra vitezei globale ; valoarea adoptată pentru F va depinde de precizia cu care se cunosc acești factori și cu care este cunoscută dependența de aceștia a conductanțelor, o valoare rațională a lui F fiind inversul preciziei relative cu care poate fi calculat raportul π, și pe care o evaluăm actualmente la 25 %.

Calcularea raportului π se poate face eliminînd dx între relațiile :

$$dv = (1 - x)\, \mathrm{d}u_1 + (-u_1)\, \mathrm{d}x = x^n\, \mathrm{d}u_2 + (nx^{n-1} u_2)\, \mathrm{d}x$$

(obținute prin înlocuirile $c' = cx$, $k_1 = u_1/c$ și $k_2 = u_2/c^n$ în relațiile (6a) și (16), urmate de diferențierea relației $v = v_1 = v_2$) și exprimînd apoi dv ca funcție numai de du_1 și du_2. Se obține :

$$dv = \frac{nx^{n-1}(1 - x)\, u_2\, \mathrm{d}u_1 + u_1\, x^n\, du_2}{u_1 + nx^{n-1} u_2}$$

de unde prin separarea derivatelor parțiale $\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)_{u_2}$ și $\left(\frac{\partial v}{\partial u_2}\right)_{u_1}$, și înlocuirea acestora în relațiile (19) și apoi în relația (20) și (21) rezultă ;

$$\pi = \frac{n\,(1 - x)}{x}$$

în care x este funcția implicită de U deja menționată. Pentru modelul cu două regimuri cinetice simple ($F = 1$), valoarea critică a lui π este 1, și se poate arăta că :

$$\mathfrak{R} = 1, \qquad U > U_{cr}; \qquad \mathfrak{R} = 2, \qquad U > U_{cr}$$

unde

$$U_{cr} = \frac{(n + 1)^{n-1}}{n^n}$$

Valorile critice ale lui U în funcție de n sînt date în tabelul 2. Se vede că aceste valori scad continuu pe măsura creșterii lui n ; deci odată

Dependența de ordinul de reacție n a raportului de conductanță U_{cr} pentru cinetica externă chimico-difuzională a reacției ererogene

Tabel 2

n	0	0,25	0,333	0,5	0,667	0,74	1	1,333	1,5	2	3	4	∞
U_{cr}	1	1,196	1,190	1,152	1,105	1,079	1	0,903	0,862	0,75	0,593	0,488	0

cu mărirea ordinului de reacție domeniul difuzional se lărgește pe seama celui chimic. Pentru valori n avînd șansa să apară în cazuri practice ($n = 0{,}05 \div 4$), valoarea critică a raportului de conductanță nu diferă de 1 cu un factor mai mare decît doi, ceea ce justifică tratarea simplă a problemei regimului cinetic, introdusă prin relația (12), ca o primă aproximare.

D. Insumarea rezistențelor la cinetica internă chimico-difuzională a procesului catalitic eterogen

Fie o granulă sferică de catalizator, de rază R, posedînd o suprafață internă dezvoltată și avînd o porozitate omogen distribuită în spațiul granulei și după mărimile porilor, avînd o rază r a porilor și o porozitate ε. În ipoteza că reacția pe suprafața externă are o pondere neglijabilă și că difuzia externă nu frînează procesul, reacția este situată în domeniul cinetic intern, depinzînd doar de difuzia internă (în pori) și de reacția chimică pe suprafața internă a catalizatorului, — etape cărora le vom afecta aici indicii 1 și 2.

Deosebirea față de cuplarea celor două etape în cinetica externă constă în aceea că acum reactantul are în orice moment alternativele reacției pe porțiunea de suprafață lîngă care a ajuns și continuării difuziei în adîncime a granulei. De aceea calculul exact arată că nici măcar în cazul reacției de ordinul I nu este de prevăzut o cinetică globală în care rezistențele să se însumeze. Calculul exact duce, pentru viteza de reacție globală v (mol $cm^{-2}s^{-1}$) raportată ca și în cazulprecedent la unitatea de suprafață externă a granulei, la expresia /2/ :

$$v = \frac{c}{3}\sqrt{\frac{2D\,\varepsilon\,k_r}{r}}\left(\coth h - \frac{1}{h}\right) \tag{22}$$

unde

$$h = R\sqrt{\frac{2\,\varepsilon\,k_r}{D\cdot r}} \tag{23}$$

iar k_r și D reprezintă constanta de viteză a reacției, respectiv coeficientul de difuzie internă.

Întrucît funcţia de corecţie $\left(\coth\ h - \frac{1}{h}\right)$ din (22) este dificil de calculat pentru valori h extreme, în literatură este folosită de obicei aproximarea lui Wheeler /3/ :

$$v = \frac{c}{3}\sqrt{\frac{2\,D\,\varepsilon\,k_r}{r}}\cdot\tanh\frac{h}{3} \tag{24}$$

Se poate arăta că expresia (22) prevede existenţa a două regimuri cinetice distincte; cel chimic intern („cinetic" intern) şi cel difuzional intern. În primul caz $h < 1$ iar funcţia de corecţie devine egală cu $h/3$, aşa încît :

$$v = u_2 = \frac{2\,\varepsilon\,k_r\,\mathrm{R}c}{9r} \tag{25}$$

iar în al doilea caz paranteza din (31) tinde către 1 aşa încît:

$$v = u_1 = \frac{c}{3}\sqrt{\frac{2D\,\varepsilon\,k_r}{r}} \tag{26}$$

astfel că acum chiar în regim difuzional contează şi viteza reacţiei propriu zise, dar cu o pondere diferită (în (26) k_r intră la puterea 1/2, iar în (25) la puterea 1).

Noi ne propunem verificarea aplicabilităţii conceptului general de aditivitate a rezistenţelor pentru acest caz. Vom considera deci şi aici că :

$$v = \frac{f}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}}$$

Valoarea coeficientului de corecţie f, obţinută din relaţia

$$f = \frac{h}{(h+3)\left(\coth h - \frac{1}{h}\right)}$$

este comparată în tabelul 3 cu coeficientul de corecţie f' corespunzător relaţiei (24) a lui Wheeler :

$$f' = \frac{\tanh\frac{h}{3}}{\coth h - \frac{1}{h}}$$

Dependența de raportul U de conductanță a factorilor de corecție f și f' la cinetica internă chimico-difuzională a procesului catalitic pentru granule sferice, pori egali, porozitate izotropă și reacție superficială de ordinul I

Tabel 3

U	0	0,01	0,1	0,231	0,768	1,536	3	10	102	∞
f	1	0,991	0,915	0,838	0,741	0,773	0,844	0,879	0,986	1
f'	1	1	1,002	1,014	1,102	1,145	1,106	1,033	1,003	1

Se vede că, rămînînd inferioară preciziei formulei Wheeler, relația de aditivitate a rezistențelor este valabilă cu un coeficient de corecție între 0,75 și 1, fiind aplicabilă în scopuri de prevedere a efectelor diferiților factori asupra cineticii.

Și la combinarea cineticii difuzionale cu cea chimică în domeniul intern poate fi definit criteriul $\mathcal{R}$ aplicînd relația (12), în care de această dată :

$$u_1 = \frac{c}{3}\sqrt{\frac{2D\,\varepsilon\,k_r}{r}}; \qquad u_2 = \frac{c}{9}\cdot\frac{2\,\varepsilon\,k_r\,R}{r}$$

E. Extinderea principiului de însumare la procese cu structură complexă

Multe din procesele de importanță practică au o structură mai complexă decît cea secvențială ; pe lîngă procese ce se succed apar de asemenea procese paralele, cu același rezultat final, procese cuplate (a căror efectuare concomitentă asigură condițiile necesare pentru un alt proces ce le succede) sau procese concurente ce se exclud reciproc (fie prin rezultatul, fie prin mecanismul lor).

Astfel o schemă generală dar relativ simplă a procesului catalitic cu participarea unui singur reactant din faza externă este prezentată în Fig. 2. După cum rezultă din figură, procesele 3 și 4 (difuzia internă și reacția pe suprafața internă) sînt secvențiale ; procesul „34" (combinarea proceselor 3 și 4) este însă situat în paralel față de procesul 2 (reacția pe suprafața externă), formînd împreună cu acesta un nou proces „234", care la rîndul lui formează o serie cu procesul 1 (difuzia externă). Apar deci două tipuri de poziții reciproce ale proceselor : „în serie" și „ în

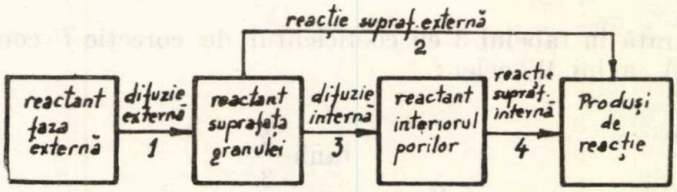


Fig. 2. — Schema cea mai simplă a procesului catalitic eterogen, pentru contacte granulare și reacții cu participarea unui singur component din faza exteremă.

paralel". Pentru procesele în serie (succesive) am văzut că putem adopta următoarea expresie a vitezei procesului global:

$$v_{ser} = \frac{1}{\sum \frac{1}{u_i}} \tag{27}$$

unde u_i sînt vitezele maxim-posibile ale proceselor elementare. În cazul unui proces format din procese elementare paralele vom introduce, prin analogie cu rețelele electrice, expresia:

$$v_{par} = \Sigma u_i \tag{28}$$

așa încît în cazul legării în paralel se însumează conductanțele u_i iar în cel al legării în serie se însumează rezistențele.

Pentru schema procesului catalitic din fig. 2 am obținut astfel, prin combinarea legărilor în serie și paralel:

$$v = \cfrac{1}{\cfrac{1}{u_1} + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{u_3} + \cfrac{1}{u_4}}}} \tag{29}$$

În literatură nu sînt menționate încă relații generale permițînd calcularea — fie și aproximativă — a vitezei unui proces catalitic în condiții generale, relațiile obișnuite referindu-se la cazul predominării unui singur proces elementar, sau cel mult a două procese elementare.

Astfel, în cazul unor granule sferice și a unei reacții de ordin n se obține expresia lui v din (29) înlocuind u cu valorile:

$$u_1 = k_d\, c\,; \quad u_2 = k_r\, c^n\,; \quad u_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{2D\,\varepsilon\, k_r}{r}\right]^{1/2} \cdot c^{\frac{n+1}{2}}\,; \quad \ldots$$

$$u_4 = \frac{2\,\varepsilon R k_r c^n}{9\,r} \tag{30}$$

în care k_d reprezintă constanta de transfer de masă a difuziei externe

Viteza astfel calculată este raportată la unitatea de suprafață externă a catalizatorului, putînd fi transformată în viteze raportate la unitatea de volum a stratului prin înmulțire cu factorul $\frac{3(1-\varepsilon')}{R}$, unde ε' este porozitatea stratului (spațiul liber intergranular, raportat la volumul stratului).

Relațiile (29) și (30) permit analizarea detaliată a influenței diverșilor factori asupra activității catalizatorului, dacă se introduc expresii

concrete pentru dependenţele mărimilor k_d,k_r şi D de aceşti factori (vezi paragraful F). În plus se obţine din (29) o modalitate simplă de definire a regimului cinetic de lucru al catalizatorului. Observînd că într-o serie de procese elementare este determinant de viteză (şi deci decisiv în ceeace priveşte regimul) procesul cu conductanţa minimă, iar într-un fascicol de procese elementare paralele — procesul de conductanţă maximă, rezultă următorul criteriu de regim al procesului catalitic (atunci cînd se adoptă schema cu 4 regimuri simple, fără regimuri intermediare):

$$\mathfrak{R}^{(1)} = j,\ u_j = \min\{u_1,\ \max[u_2,\ \min(u_3,\ u_4)]\} \tag{31}$$

Alte criterii propuse în literatură pentru stabilirea regimului macrocinetic ni se par mai puţin avantajoase, deoarece utilizează concepte mai mult sau mai puţin fictive sau greu de definit cantitativ. Se poate cita astfel criteriul (sau mai bine zis grupa de criterii) Frank-Kameneţkiy/4/ după care (în notaţiile noastre):

$$\begin{array}{ll} j = 1 & \text{dacă } k_d < \sqrt{k_r D}, \\ j = 2 & \text{dacă } k_r > k_d \text{ şi } 1 \cong r, \\ j = 3 & \text{dacă } k_d > \sqrt{k_r D} \text{ şi } r < 1 < R \\ j = 4 & \text{dacă } k_d > \sqrt{k_r D} \text{ şi } 1 > R, \end{array} \tag{32}$$

unde 1 este „adîncimea de pătrundere":

$$1 = \sqrt{\frac{D}{k_o c^{n-1}}}$$

un concept oarecum artificial pentru $n < 1$, unde chiar din modelul Frank-Kameneţky rezultă că nicăieri concentraţia reactantului ce difuzează nu se anulează. Afară de obiecţii legate de valoarea factorilor numerici, se vede că sistemul (32) nu este complet din punct de vedere al condiţiilor, nefiind clar de exemplu de la ce valoare a raportului $r/1$ se va considera $1 \cong r$, şi nici ce regim va predomina, dacă $k_r < k_d$ dar $k_d < \sqrt{k_r D}$. În plus, mărimile comparate (k_d şi $\sqrt{k_r D}$) au dimensiuni fizice diferite, dacă $n \neq 1$, iar compararea regimurilor ar trebui să includă şi pentru $j = 1$ concentraţia în faza externă.

F. Analiza influenţei temperaturii asupra activităţii catalizatorului şi regimului cinetic

Este cunoscut faptul că ridicarea temperaturii provoacă de obicei o trecere din regimul cinetic în cel difuzional /5/. Nu există însă o analiză a posibilităţilor ce intervin atunci cînd se ţine seama de toate cele patru regimuri posibile. O astfel de analiză poate fi efectuată pe baza relaţiei (31) astfel:

1) Se trasează dependenţele mărimilor u_1, u_2, u_3 şi u_4 de temperatură — vezi fig. 3. Considerăm ca cea mai practică o reprezentare în coordonate

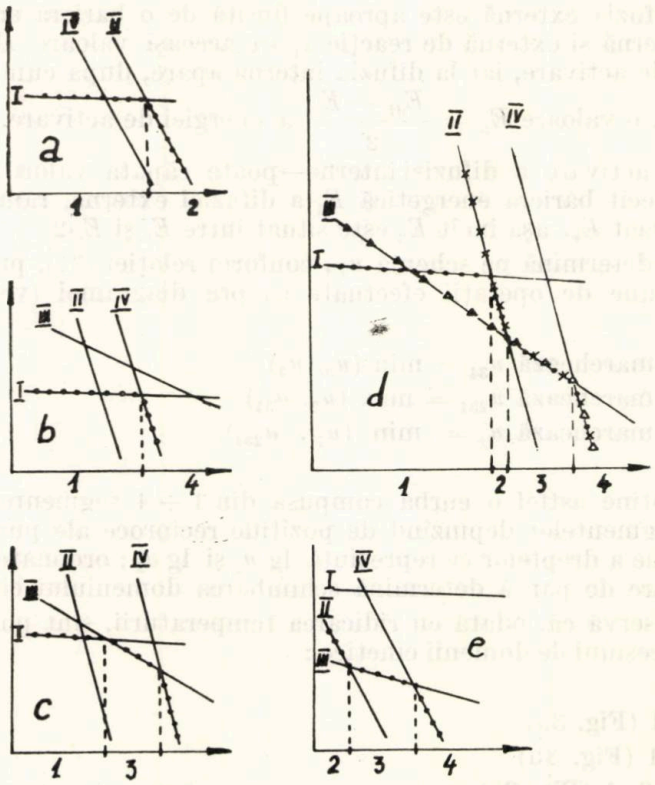


Fig. 3. — Variaţia cu temperatura a domeniului cinetic al procesului catalitic eterogen, pentru contacte granulare şi reacţie cu un singur component extern şi mecanism de reacţie ce rămîne invariabil la modificarea temperturii.

— abscisă : $\frac{1}{T}$; ordonată : lg u_i

I, II, III, IV : curbe lg u_1 vs 1/T ; lg u_2 vs 1/T, lg u_3 vs 1/T şi respectiv lg u_4 vs 1/T

△△△ lg u_{34} vs 1/T

× × × lg u_{234} vs 1/T

· · · lg u vs 1/T

1, 2, 3, 4 : domeniile cinetice difuzional extern, cinetic extern, difuzional intern şi respectiv cinetic intern .

a, b, c, d, e : secvenţele complete de domenii 21, 41, 4321, 431 şi respectiv secvenţa incompletă 432.

lg u_i *vs* $\frac{1}{T}$, ducînd la dependenţe lineare sau quasi-lineare pe intervale mari de temperatură. Vom considera în continuare că aceste dependenţe sînt lineare, de tip :

$$\lg u_i = a_i - b_i \frac{1}{T}$$

unde b_i are rolul energiei de activare, divizată prin 2,303.1,987 cal/mol.grd. Se observă că :

$$b_1 \ll b_3 < b_2 = b_4$$

deoarece difuzia externă este aproape lipsită de o barieră energetică, la cinetica internă și externă de reacție apare aceeași valoare $E_2 = E_4 = E_r$ a energiei de activare, iar la difuzia internă apare, după cum se vede din relația (30), o valoare $E_3 = \frac{E_{di} + E_r}{2}$ a energiei de activare, unde E_{di} — energia de activare a difuziei interne—poate căpăta valori considerabil mai mari decît bariera energetică E_1 a difuziei externe, rămînînd totuși mai mică decît E_r, așa încît E_3 este situat între E_r și $E_r/2$.

2) Se determină pe schemă u_j, conform relației (31), prin următoarea succesiune de operații efectuate asupra diagramei (vezi fig. 3d):

— se marchează $u_{34} = \min(u_3, u_4)$
— se marchează $u_{234} = \max(u_2, u_{34})$
— se marchează $u_j = \min(u_1, u_{234})$.

Se obține astfel o curbă compusă din $1 \div 4$ segmente de dreaptă, numărul segmentelor depinzînd de pozițiile reciproce ale punctelor $A_{i,k}$ de intersecție a dreptelor ce reprezintă $\lg u_i$ și $\lg u_k$; ordonatele punctelor de schimbare de pantă determină schimbarea domeniului cinetic.

Se observă că, odată cu ridicarea temperaturii, sînt posibile următoarele succesiuni de domenii cinetice:

a) 2,1 (Fig. 3a)
b) 4,1 (Fig. 3b)
c) 4. 3. 1 (Fig. 3c)
d) 4, 3, 2, 1 (Fig. 3d)

Domeniile de la începutul sau sfîrșitul fiecărei succesiuni pot (din diferite motive) lipsi, așa cum se vede în Fig. 2c, unde domeniul 1 lipsește, deoarece intersecția curbelor $\lg u_2$ *vs* $\frac{1}{T}$ și $\lg u_2$ *vs* $\frac{1}{T}$ corespunde unei valori negative a abscisei. Ținînd cont și de acest tip de „scurtări", pot fi enumerate alte secvențe de domenii (enumerarea regimurilor în fiecare domeniu fiind făcută în ordinea temperaturilor crescătoare:

e) 2
f) 4
g) 4,3
h) 4, 3, 2
i) 3,1
j) 3,2
k) 3, 2, 1
l) 3
m) 1

Desigur, schema simplă prezentată își pierde valabilitatea, atunci cînd modificarea temperaturii schimbă mecanismul reacției chimice propriu-zise, deoarece în acest caz dependența $\lg u_2$ (sau $\lg u_4$) *vs* $1/T$ nu mai este reprezentată printr-o dreaptă, ci prin două segmente de drepte

ajustate printr-o parabolă, aşa încît poate intersecta în mai multe puncte dreptele lg u_1 sau lg u_3.

Printre secvenţele de domenii cinetice prezentate sînt de remarcat secvenţele *d* şi *h*: în timp ce la celelalte secvenţe energia aparentă de activare a procesului (proporţională cu panta curbei $\lg u_j$ *vs* $1/T$, luată cu semn schimbat) variază monoton odată cu creşterea temperaturii (repre-

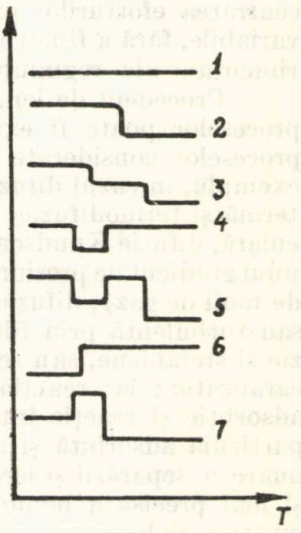


Fig. 4. Tipuri de variaţie a energiei de activare aparente a procesului catalitic cu temperatura.
1 : secvenţele domeniale e, f, l, m
2 : secvenţele domeniale a, b, g, i
3 : secvenţa domenială c
4 : secvenţa domenială h
5 ; secvenţa domenială d
6 : secvenţa domenială j
7 : secvenţa domenială k

zentarea E_{ap} *vs* T prezintă una, două sau trei trepte, tot mai joase pe măsură ce T creşte), la secvenţele *d* şi *h* ridicarea temperaturii duce la o scădere locală a energiei aparente de activare (la trecerea din domeniul 4 în 3), urmată apoi de o creştere a acesteia (cînd se trece din domeniul 3 în 2) şi eventual de încă o scădere (pentru secvenţa *d*). În Fig. 4 se prezintă cîteva variaţii tipice ale energiei de activare cu temperatura, pentru secvenţele considerate.

Literatura nu menţionează pînă în prezent posibilitatea unei variaţii nemonotone E_{ap} *vs* T.

G. Discuţie

Metoda propusă în prezenta lucrare pentru studierea pe bază cantitativă a cineticii proceselor complexe se poate defini ca un procedeu de separare şi ierarhizare a ponderii diverselor variabile de care depinde fenomenul luat în ansamblul său. În exemplul studiat — cinetica procesului eterogen catalitic pe granule sferice, pentru o singură reacţie a unui singur reactant din faza externă — s-a ilustrat ierarhizarea în două trepte, viteza procesului global fiind exprimată ca o funcţie de viteza unor procese parţiale, acestea din urmă fiind considerate în condiţii în care celelalte fenomene nu le pot influenţa : faptul că în cinetica intern-difuzională intră şi termenul k_r referitor la cinetica reactivă nu contrazice aceasta,

deoarece combinaţia u_3^2/u_4 (vezi rel. (31)) este independentă de k_r. În acest fel, studiul expresiei cinetice a procesului complex este descompus în studierea unor dependenţe cinetice mult mai simple, care (cel puţin în ce priveşte procesul catalitic menţionat) sînt cunoscute actualmente cu o exactitate suficient de mare în raport cu precizia metodelor de investigaţie experimentală. În plus, metoda propusă oferă posibilitatea determinării cu anticipaţie a domeniului macro-cinetic, permiţînd concentrarea eforturilor experimentale în modificarea unui număr restrîns variabile, fără a fi nevoie de efectuarea unor numeroase determinări experimentale ale regimului de lucru.

Procedeul de ierarhizare şi combinare a expresiilor pt. vitezele subproceselor poate fi extins şi la treapta următoare — aceea a studierii proceselor considerate de noi aici convenţional drept „elementare". De exemplu, în cazul difuziei interne se poate împărţi procesul în difuzie izotermă şi termodifuzie, prima dintre ele fiind subdivizată în difuzie moleculară, difuzie Knudsen şi difuzie Hagen-Poinseuille (curgere sub influenţa unui gradient de presiune, apărînd în cazul reacţiilor cu variaţie a numărului de moli de gaz); difuzia externă poate avea — afară de difuzia moleculară sau turbulentă prin filmul-limită de difuzie — componente de termodifuzie şi stefaniene, sau se poate cupla cu difuzia longitudinală în stratul de catalizator; iar reacţia — superficială sau în pori—poate fi divizată în adsorbţie şi reacţie între particule adsorbite şi eventual reacţie între o particulă adsorbită şi una din faza externă. Evident, o asemenea continuare a separării şi ierarhizării variabilelor permite o studiere şi evaluare şi mai precisă a ponderii şi efectului diverşilor factori asupra expresiei cinetice globale.

Extinderea menţionată a combinării expresiilor pentru procesele separate implică însă totodată o lărgire a gamei procedeelor de combinare a vitezelor folosite, procedeul de asimilare cu o reţea electrică de rezistenţe cuplate în serie şi în paralel dovedindu-se în mai multe cazuri insuficient Astfel la difuzia internă izotermă, cele trei mecanisme — molecular, Knudsen şi Hagen-Poiseuille — se află în raporturi diferite, şi anume de paralelism între difuzia Hagen-Poiseuille şi celelalte două, dar de excludere reciprocă între mecanismele molecular şi Knudsen, ceea ce ne-a dus la următoarea expresie pentru coeficientul global de difuzie internă;

$$D = D_H + \min (D_K, D_M)$$

(unde indicii H, K şi M se referă la cele trei mecanisme menţionate mai sus), şi la criteriul domenial:

$$\mathfrak{R} = j\,,\ D_j = \max\,[D_H\,,\ \min\,(D_K\,,\ D_M)]$$

Variante complexe de combinare apar şi în cazul reacţiilor de participare a doi reactanţi din faza externă — caz particular de proces cooperativ. În aceste situaţii nu dispunem încă de un algoritm standard de combinare a expresiilor cinetice independente ale proceselor parţiale; presupunem însă că variantele de scheme electrice de tip „rezistenţe"

trebuie înlocuite prin analogii cu schemele electrice cu relee sau — probabil mai eficace deşi mai abstract — cu procedee de combinare oferite de teoria operaţiilor logice.

Catedra de chimie fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Frank-Kamenetzkiy D.A.*, Transferul de masă şi difuzia în cinetica chimică, ed. II, (rus.) Moskva 1967, p. 142
2. *Dye R. E., J. M. Dalla Valle* — Ind. Engn. Chem. *50*, 1196 (1958)
3. *Wheeler A.*, Catalysis. Tome I, Fundamental Principles. P. II, red. by P. H. Emmett; J. Wiley, N. Y. 1952
4. * * * Op. cit. /1/, p. 97
5. *H. Noller, F. Hantke, T. Schwab*, Z. phys. Chem. (NF) *36*, 103 (1963)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

MOTOARE CU ARDERE INTERNĂ

C.Z.: 621.43

POSIBILITIES TO ESTIMATE THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER WITHIN THE COMBUSTION ENGINE CYLINDER

B. GRÜNWALD, I. IANOVICI

Any research on the instantaneous heat transfer in an internal combustion engine has to use either the pressure or the temperature measurements. Each procedure has its advantages as well as its difficulties. A pressure-time history is still the only way to obtain a realistic estimate for the total heat exchange during a cycle. This method requires accurate figures for the wall temperatures, especially for the compression stroke when errors can be significant. The second procedure is more precise but the heat transfer figures are reliable only for few locations where the thermocouples were placed.

The present work shows the authors' attempt to obtain the best values for the total heat transfer and for *the average heat fluxes*, based only on the pressure-time history. Since instantaneous gas pressure was used, *it was important to check* all the requirements of this method.

In order to simplify the first step of such an analysis, the authors focused their attention only on the intervals where the gases are supposed to be chemically homogeneous and no mass transfer in or out of the cylinder takes place. There are two such intervals : the first in the compression stroke between the moment of the closure of the inlet valve (C.I.V.) and the moment when the spark appears (spark timing S.T.) and the second in the expansion stroke between the moment of the end of burning (E.B.) and the moment of opening of the exhaust valve (D.E.V.)*. The moment when burning can be considered esentially finished has been estimated in two ways : first, when the burning mass rate decreases to zero and second, when the instantaneous politropic exponent exceeds the average adiabatic one. As a matter of fact, chemical reactions do occur during the whole expansion strooke but the energy balance is mainly unaffected. It is very difficult to check but some reactions might appear even towards the end of the compression stroke. As for the mass constancy, which is supposed to be during the compression and the expansion stroke (CIV -OEV), it has to be mentioned that the piston rings play a very important part since any gas losses may have sensible effects which will ne analyzed in a following paragraph.

---

* The diagrams which have been used have the following numerical values :
C.I.V. = 240 C. A. S. T. = 340 C.A. E. B. 400 — 420 C.A.
O.E.V. = 477 C.A.

Heat transfer can be calculated using the energy balance for the gases in the cylinder. The authors have used three different forms of this energy balance in order to verify the accuracy of the computation and also because each of them uses specific groups of state parameters.

The first forms is the clasical differential equation :

$$d\,Qw = A \times dL + dU$$

where :

Qw is the heat transferred by convection to the walls ; L — the mechanical work accomplished by the piston or the gases ; A — the equivalent of the mechanical work ; U — the internal energy of the gases.

If we note the crank angle (C.A.) with α, we can write, for small intervals of time, i. e. of $\Delta\alpha$, *the average angular heat transfer rate as* :

$$\frac{\Delta Qw}{\Delta\alpha} = A\,\frac{\Delta L}{\Delta\alpha} + \frac{\Delta U}{\Delta\alpha} \qquad (1)$$

The right term of the eq. (1) can be easily determined by using perfect gas thermodynamics if the main dimensions (bore, stroke) of the engine and the pressure-time history are known.

The average angular rate of the mechanical work, for an interval $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, takes the following form :

$$\frac{\Delta L}{\Delta\alpha} = \frac{p_{\alpha 1} + p_{\alpha 2}}{2} \times \frac{V_{\alpha 1} - V_{\alpha 2}}{\Delta\alpha}$$

where : $P_{\alpha 1}$; $P_{\alpha 2}$; $V_{\alpha 1}$; $V_{\alpha 2}$ are the pressures and the volumes at both ends of the interval*.

The angular rate of the internal energy is obtained with the equation :

$$\frac{\Delta U}{\Delta\alpha} = \frac{C_{v\alpha}}{848} \times \frac{(p_{\alpha 1}V_{\alpha 1} - p_{\alpha 2}V_{\alpha 2})}{\Delta\alpha}$$

where : $C_{v\alpha}$ is the specific heat of the working gas. It has been considered as constant during the $\Delta\alpha$ interval. $C_{v\alpha}$ has been computed with the aid of a second *order* equation ($C_{v\alpha} = a + b \cdot T_\alpha + c \cdot T_\alpha^2$) where T_α is the temperature at the beginning of the interval ($\alpha = \alpha_1$). Obviously, $T_\alpha = \dfrac{p_\alpha V_\alpha}{848 \cdot \nu}$ where ν is the number of moles of gas in the cylinder.

---

* The instantaneous volume (V_α) ias given by the formula $V_\alpha = 0.5 \times V_s \times \sigma_\alpha$ where : V_s is the cylinder capacity $\left(V_s = \dfrac{\pi D^2 S}{4} - D = \text{bore},\ S = \text{stroke}\right)$ and σ_α is the kinematic function : $\sigma_\alpha = [2/(\varepsilon - 1) + (1 - \cos\alpha) + \Lambda\,(1 - \cos 2\alpha)/4]$; (ε = compression ratio ; Λ = crank radius versus lenght of the connecting rod).

A second form of the energy balance can be obtained if the gases are considered in a politropic evolution :

$$\Delta Q_w = A \times \frac{\overline{K}_\alpha - \overline{m}_\alpha}{\overline{K}_\alpha - 1} \times \Delta L$$

where : $\overline{K}_\alpha$ is the ratio of the specific heats at constant pressure and volume and $\overline{m}_\alpha$ is the average politropic exponent of the evolution in the $\Delta\,\alpha$ interval.

Using the previous notations someone gets :

$$Q_w \Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1} = 1{,}986 \times \upsilon \times \frac{\overline{K}_\alpha - \overline{m}_\alpha}{\overline{K}_\alpha - 1} \times \frac{T_{\alpha 1}}{\overline{m}_{\alpha-1}} \left[\left(\frac{p_{\alpha 2}}{p_{\alpha 1}} \right)^{1-1/\overline{m}_\alpha} - 1 \right] \qquad (2)$$

The average politropic exponent can be computed using the pressure time history as follows :

$$\overline{m}_\alpha = [\ln(p_{\alpha 2}/p_{\alpha 1})]/\ln(V_{\alpha 1}/V_{\alpha 2})]$$

At last, if the equation (2) is differenciated, the third form for the average heat transfer rate is to be obtained for a small $\Delta\alpha$:

$$\frac{Q_w \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{\Delta\alpha} = 1.986 \times \nu \times \frac{\overline{K}_\alpha - \overline{m}_\alpha}{\overline{K}_\alpha - 1} \times \frac{T_{\alpha 1}}{\overline{m}_\alpha} \times \frac{p_{\alpha 2} - p_{\alpha 1}}{p_{\alpha 1}} \left(\frac{p_{\alpha 2}}{p_{\alpha 1}} \right)^{-1/\overline{m}_\alpha} \times \frac{1}{\Delta\alpha} \qquad (3)$$

This equation might became of major interest if the pressure-time history and its first order derivative (P'_α) are both available.

The eq. (3) includes the term $(P_{\alpha_2} - P_{\alpha_1})/\Delta\alpha$ which represents this derivative for small enough values of the $\Delta\alpha$. If the pressure derivative diagram is avalaible this term can be substituted with an averaged value $p' = 0.5 \times (p'_{\alpha 1} + p'_{\alpha 2})$.

Fig. 1 represents the angular heat transfer rate versus crank angle, as computed with eq. (2). The eq.(1) and (3) came out with figures insignificantly different. Table 1 offers the opportunity to evaluate the absolute differences between the computed values.

A peculiar fact has attracted the authors' attention : the curve shown in fig. 1 has some interesting minimum peaks during the compression stroke as well as during the expansion one. These peculiarities are due to a lot of factors. For example, at the beginning of the compression stroke the absolute heat transfer area is large and cold enough because an important part of the cylinder sleeve is uncovered. Towards the end of the compression stroke the area decreases but the temperature of the gases has already large values. During the expansion stroke the temperature of the gases decreases substantially and therefore the heat transfer is slown

down+. The end of the expansion stroke is evidently marked by the uncovering of an important cold surface, i. e. the cylinder sleeve,

If the values of the heat transfer, computed for equal intervals ($\Delta\alpha$), are summed up the result will be the total convective heat transfer during the compression and respectively the expansion stroke.

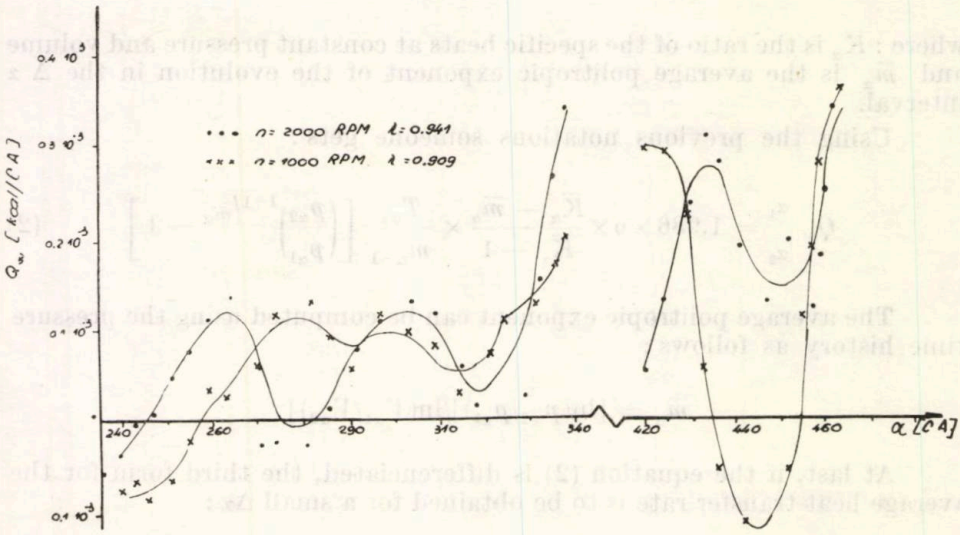


Fig. 1

The results (table 2) were obtained for a pressure time history at 2000 RPM and an air excess coefficient $\lambda = 0.943$ ($F = 1{,}1$ air-fuel ratio). The differences between the values obtained with three equations are

Table 1

Angular heat transfer rate (kcal/C.A.)							
	Compression				Expansion		
α [C.A]	Equation (1) $QWPS[10^4]$	Equation (2) $QW[10^4]$	Equation (3) $QWP[10^4]$	α [C.A]	Equation (1) $QWPS[10^4]$	Equation (2) $QW[10^4]$	Equation (3) $QWP[10^4]$
240	−0.755	−0.755	−0.752	400	0.351×10	-0.351×10	0.355×10
250	−0.861	−0.861	−0.857	410	0.215×10	0.215×10	0.217×10
260	0.531	0.531	0.528	420	1.04	1.04	1.05
280	1.66	1.66	1.65	430	2.42	2.42	2.44
300	1.07	1.07	1.06	440	2.20	2.20	2.22
320	0.319	0.318	0.315	450	1.47	1.47	1.48
330	0.607	0.607	0.600	460	2.54	2.54	2.55
340	3.58	3.58	3.54	470	5.46	5.46	5.48

* The negative values during the expansion stroke can not be explained as the result of a certain surface-temperature relationship. They are probably the consequence of some late chemical reactions. As a mater of fact, $\overline{m}_\alpha$ is smaller than $\overline{K}_\alpha$ for that very interval.

less than 3%, during the compression and less than 2% during the expansion stroke. This computation could discard none of the eq. and thus the authors had to decide that each of them can be used with equal success since the sources of errors are very similar for all of them.

Table 2

Computation method	Heat transfered to the walls (kcal/cycle)	
	Compression	Expansion
Equation (1)	0.828×10^{-2}	0.131×10^{-1}
Equation (2)	0.806×10^{-2}	0.129×10^{-1}
Equation (3)	0.814×10^{-2}	0.129×10^{-1}

Although averaged over 300 cycles (1), the pressure-time history is not smooth and slight deffections do appear. Absolute values are not esentially affected but when pressure differences are used *eq* (3) — they appear to be most important.

Thus, the authors have smoothed the pressure rate versus time (crank angle) curve. The graphical method proved itself to be still the simpglest and quickest. Having the pressure-time history it was easy to trace ts derivative for 1 C.A intervals (fig. 2).

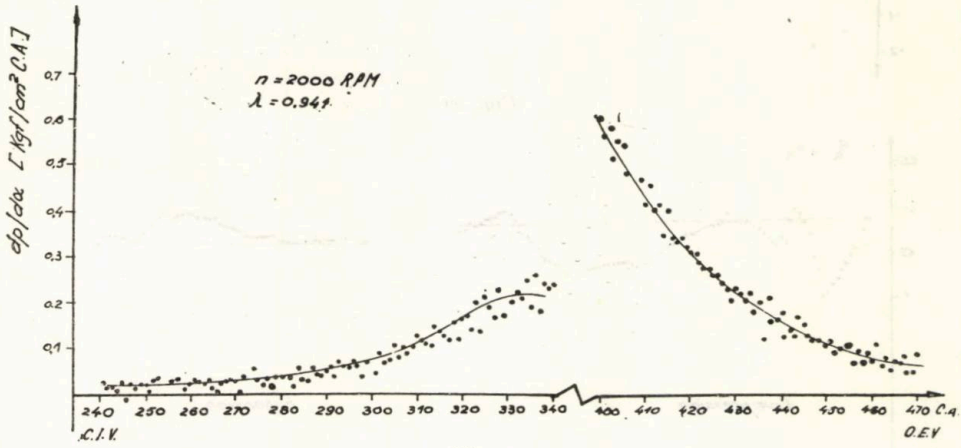


Fig. 2

This curve has been smoothed and the new pressures computed in such a way that no difference higher than 1% of the uncorected value should occur. Results from corected (tab. 2) and uncorected (tab. 3) pressure-time histories have been compared. The differences reach 20% for the expansion stroke.

The authors suppose that wrong values are to be expected for the uncorected pressure-time history since absurd figures appear for $\overline{m}_\alpha$.

For example (fig. 3 a) $\bar{m}_\alpha$ has the extreme values of -1.721 and 3.771 during the compression stroke and 0.477 and 2.433 during the expansion stroke.

Table 3

Computation method	Heat transfered to the walls (kcal/cycle)	
	Compression	Expansion
Equation (1)	0.802×10^{-2}	0.109×10^{-1}
Equation (2)	0.763×10^{-2}	0.113×10^{-1}
Equation (3)	0.765×10^{-2}	0.110×10^{-1}

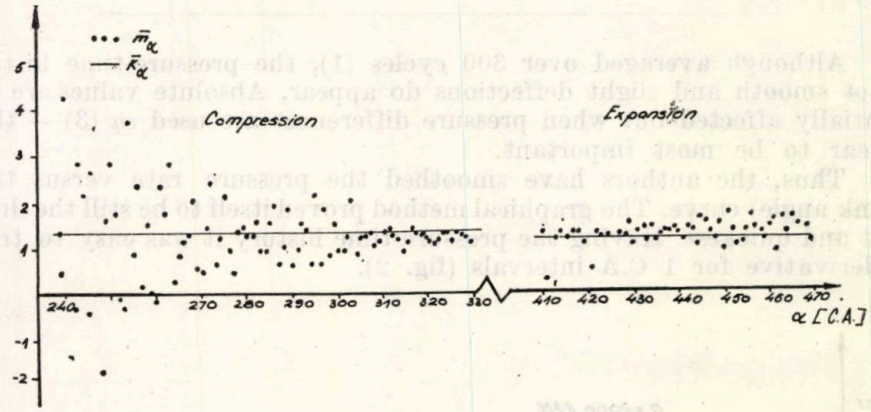


Fig. 3a

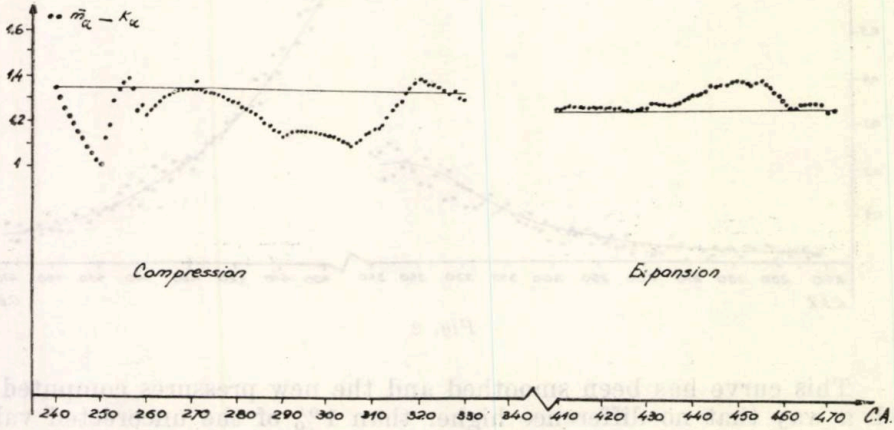


Fig. 3b

In order to make high precision computations someone could be tempted to reduce $\Delta\alpha$ because all the equations (1), (2), (3) contain averaged values for the politropic and adiabatic exponents, the specific

heat and the resulting mechanical work and internal energy. On the other hand, the politropic exponents show an important differences when it is computed for small intervals (fig. 3b) and a smoothed pressure-time history is used. Thus results might be significantly altered for small intervals too. In order to establish the influence of the size of the interval (Δ/α), several values were tried (fig. 4) As it is clearly shown, the total heat transfer values for the considered intervals (C.I.V. — S.T.) and (E.B — O.E.V.) are unaffected by the step size. It is up to the researcher to decide which step has to be used according to the total computation time required. The instantaneous heat transfer rate is but seriously changed. As it is shown in table 4 differences up to 60% can be found although the five tabulated values were chosen at random. Therefore, it should be emphasized that the interval ($\Delta\alpha$) has to be carefully chosen when instantaneous values of the energetic exchanges are computed.

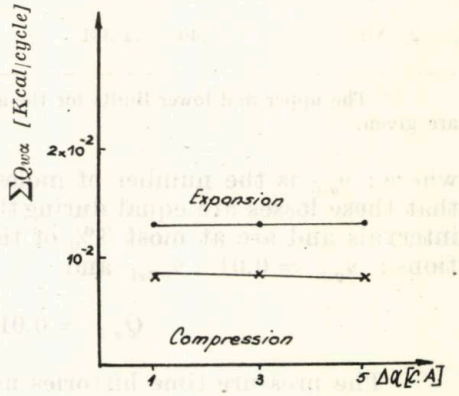


Fig. 4

Table 4

Step size $\Delta\alpha$	Angular heat transfer rate (kcal/C.A.)				
	$\alpha = 270°$	$\alpha = 285°$	$\alpha = 315°$	$\alpha = 450°$	$\alpha = 465°$
1°	0.595×10^{-4}	0.979×10^{-4}	0.608×10^{-4}	0.147×10^{-3}	0.432×10^{-3}
3°	0.780×10^{-4}	0.860×10^{-4}	0.540×10^{-4}	0.180×10^{-3}	0.440×10^{-3}
5°	0.930×10^{-4}	0.906×10^{-4}	0.370×10^{-4}	0.198×10^{-3}	0.456×10^{-3}

A special problem arises when a spark ignition engine is studied because the fresh charge is a mixture of air and fuel-vapour Sometimes this fact is overlooked. The authors have analysed this influence using the following eq. for the specific heat of the fuel:

$$C_{v\alpha} = 3.26 + 61.9\times10^{-3}\times T_\alpha - 20.15\times10^{-6}\times T_\alpha^2 \left[\frac{\text{Kcal}}{\text{Kmol}^\circ\,\text{K}}\right]$$

The results (table 5) have pointed out that the total heat transfered during the compression stroke (Q_{wc}) is affected with some 40% when neglecting the fuel vapour ($n = 2000$ RPM, $\lambda = 1.12$)

Reference /1/ has shown that heat transfer has unusually high values during the compression stroke. Since mass transfer could effect the results the authors have assumed that any gas losses around the piston rings are equivalent to a proportional amount of heat transfered to the walls ($Q_{\text{gas lost}}$):

$$Q_{g.l.} = \nu_{g.l.}\times C_{v\alpha}\times T_\alpha$$

Table 5

Charge	K_α +)	Qwc (kcal/cycle)		
		Equation (1)	Equation (2)	Equation (3)
1. Air+Fuel	1.35...1.32	0.890×10^{-2}	0.898×10^{-2}	0.882×10^{-2}
2. Air	1.404...1.381	1.240×10^{-2}	1.250×10^{-2}	1.230×10^{-2}

* The upper and lower limits for the adiabatic exponent during the compression stroke are given.

where : $\nu_{g.l.}$ is the number of moles of lost gases. It has been estimated that these losses are equal during the compression, burning and expansion intervals and are at most 3% of the total quantity. With these assumptions : $\nu_{g.l.} = 0.01 \times \nu_{total}$ and

$$Q_{g.l.} = 0.01 \times \nu_t \times C_{v\alpha} \times T_\alpha$$

The pressure-time histories used for the present analysis have been obtained on a single cylinder spark ignited piston engine with a 98.4mm bore and a 76.2 mm stroke. At 2000 RPM and $\lambda = 1.12$ a total number of kmoles/cycle (ν_t) of 19.08×10^{-6} was obtained. Using values computed at a point close to the top dead center ($T = 620°K$; $C_v = 6{,}12$ kcal/kmol°k) we obtained $Q_{g.l.} = 0.0725 \times 10^{-2}$ kcal/cycle. That is some 8% of the previous Q_{wc}. This fact proves that usual gas losses do not affect esentially heat transfer computations.

It is possible to calculate an instantaneous heat flux when the total heat transfer has been previously determined. „*Total*" values of the instantaneous heat flux come out because they are computed using the total heat transfer to the walls. These fluxes can be compared to the instantaneous heat fluxes obtained locally with thermocouples. A „*total*" heat transfer coefficient (analogously named „total" as the „total" flux) can be computed out, too. The unusual values of such a coefficient were commented in /1/ and the authours decided to expose here only the method used for their calculation.

Heat transfer rate can be defined as :

$$\frac{dQ_w}{d\tau} = \alpha_c \times A_\alpha \times \Delta T_\alpha$$

where : τ is the time ; α_c — the convective heat transfer coefficient ; A_α — the instantaneous heat transfer area ; ΔT_α — the difference between the instantaneous temperature of the gases (T_α) and the average temperature of the wall (T_w assumed constant). We can easily substituate :

$$d\tau = \frac{d\alpha}{6 \times 3600 \times n}$$

The „total" instantaneous heat flux for a $\Delta\alpha$ interval will be :

$$q_{w\alpha} = \frac{21600 \times n}{A_\alpha} \times \frac{\Delta Q_w}{\Delta\alpha}$$

where : $\frac{\Delta Q_w}{\Delta\alpha}$ is the angular heat transfer rate calculated with one of the eq (1) ; (2) ; (3).

Figure 5 shows a heat flux curve for different speeds and air excess coefficients It is evident that values are highly dispersed. This fact appears even if the techniques used to obtain the pressure time history differ

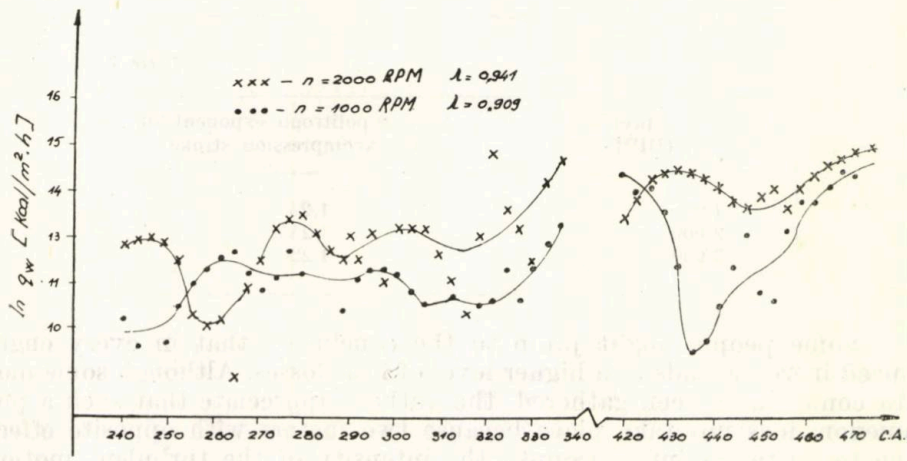


Fig. 5

essentially. (fig. 4 a has been obtained on the previously mentioned engine ; fig. 4.b has been obtained on a spark ignition piston engine with 82.5mm bore and 114 mm stroke).

It has to be remarqued that when the speed is increased the instantaneous heat flux is clearly amplified during the compression stroke. The total heat transfered to the walls shows the same trend (table 6)+

Since the gases have, for the same interval (C.A.) a smaller time to be in contact with the walls, at higher speeds heat transfer should decrease. The results presented here lead to an opposite conclusion. Because of its importance suplementary checking was necessary. The values of the average politropic exponent have been examined because, as it is well known a comparison with the average adiabatic exponent shows the intensity of the convective heat transfer. The results have proved the previous conclusion.

If turbulent gas motions as well as their nature and determining factors are taken into account, a comprehensive explanation can be esta-

* The influence of the *speed* variation in the expan sion stroke was not studied because a late burning has occured at high speeds.

blished. Experimentally it has been demonstrated that the intensity of these turbulent motions does increase with the speed. The authors' data are in good agreement with this statement.

Table 6

Speed (RPM)	Heat exchanged to the walls during the compression stroke (kcal/cycle)
1 000	0.648×10^{-2}
2 000	0.828×10^{-2}
3 000	1.030×10^{-2}

Table 7

Speed (RPM)	Average politropic exponent for the xcompression stroke
1 000	1.265
2 000	1 255
3 000	1 220

Some people might jump to the conclusion that in every engine a speed increase leads to a higher level of heat losses. Although some more data could have been gathered, the authors appreciate that such a phenomenon does not take place because two factors with opposite effects have to be taken into account: the intensity of the turbulent motions and the time factor which limits the contact between the gases and the walls. The main tendency is determined by the constructive details of the engine which determine the nature of the gasdynamic process.

At last, we should note that the heat flux has, in all the studied cases, a minimum during the expansion stroke.

If eq.(4) defines the heat flux, we can see that the angular heat transfer $(\Delta Q_w/\Delta\alpha)$ has the main influence since the heat transfer area (A_α) is a continuously increasing function during the expansion stroke.

The „total'' convective heat transfer coefficient is obtained as:

$$\alpha_c = \frac{q_w}{\Delta T_{\alpha m}} \tag{5}$$

where: $\Delta T_{\alpha m}$ is the average difference between the temperatures of the gases and of the wall. $(\Delta T_{\alpha m} = T_\alpha - T_{wm})$; T_{wm} — average wall temperature.

Using eq. (4); eq. (5) becomes:

$$\alpha_c = \frac{21600 \times n}{A_\alpha \times \Delta T_{\alpha n}} \times \frac{\Delta Q_w}{\Delta\alpha} \tag{6}$$

The term used to define α_c has to be analysed because in the internal combustion engines local gas movements lead to a marked local character of the heat transfer coefficients. When the heat transfer coefficient is obtained using the pressure-time history, the total heat transfer is taken into account since $\Delta Qw/\Delta\alpha$ is refered to the whole mass in the cylinder. This fact has been omitted in the literature. The term „total" heat transfer coefficient is meant to attract the attention upon the nature of this physical quantity, upon the differences which exist between it and the coefficient obtained from local heat flux or temperature measurements. The experimental data gathered in various ways can be realistically compared only if the already mentioned difference is considered.

Total convective heat transfer coefficient versus crank angle is shown in figure 6 for two speeds. Two scales had to be used for the compression and expansion strokes because of the great difference between the levels of the corresponding „total" heat transfer coefficients.

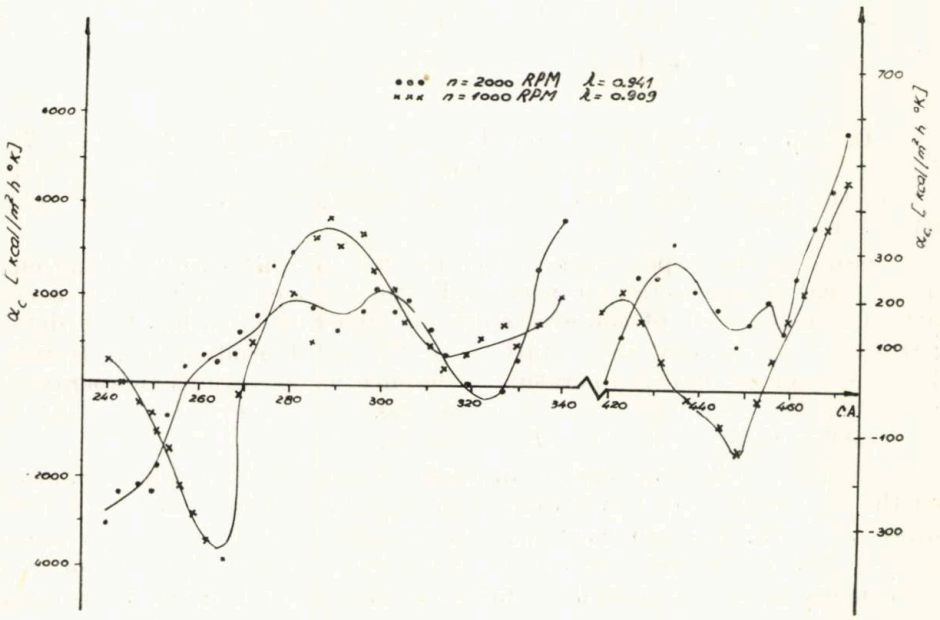


Fig. 6

Our present purpose is not to discuss the very peculiar form taken by the convective heat transfer coefficient which has not yet been published. We have still to point out that the values for the compression stroke are some times greater than those for the expansion one and up to one hundred times greater than the usual values for gas flows in pipes. This fact has been called „the anomaly of the convective heat transfer during the compression stroke of an internal combustion piston engine" and has been discussed in a previous work /1/.

In order to calculate either convective geat transfer coefficients when the angular heat transfer rate is known or an angular heat transfer

rate when a theoretically deduced formula for the convective heat transfer coefficient is applied, someone has to use eq. (6). An estimate of the average wall temperature (Tw_m) has to be made for both cases. Such an estimate might lead to important errors especially during the compression stroke when the gas temperature is at a low level, close to the wall temperature level. Besides, there are great differences between the temperatures of each wall and there is a continuous change in the relative importance of the diferent surfaces. Therefore the authors propose separate terms for each surface. The product between the total heat transfer area and the average difference of temperature becomes :

$$A_\alpha \times \Delta T_m = \sum A_{\alpha i} \times \Delta T_{\alpha i}$$

where

$$\sum A_{\alpha i} \times \Delta T_{\alpha i} = A_{c\alpha}(T_\alpha - T_c) + Ap(T_\alpha - T_p) \times A_{sa}(T_\alpha - T_{sa}) + \\ + A_{se}(T_\alpha - T_{se} + A_{ch}(T_\alpha - T_{ch})$$

In this last form $A_{c\alpha}$; Ap ; A_{sa} ; A_{st} ; A_{ch} and T_c ; T_p ; T_{sa} ; T_{se} ; T_{ch} are the areas and the corresponding temperatures of the cylinder sleeve, the piston, the inlet valve, the exhaust valve, and the cylinder head.

Usually, the experimental data are not sufficient to have the characteristical temperature for each wall and thus estimations are necessary. The magnitude of the errors due to such estimates has been determined through several computations of the total product heat transfer area and average wall temperature difference using various temperatures for each wall. The reference lot of values was : $T_p = 490°K$; $T_c = 380°K$; $T_{ch} = 390°K$; $T_{sa} = 470°K$; $T_{se} = 650°K$.

Figure 7 a shows a curve obtained when a 60°K increase has affected the temperature of the piston. The $A_\alpha \times \Delta T_{\alpha m}$ value has been altered towards its end. The expansion strokes are affected only by a 2% change. A 20°K raise of the temperature of the cylinder sleeve (fig. 7 b) or a simultaneous, 60°K change of the temperatures of the piston and the exhaust valve (fig. 7c) ead to similar changes as in the first case.

These errors affect the „total" convective heat transfer coefficient or the „total" heat transfer rate with percentages as shown by eq. (6). This fact has a special significance when studying the already mentioned anomaly because it shows, that even a great misjudge of the wall temperatures does not affect the order of magnitude of the computed figures mentioned in ref. /1/.

The enormous volume of calculations needed by the use of pressure time histories and the various assumptions which were studied required the use of numerical computers. The logical scheme and the listing of the program used are presented in order to allow any interested reader to use them for similar or related studies.

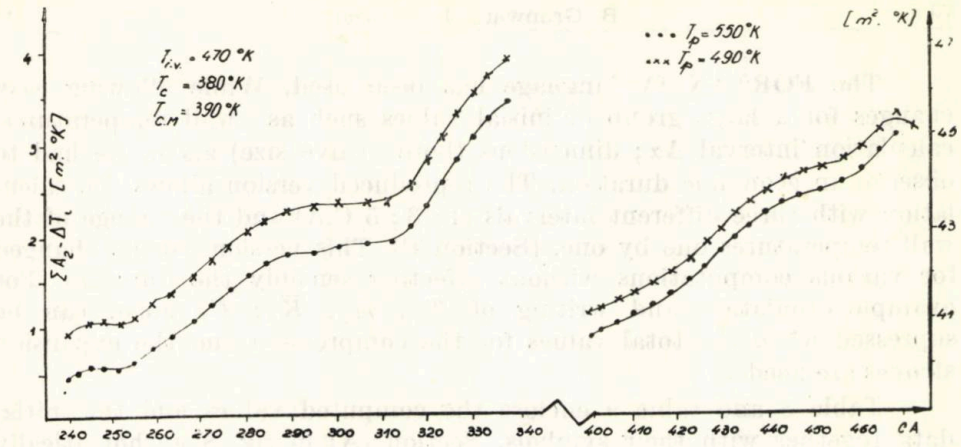


Fig. 7a

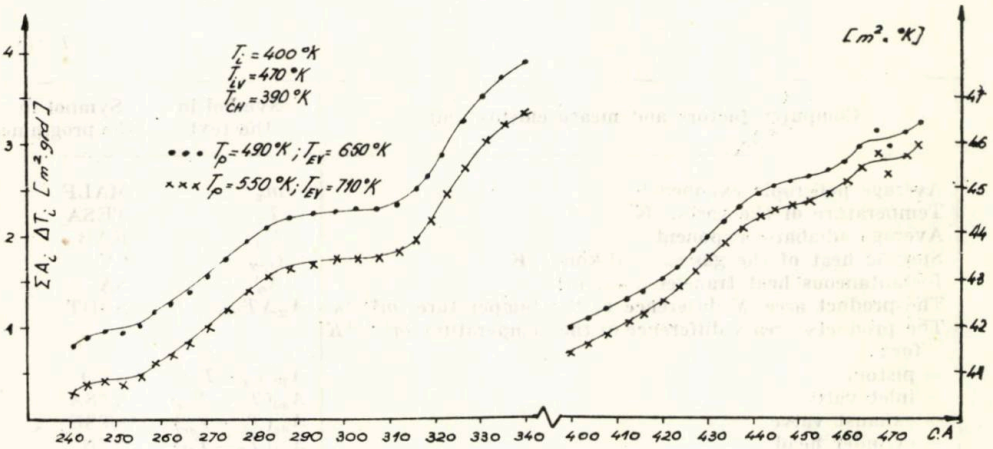


Fig. 7b

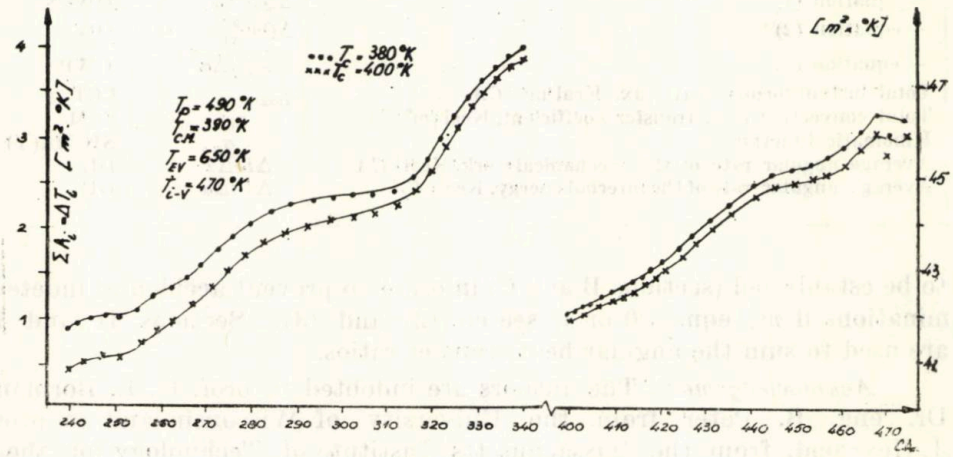


Fig. 7c

The FORTAN IV language has been used. While allowing easy changes for a large group of initial values such as: wall temperatures, calculation interval $\Delta\alpha$; dimensions (bore; valve size) a.s.o., we had to observe an economic duration. The reproduced version allows the calculation with three different intervals (1; 3; 5 C.A) and the change of the wall temperatures one by one. (Section F). This version can be changed for various computations without affecting sensibly the duration. For example tabulation and writing of T_α; $\overline{m}_\alpha$; $\overline{K}_\alpha$; Cv a.s.o. can be supressed when the total values for the compression and the expansion strokes are needed.

Table 8 and table 9 enclose the computed values and the initial data together with their symbols. Section (A) in fig. 8 authomatically converts psi into kgf/cm^2 pressure units if neded. A special protection had

Table 8

Computed factors and measurements units	Symbol in the text	Symbol in the programe
Average politropic exponent	m_α	MALF
Temperature of the gases, °K	T_α	TESA
Average adiabatic exponent	K_α	KAB
Specific heat of the gases, Kcal/kmol, °K	$C_{v\alpha}$	CV
Instantaneous heat transfer area, m^2	A_α	SA
The product area X difference of the temperature, $m^2 \times °k$	$A_\alpha \Delta T_{\alpha m}$	SADT
The products area x difference of the temperature, $m^2 \times °K$ for:		
— pistom	$A_p(T_\alpha - T_p)$	ATD
— inlet valve	$A_{sa}(T_\alpha - T_{sa})$	ATSA
— exhaust valve	$A_{se}(T_\alpha - T_{se})$	ATSE
— cylinder head	$A_{ch}(T_\alpha - T_{ch})$	ATR
— cylinder sleev	$A_c(T_\alpha - T_c)$	ATC
Average angular heat transfer rate, Kcal/°CA		
— equation (1)	$\Delta Qw/\Delta\alpha$	QWPS
— equation (2)	$\Delta Qw\|_{\alpha 1}^{\alpha 2}$	QW
— equation (3)	$Qw\|_{\alpha 1}^{\alpha 2}/\Delta\alpha$	QWP
Total instantaneous heat flux, Kcal/m^2 °CA	$q_{w\alpha}$	CCT
Total convective heat transfer coefficient, Kcal /m^2°CA	α_c	CCM
Kinematic function	σ_α	SIGMA(Y)
Average angular rate of the mechanical work, Kcal/°CA	$\Delta L/\Delta\alpha$	DL
Average angular rate of the interbal energy, Kcal/°CA	$\Delta U/\Delta\alpha$	DU

to be established (sections B and C) in order to prevent accidental indeterminations if m_α equals 0 or 1 see eq. (2) and (3). Sections D and E are used to sum the angular heat transfer ratios.

Acknowledgement. The authors are indebted to prof. G. L. Borman, Dr. eng. B. Peter from the University of Wisconsin and to prof. J. Heywood, from the Massachusetts Institute of Technology for their kindness to providethem with several digitized pressure—time diagrams.

Table 9

Initial data and measurement units	Symbol in the text	Symbol in the programme
Gas pressure, kgf/cm², *psi*	p_α	P(I)
Diameter, *m*	D	D or DP
Inlet valve diameter, *m*	—	DSA
Exhaust valve diameter, *m*	—	DSE
Cylinder capacity m^3	V	VS
Crank radius versus length of the connecting rod	Δ	LMBDA
Compression ratio	ε	EPS
Engine speed, r.p.m.	n	TN
Air molar quantity per cycle, Kmoli/cycle	—	NIUAE
Fuel molar quantity per cycle, Kmoli/cycle	—	NIUC
Initial mixture molar quantity per cycle, Kmoli/cycle	—	NIUAI
Burned gases molar quantity per cycle, Kmoli/cycle	—	NIUGA
Coefficients of specific heat*	$C_{v\alpha}$	—
— air	a_a, b_a, c_a	AA, DBA, CA
— fuel	a_c, b_c, c_c	AC, BC, CC
— burned gases	a_{ga}, b_{ga}, c_{ga}	AGA, BGA, CGA
— initial mixture	a_{ai}, b_{ai}, c_{ai}	AAI, BAI, CAI
Wall temperature, °K for :		
— piston	T_p	TP
— inlet valve	T_{sa}	TSA
— exhaust valve	T_{se}	TSA
— cylinder head	T_{ch}	TCH
— cylinder sleeve	T_c	TC
Stroke limits, °CA		
— Inlet valve closure	CIV	LIMI
— Spark tining	ST	LIMD
— End burning	EB	LIMF
— Exhaust valve opening	OEV	LIMZ
Crank angle, radian	—	Y
Computation step, °CA	$\Delta\alpha$	YH

* $C_v = a + bT + cT^2$ (Kcalα/mol, °K).

Internal Combustion Enginers Chair
Polytechnic Institute ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucharest

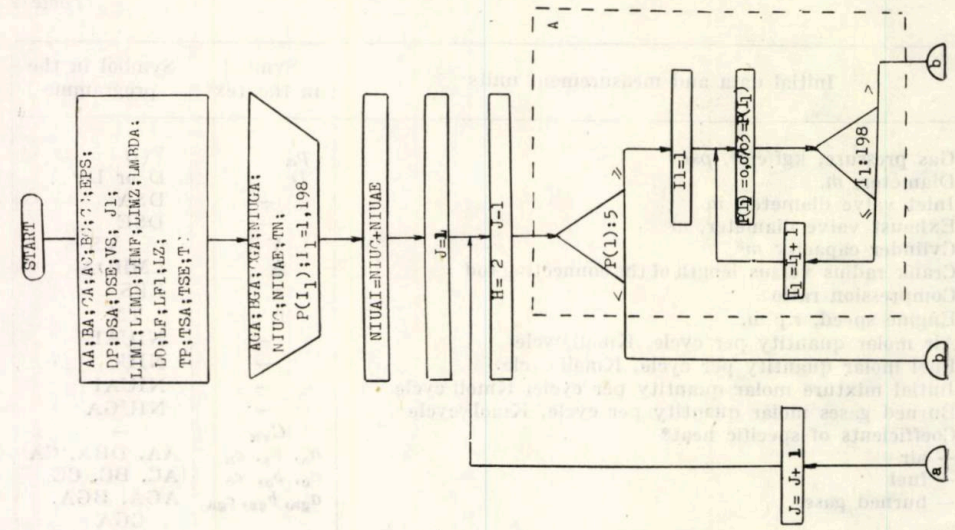
REFERENCES

1. *B. Grünwald, I. Ianovici* — About an Anomaly of the Convec tive Heat Transfer in the Cylinder of an Internal Combustion Engine. Preprints of papers presented at the ,,Firts Heat Transfer Conference", vol. II, p. 667—679, Iaşi, România, 1973.

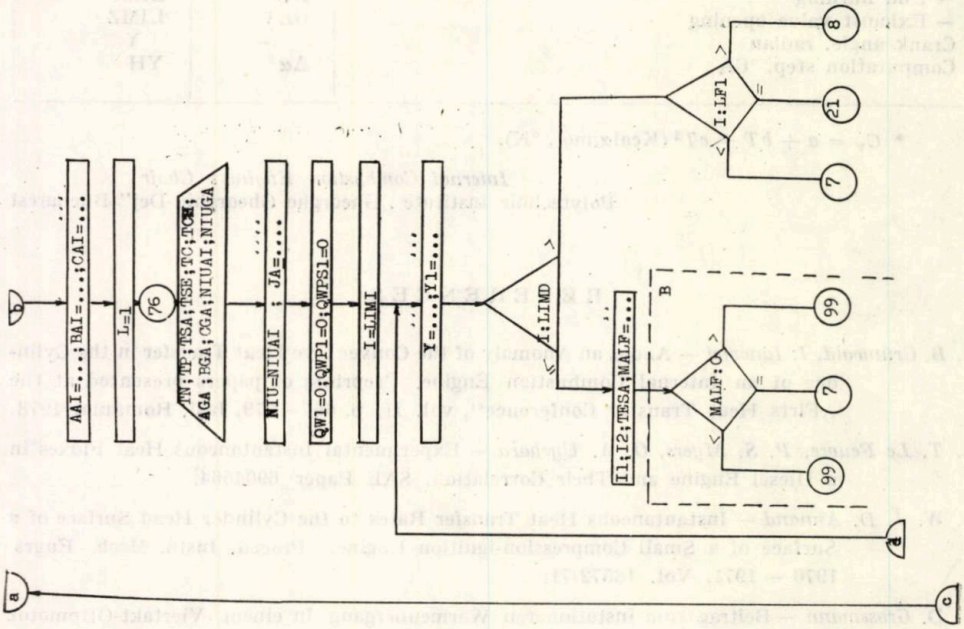
2. *T. Le Feuvre. P. S. Myers, O. A. Uyehara* — Experimental Instantaneous Heat Fluxes in a Diesel Engine and Their Correlation. SAE Paper 6904564.

3. *W. J. D. Annand* — Instantaneous Heat Transfer Rates to the Cylinder Head Surface of a Surface of a Small Compression-ignition Engine. Proced. Instn. Mech. Engrs 1970 — 1971, Vol. 18572/71.

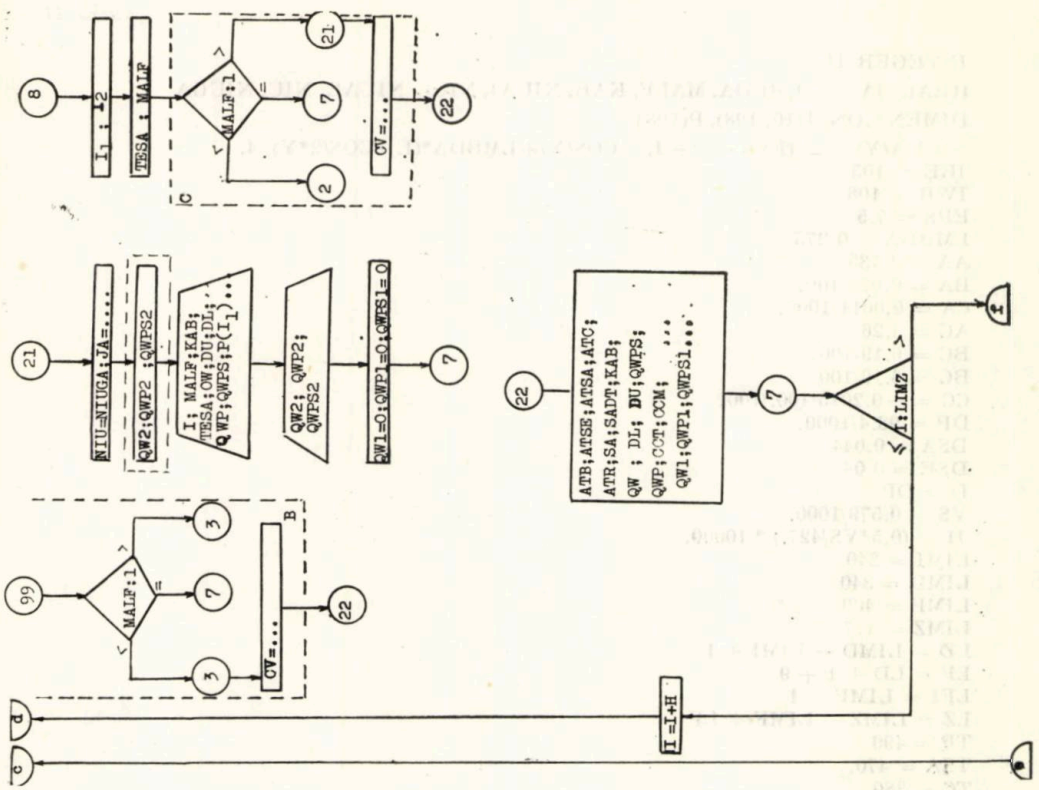
4. *D. Grossmann* — Beitrag zum instationaren Warmeubergang in einem Viertakt-Ottomotor Dissertation, Technischen Universitat Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig 1969.



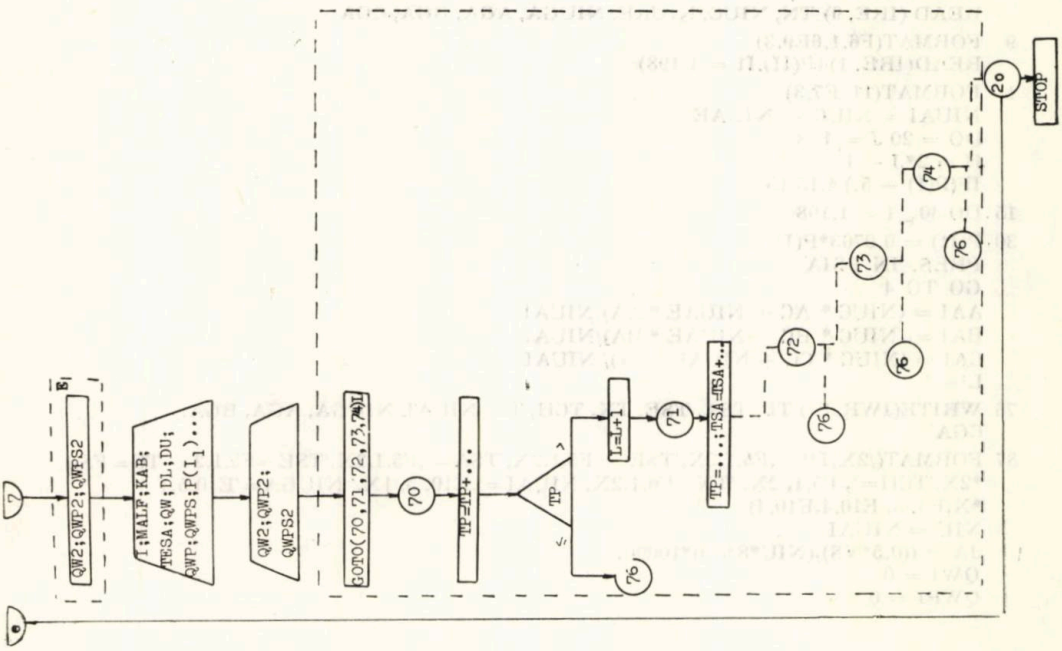
Schema 1



Schema 2



Schema 3



Schema 4

Anexa II

```
      INTEGER H
      REAL JA, J1, LMBDA, MALF, KAB, NIUAI, NIUC, NIUAE, NIU, NIUGA
      DIMENSION T(10. 198), P(198)
      SIGMA(Y) = 2./(EPS−1.)+ 1.− COS(Y)+LMBDA*(1.−COS(2*Y))/4.
      IRE = 105
      IWR = 108
      EPS = 7.5
      LMBDA = 0.275
      AA = 4.733
      BA = 0.026/100.
      CA = 0,0011/1000.
      AC = 3.26
      BC = 6.19/100.
      BC = 6.19/100.
      CC = −0.2015/100./100,
      DP = 98.4/1000.
      DSA = 0.044
      DSE = 0.04
      D = DP
      VS = 0.579/1000.
      J1 = (0.5*VS/427.) * 10000.
      LIMI = 240
      LIMD = 340
      LIMF = 400
      LIMZ = 477
      LD = LIMD − LIMI + 1
      LF = LD + 1 + 9
      LF1 = LIMF − 1
      LZ = LIMZ − LIMF + LF
      TP = 490
      TSA = 470.
      TC = 380
      TSE = 650.
      TCH = 390.
      READ (IRE, 9) TN, NIUC, NIUAE, NIUGA, AGA, BGA, CGA
9     FORMAT(F6.1.6E9.3)
      READ(IRE. 1) (P(II).I1 = 1.198)
1     FORMAT(11 F7.3)
      NIUAI = NIUC + NIUAE
      DO = 20 J = 1. 3
      H = 2*J − 1
      IF(P(1) − 5.) 4.15.15
15    DO 30 ␣1 = 1.198
30    P(I1) = 0.0703*P(I1)
      PRES. IN PSIA
      GO TO 4
      AAI = (NIUC * AC + NIUAE * AA)/NIUAI
      BAI = (NIUC * BC + NIUAE * BA)/NIUAI
      CAI = (NIUC * CC + NIUAE * CA)/ NIUAI
      L = 1
76    WRITE(IWR. 87) TP, TSA, TSE, TX, TCH, TN, NIUAI, NIUGA, AGA, BGA,
      CGA
87    FORMAT(/2X,TP=',F5.1,2X,'TSE',=F5.1,2X,'TSA=',F5.1,2X,'TSE=F5.1,2×·TC=FS.1.
      *2X.'TCH=', F5.1, 2X, 'TN=F6.1,2X, NIUAI=',E10. 5, 1X,' NIUGA='E10.5,1
      *X,F5. 3, E10.4,E10.4)
      NIU = NIUAI
      JA = ((0.5*VS)/(NIU*848.))*10000.
      QWI = 0
      QWP1 = 0
```

```
      QWPS1 = 0
      DO7 I = LIMI, LIMZ. H
      Y = I * 22./1260.
      Y1 = (I + H) * 22./1260.
      IF(I - LIMD) 5,5,6
    5 I1 = I - LIMI + 1
      I2 = I 1 + H
      TESA = JA * P(1) * SIGMA(Y)
      MALF = ALOG(P(2)/P(I1)) / ALOG(SIGMA(Y))/SIGMA(Y1))
      IF(MALF -0.)99,7,99
   99 IF(MALF - 1.)3,7,3
    3 VC = AAI + BAI * TESA + CAI * (TESA * * 2))
      GO TO 22
    6 IF(I - LFI) 7,21,8
   21 QW2 = QW 1
      NIU = NIUGA
      JA = ((0, 5 * VS) / (NIU * 848.)) * 10000.
      QWPSZ = (QWPS1 - (T(7.1) + T(7.LD)) * 0.5)*H
      QWP2 = (QWP1 - (T(8,1) + T(8,LD)) * 0.5) * H
      WRITE(IWR, 19)H
   19 FORMAT(30X, COMPRIMARE H=',I1//1X. 'ALFA'.4X',KAB'.6X,MALF'4X',T
      *ESA' , 8X, ' CCM', 10X, QU',11X, QWPS',10X,'QWP',10X,QW',0X, CCT', 4X.
      *'PRES'α//)
      WRITE(IWR.17) ((T(13. I).13 = 1.10).P(I1).I1 = 1.LD)
   17 FORMAT(1X,F5,1,2X,F5.3.2X.F6.3.2X.F6.1.2X.E12.3.1X.E12.3.1X.E12.3.
      *1X.E12.3 1X. E12. 3. 1X. E12, 3. 2. X. F7. 3)
      WRITE(IWR, 11) QW2
   11 FORMAT(/8X, 'SUMA VALORILOR INSTANTANEE QWAI = ' E10.3)
      WRITE(IWR,12) QWP2
   12 FORMAT(5X, INTEGRALA DERIVATEI ANALITICE QWAI = 'E10.3)
      WRITE(IWR.13) QWPS 2
   13 FORMAT(4X, 'INTEGRALA DERIVATEI DIN BILANȚ QWAI = ' E10.3//)
      QWI = 0
      QWP1 = 0
      QWPSI = 0
      GO TO 7
    8 I1 = I + LD - LIMF + 9 + 1
      I2 = I1 + H
      TESA = JA * P(I1) * SIGMA(Y)
      ÎMALF = ALOG(P(12)/P(I1))/ALOG(SIGMA(Y)/SIGMA(Y1)
      IF(MALF - 1.)2,7,2
    2 CV = AGA + BGA * TESA + CGA * (TESA * * 2)
      GO TO 22
   22 ATD = 22.* (DP * * 2)*(TESA - TP)/28.
      ATSA = 22.*(DSA**2)*(TESA-TSA(/28.
      ATSE = 22.*(DSE * * 2)* (TESA - TSE)/28.
        ATC = 2.* VS * SIGMA(Y) * (TESA - TC) / DP
      ATR = (22./ 28. ) * ( ( DP * * 2) - (DSA * * 2) - (DSE * * 2)) * (TESA -TCH)
      SADT = ATD + ATSA + ATSE + ACC + ATR
      KAB = 1. + 1.986/CV
      QW = (1.986 * NIU* (KAB - MALF) * TESA * (((P(I2)/P(I1)) * * ((MALF -
      -1.)/MALF)) - 1
      * )) / ((KAB - 1.) * (MALF - 1))
      DL = J1 * 0.5 * (P(I1) +P(I2)) * (SIGMA(Y1) - SIGMA(Y))/H
      DU = NIU * CV * JA * (P(12)* SIGMA(Y1)-P(I 1)* SIGMA(Y))/H
      QWPS = DU + DL
      QWP=1.986*NIU*(KAB-MALF)/(KAB-1)*TESA/(MALF*H)*(P(I2) - P(I1))/
      *P(I1)* (P(I2)/P(I1))* * (-1./MALF)
      CCM = (QW/SADT) * 21600.* TN
```

```
      SA = 22 * (D**2) / 14.+2.*VS* SIGMA(Y) /D
      T(1,I1) = I
      T(2,I1) = KAB
      T(3,I1) = MALF
      T(4,I1) = TESA
      T(5,I1) = CCM
      T(6,I1) = QPU
      T(7,I1) = QWPS
      T(8,I1) = QWP
      T(9,I1) = QW
      CCT = T(9.I1) / SA)* 21600.*TN
      T(10.I1) = CCT
      QWI = QW1 + QW
      QWP1 = QWP1 + QWP
      QWPS1 = QWPS 1 + QW P S
    7 CONTINUE
      QW2 = QW1
      QWP2 = (QWP1 - (T(8.LF) + T(8.LZ))*0.5)*H
      QWPS 2 = ((QWPS1 -(T(7.LF)+ T(7.LZ)) * 0.5) *H
      WROTE(IWR.14)H
   14 FORMAT(30X, DESTINDERE H= 'I1//1X,'ALFA',4X,KAB',6X,MALF',4X, 'T
     *ESA',8X,CCM'10X,QU',11X,QWPS'10X,QWP',10X,'QW',10X,CCT',5X,*'PRES'//)
      WRITE(IWR, 86) ((T(13, I1), I3 = 1, 10), P(I1), I1 = LF,LZ)
   86 FORMAT(1X. FS. 1.2X. F5. 3. 2X. F6. 3. 2X. F6.1.2X.E12.3.1X.E12.3.1X12.EE12.3.
     *1X. E12. 3. 1X. E12. 2. 1X. E12. 2. 2X. F7. 3)
      WRITE(IWR, 81)QW2
   81 FORMAT(α8X, SUMA VALORILOR INSTANTANEE QWGA = = 'E10.3)
      WRITE(IWR, 82)QWP2
   82 FORMAT(5X, INTEGRALA DERIVATEI ANALITICE QWGA='. E103).
      WRITE(IWR, 83) QWPS2
   83 FORÎAT(4X, INTEGRALA DERIVATEI DIN BILANȚ QWGA = 'E10.3//)
   20 CONTINUE
      STOP
      END
      GO TO(70, 71, 72, 73, 74), L
   70 TP= RP+ 20.
      70TP= TP + 20.
      IF(TP-530).76, 76, 91
   91 L = L + 1
   71 TP = 490.
      TSA = TSA + 20.
      IF(TSA - 510.)76, 76, 92
   92 L = L + 1
   72 TSA = 470.
      TSE = TSE + 20.
      IF(TSE - 690)76, 76, 93
   93 L = L + 1
   93 L = L + 1
   73 TSE = 650.
      TCH = TCH + 20.
      IF(TCH - 430.)76, 76, 94
   94 L = L + 1
   74 TCH = 390.
      TC = TC + 10.
      IF(TC -400), 76, 76, 20
      GO TO (70, 71, 72, 73, 74),L
```

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

C.Z.: 621.43

DETERMINAREA SOLUȚIILOR OPTIME DE ARBORI COTIȚI PENTRU MOTORUL ÎN V, ÎN DOI TIMPI, CU CILINDRI INTERCALAȚI

ANCA RODICA BARANESCU, A. MANOLE, C. SILVESTRU

Introducere

În lucrare sînt analizate soluțiile posibile de arbori cotiți pentru motorul înV, în doi timpi, cu 2, 4 și 6 cilindri intercalați și aprinderi uniform repartizate. Aceste soluții sînt triate în baza criteriilor de echilibraj folosind următoarele concluzii din lucrările [1] și [2].

Cînd un termen al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație are o rezultantă în fiecare linie de cilindri, el produce trepidații în planul bisector interior și în planul bisector exterior al unghiului dintre liniile de cilindri, trepidații a căror mărime este respectiv

$$X_{\mathfrak{F}_p} = A_{\mathfrak{F}_p} \cos\ (p\,\alpha + \sigma_p), \tag{1}$$

$$Y_{\mathfrak{F}_p} = B_{\mathfrak{F}_p} \sin\,(p\,\alpha + \sigma_p), \tag{2}$$

în care s-a notat

$$A_{\mathfrak{F}_p} = i\,T_p \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{1}{2}\,p\,(k-1)\frac{2\pi}{i}. \tag{3}$$

$$B_{\mathfrak{F}_p} = i\,T_p \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{1}{2}\,p\,(k-1)\frac{2\pi}{i}, \tag{4}$$

$$\sigma_p = \varphi_p - \frac{1}{2}\,p\,(k-1)\,\frac{2\pi}{i}, \tag{5}$$

α fiind unghiul descris de manivela cilindrului din linia din stînga, situat la extremitatea motorului de la care arborele cotit se vede rotindu-se în sensul pozitiv ales, i numărul de cilindri, T_p mărimea vectorului care interpretează termenul de ordinul p al forței de inerție a maselor cu mișcare de translație pentru un cilindru, γ unghiul dintre liniile de cilindri, φ unghiul care precizează poziția vectorului T_p pentru cilindrul 1 al liniei din stînga în momentul $\alpha = 0$ și k numărul de ordine ale aprinderii în

cilindrul aflat în linia din dreapta la extremitatea motorului din care arborele cotit se vede rotindu-se în sensul pozitiv ales; dacă aprinderile sînt uniform repartizate k poate avea numai valorile 2, 4, 6, ...i.

În fiecare linie, cilindrii sînt numerotaţi consecutiv, începînd de la extremitatea precizată mai sus. Aprinderile sînt numerotate consecutiv pentru întregul motor, începînd cu aprinderea din cilindrul 1 al liniei din stînga.

Pentru realizarea unui bun echilibraj al forţelor de inerţie, manivelele fiecărei linii de cilindri trebuie să fie uniform distribuite în jurul axei lor de rotaţie. În acest caz au o rezultantă în fiecare linie numai termenii cu ordinele

$$p = \lambda \frac{i}{2}, \quad 1 = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Rezultanta unui termen care subzistă în fiecare linie de cilindri poate fi echilibrată dacă

$$\gamma = \pi \tag{7}$$

şi dacă ordinul termenului satisface relaţia

$$p = \frac{\lambda i}{k-1}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

Termenii care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri produc trepidaţii numai în planul bisector interior dacă au ordinele date de relaţia (8), sau numai în planul bisector exterior dacă au ordinele

$$p = \frac{(2\lambda - 1)i}{2(k-1)}, \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots . \tag{9}$$

Formulele de mai sus sînt valabile şi pentru motorul în V normal, cu biele articulate direct pe manetoanele arborelui cotit, considerînd pentru k şi γ valori care rezultă din expresiile

$$k = \frac{i}{2}\frac{\gamma}{\pi} + 1, \tag{10}$$

$$\gamma = \eta \frac{2\pi}{i}, \quad \eta = 1, 2, 3, \ldots, \leqslant \frac{i}{2}. \tag{11}$$

Din cauza decalajului Δ dintre liniile de cilindri, termenii care au o rezultantă în planul bisector interior produc în planul bisector exterior momentele variabile

$$\mathfrak{M}_{p_y} = \Delta \frac{i}{2} T_p \sin \frac{\gamma}{2} \cos (p\alpha + \varphi_p), \tag{12}$$

iar termenii care au rezultantă în planul bisector exterior produc în planul bisector interior momentele variabile

$$\mathfrak{M}_{p_x} = \Delta \frac{i}{2} T_p \cos \frac{\gamma}{2} \cos (p\alpha + \varphi_p). \tag{13}$$

Momentul extern rezultant produs de momentele externe de același ordin care subzistă în fiecare din cele două linii de cilindri au următoarele componente respectiv în planul bisector exterior și în planul bisector interior

$$X_{\mathfrak{M}_p^*} = A_{\mathfrak{M}_p^*} \sin (p\alpha + \varepsilon_p), \tag{14}$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p^*} = B_{\mathfrak{M}_p^*} \cos (p\alpha + \varepsilon_p), \tag{15}$$

mărimile $A_{\mathfrak{M}_p^*}$, $B_{\mathfrak{M}_p^*}$ și ε_p având expresiile

$$A_{\mathfrak{M}_p^*} = -2 M_p \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{1}{2} p \left[(k-1) \frac{2\pi}{i} - \frac{a \xi_p}{p} \right], \tag{16}$$

$$B_{\mathfrak{M}_p^*} = 2 M_p \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{1}{2} p \left[(k-1) \frac{2\pi}{i} - \frac{a \xi_p}{p} \right], \tag{17}$$

$$\varepsilon = \mu_p - \frac{1}{2} p \left[(k-1) \frac{2\pi}{i} - \frac{a \xi_p}{p} \right]. \tag{18}$$

În formulele de mai sus s-au folosit notațiile

M_p, momentul vectorilor T_p dintr-o linie de cilindri,

μ_p, unghiul care precizează poziția vectorului M_p în momentul $\alpha = 0$,

ξ_p, unghiul dintre vectorii M_p din cele două linii de cilindri, măsurat în sensul de rotație al manivelelor, de la vectorul M_p al liniei din stînga; acest unghi poate fi calculat într-o poziție oarecare a arborilor cotiți din relația

$$\xi_g = \pi - 2 \beta_{p_s},$$

în care β_{p_s} este unghiul pe care îl face cu linia din stînga vectorul M_p cu vectorul T_{p1} care interpretează termenul de ordinul p pentru cilindrul numărul 1, măsurat de la vctorul T_{p_1} în sensul de rotație al manivelelor,

a, un coeficient care are valoarea 0 dacă arborii cotiți ai celor două linii de cilindri sînt identici și valoarea 1 dacă arborii cotiți ai celor două linii de cilindri sînt simetrici în oglindă; la motorul cu doi sau cu patru cilindri, arborii cotiți nu pot fi simetrici în oglindă și prin urmare a este nul.

Momentul extern rezultant produs de un termen pentru care există momente în fiecare linie de cilindri poate fi echilibrat dacă $\gamma = \pi$ și dacă ordinul termenului satisface condiția

$$p = \frac{\left(2\,\rho + a\,\frac{\xi_p}{\pi}\right) i}{2\,(k-1)}, \qquad \rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{19}$$

Momentul extern rezultant al termenilor de ordinul întîi poate fi echilibrat cu mase atașate arborelui cotit dacă unghiul dintre liniile de cilindri are valoarea

$$\gamma = \mp\,\pi\left[2\,\rho - 1 - \frac{2(k-1)}{i} + \frac{a\,\xi_1}{\pi}\right], \tag{20}$$

formulă în care se consideră valorile numărului întreg ρ și semnul din fața parantezei pentru care se obține $0 < \gamma < \pi$.

Dintre valorile posibile ale lui k (numai valorile pare dacă se folosește în fiecare linie arborele cotit pentru care este valabilă formula (6)) pot fi considerate în (20) numai valorile care îndeplinesc condițiile

$$a\,\frac{\xi_1}{\pi}\,\frac{i}{2} + 1 < k < \left(1 + a\,\frac{\xi_1}{\pi}\right)\frac{i}{2} + 1, \tag{21}$$

Din formula (20) se obțin aceleași valori ale unghiului pentru următoarele valori ale numărului k

$$k,\ \ i - k + 2\ ; \qquad k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ , \leqslant \frac{i}{2} \tag{22}$$

Dacă $\gamma \neq \pi$, momentul extern rezultant acționează numai în planul bisector interior pentru termenii al căror ordin satisface condiția (19) și numai în planul bisector exterior pentru termenii care au ordinele

$$p = \frac{\left(2\,\rho - 1 + \frac{a\,\xi_p}{\pi}\right) i}{2\,(k-1)}, \qquad \rho = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{23}$$

Momentul extern al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație este echilibrat dacă unghiul dintre liniile de cilindri are valoarea

$$\gamma = -\pi \left[1 - \frac{2(k-1)}{i} + a \frac{\xi_1}{\pi} \right], \tag{24}$$

în care numărul k trebuie să îndeplinească condiţia

$$k < \left(1 + a \frac{\xi_1}{\pi} \right) \frac{i}{2} + 1 . \tag{25}$$

La motorul în V normal cu biele articulate direct pe manetoanele arborelui cotit echilibrajul momentelor externe ale forţelor de inerţie poate fi precizat cu ajutorul formulelor precedente în care se înlocuiesc condiţiile (10) şi (11), precum şi condiţia $a = 0$.

În cele ce urmează, alegerea arborilor cotiţi pentru fiecare linie de cilindri este făcută pe baza concluziilor din lucrarea [3].

2. Motorul cu 2 cilindri în doi timpi

În vederea realizării repartiţiei uniforme a aprinderilor decalajul dintre aprinderile consecutive trebuie să fie $\frac{2\pi}{2} = \pi$; manivela cilindrului din dreapta trebuie să fie în urma manivelei cilindrului din stînga cu unghiul $\pi - \gamma$ (fig. 1).

Din cauza acestei distribuţii a manivelelor, forţele de inerţie ale maselor cu mişcare de rotaţie şi momentul acestor forţe trebuie echilibrate cu mase ataşate arborelui cotit.

Pentru echilibrarea completă a unor termeni ai forţelor de inerţie al maselor cu mişcare de translaţie trebuie îndeplinită condiţia geometrică (7), în care caz $X_{\mathfrak{F}_p} = 0$; termenii care se echilibrează sînt cei ai căror ordine satisfac relaţia (8). Deoarece în cazul cercetat k nu poate avea decît valoarea 2 se constată că relaţia (8) este satisfăcută pentru toţi termenii multiplu de i, adică pentru toţi termenii de ordin par. Pentru termenii de ordin impar se deduce din (4)

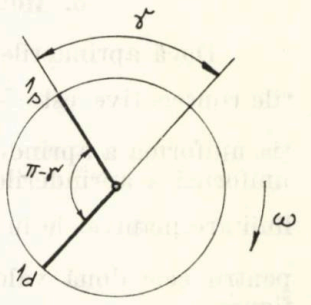


Fig. 1. Steaua manivelelor care asigură repartiţia uniformă a aprinderilor la motorul în V în doi timpi cu doi cilindri intercalaţi.

$$| B_{\mathfrak{F}_{2j-1}} | = 2 T_{2j-1}, \quad j = 1. 2, 3, \ldots ,$$

formulă care arată că amplitudinile acestor termeni sînt duble faţă de amplitudinile termenilor de acelaşi ordin pentru un cilindru. Din cauza importanţei termenului de ordinul întîi soluţia $\gamma = \pi$ nu poate fi acceptată.

În cazul $\gamma = \pi$ termenii de ordin par produc trepidaţii numai în planul bisector interior, deoarece satisfac relaţia (8), iar termenii de ordin impar produc trepidaţii în planul bisector exterior fiindcă îndeplinesc condiţia (9). Pentru micşorarea trepidaţiilor corespunzătoare termenilor de ordinul întîi unghiul γ trebuie să fie cît mai mic; aceasta determină creşterea amplitudinii trepidaţiilor produse de termenii de ordin par.

Pe lîngă trepidațiile arătate mai sus, datorită decalării liniilor de cilindri, termenii de ordin par produc o basculare a motorului în planul bisector exterior; momentul de basculare are următoarea expresie, dedusă cu ajutorul relației (12)

$$\mathfrak{M}_{2j_y} = \Delta\, T_{2j} \sin \frac{\gamma}{2} \cos\,(2j\,\alpha + \varphi_{2j})\,,\quad j = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

În planul bisector interior motorul este basculat de termenii de ordin impar; conform relației (13) momentul de basculare are expresia

$$\mathfrak{M}_{2j-1_x} = \Delta\, T_{2j-1} \cos \frac{\gamma}{2} \cos\,[(2j-1)\,\alpha + \varphi_{2j-1}]\,,\quad j = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Dacă motorul este în V normal cu aprinderi uniform repartizate, conform relației (11) unghiul dintre liniile de cilindri trebuie să aibă valoarea $\gamma = \pi$. După cum s-a arătat la această valoare echilibrajul motorului este nesatisfăcător.

Din cele de mai sus rezultă că motorul în V, în doi timpi, cu doi cilindri intercalați are un slab echilibraj.

3. Motorul cu patru cilindri în doi timpi

Dacă aprinderile sînt uniform repartizate, decalajul dintre aprinderile consecutive este $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Fiindcă la motorul în doi timpi repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor antrenează și repartiția uniformă a aprinderilor în fiecare linie de cilindri, arborele cotit al unei linii are manivelele în opoziție. Unghiul dintre arborii cotiți este $\gamma - \frac{\pi}{2}$; pentru cele două valori posibile ale numărului k se obțin soluțiile din figura 2.

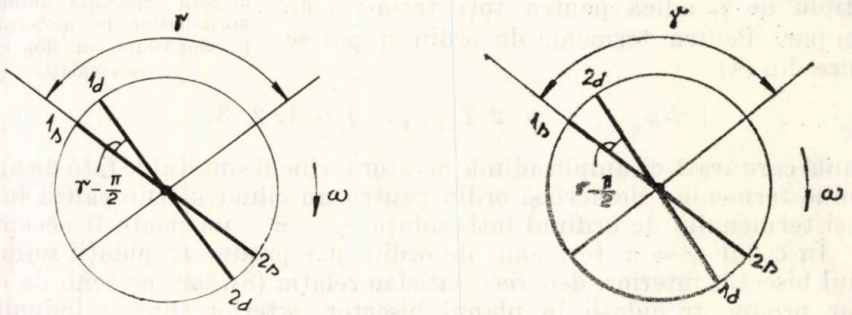


Fig. 2. Steaua manivelelor care asigură repartiția uniformă a aprinderilor la motorul în V în doi timpi cu patru cilindri intercalați.

Deoarece manivelele fiecărei linii de cilindri sînt în opoziție, forțele de inerție ale maselor cu mișcare de rotație se echilibrează reciproc.

Conform relației (6), în fiecare linie subzistă numai termenii de ordin par ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Dintre aceștia, pot fi echilibrați termenii care îndeplinesc condiția (8), în cazul $\gamma = \pi$. Prin urmare, cilindrii trebuie să fie opuși, iar termenii să aibă ordinele multipli de patru; ultima condiție este valabilă pentru oricare din valorile numărului k.

Conform relațiilor (3) și (4), în cazul $\gamma = \pi$, termenii rămași neechilibrați, adică termenii al căror ordin este par dar nemultiplu de patru, produc trepidații în planul bisector exterior Din (4) se obține

$$B_{\mathfrak{F}_{2(2j-1)}} = 4\, T_{2(j-1)} \sin (2j-1)(k-1)\frac{\pi}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

și deoarece k este număr par

$$| B_{\mathfrak{F}_{2(2j-1)}} | = 4\, T_{2(2j-1)}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Rezultantele acestor termeni au deci valorile maxime.

Dacă $\gamma = \pi$, termenii al căror ordin este un multiplu de patru produc trepidații numai în planul bisector interior, iar ceilalți termeni de ordin par produc trepidații numai în planul bisector exterior; din (3) și (4) se obțin valorile

$$| A_{\mathfrak{F}_{4j}} | = 4\, T_{4j} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{F}_{4j}} = 0,$$

$$A_{\mathfrak{F}_{2(2j-1)}} = 0,$$

$$| B |_{\mathfrak{F}_{2(2j-1)}} = 4\, T_{2(2j-1)} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Datorită decalării liniilor de cilindri, termenii al căror ordin este un multiplu de patru produc în planul bisector exterior momentele variabile a căror mărime este dată de formula (12):

$$\mathfrak{M}_{4j_y} = 2\,\Delta\, T_{4j} \sin \frac{\gamma}{2} \cos (4j\,\alpha + \varphi_{4j}), \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

iar ceilalți termeni de ordin par produc în planul bisector interior momentele variabile, determinate de formula (13)

$$\mathfrak{M}_{2(2j-1)_x} = 2\,\Delta\, T_{2(2j-1)} \cos \frac{\gamma}{2} \cos [2(2j-1)\alpha + \varphi_{2(2j-1)}]\, j = 1, 2, 3, \ldots .$$

În fiecare linie subzistă momentul extern al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație care poate fi echilibrat cu mase atașate arborelui cotit, sau dacă unghiul γ are valoarea dată de (24) în care numărul k trebuie să satisfacă inegalitatea (25). Întrucît cei doi arbori cotiți nu pot fi simetrici în oglindă, $a = 0$; din (25) se obține $k < 3$, deci $k = 4$, iar din (24) rezultă $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Deoarece manivelele fiecărei linii sînt în opoziție, în fiecare linie de cilindri momentele termenilor de ordin par sînt nule. Dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, subzistă în fiecare linie numai momentul extern M_1 al termenilor de ordinul întîi. Acest moment nu poate fi echilibrat prin alegerea unghiului dintre liniile de cilindri și al calajului celor doi arbori cotiți, deoarece relația (19) nu este satisfăcută pentru $p = 1$. Prin urmare, rămîne posibilitatea echilibrării momentului $\mathfrak{M}_1^*$ cu mase atașate arborelui cotit; această posibilitate reclamă ca unghiul dintre liniile de cilindri să aibă valoarea dată de relația (20), în care numărul k trebuie să satisfacă inegalitățile (21). Fiindcă $a = 0$, se obține $1 < k < 3$, deci $k = 2$; din (20) rezultă $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Astfel, în cazul $\gamma = \frac{\pi}{2}$ și $k = 2$, echipînd arborele cotit al motorului cu mase care asigură echilibrarea momentului extern al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație și a momentului extern al termenilor de ordinul întîi ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație mai sînt neechilibrate doar momentele cauzate de decalarea liniilor de cilindri.

Potrivit celor arătate în lucrarea (4), la mecanismul normal și axat vectorul care interpretează termenul de ordinul întîi poate fi considerat drept rezultantă a doi vectori T_{1_v} și T_{1_τ} a căror mărime este dată de expresiile $T_{1_v} = m_t R \omega^2$ și $T_{1_\tau} = m_t R \theta$, în care s-a notat cu m_t masa pieselor în mișcare de translație ale echipajului mobil al unui cilindru, R raza manivelei ω și θ respectiv viteza unghiulară și accelerația unghiulară a manivelelor. Acești doi vectori sînt perpendiculari între ei; vectorul T_{1_v} este permanent în fază cu manivela cilindrului respectiv și are sensul invers sensului accelerației normale a unui punct al manivelei; față de T_{1_v} vectorul T_{1_τ} se află în urmă dacă $\theta > 0$ și înainte dacă $\theta < 0$.

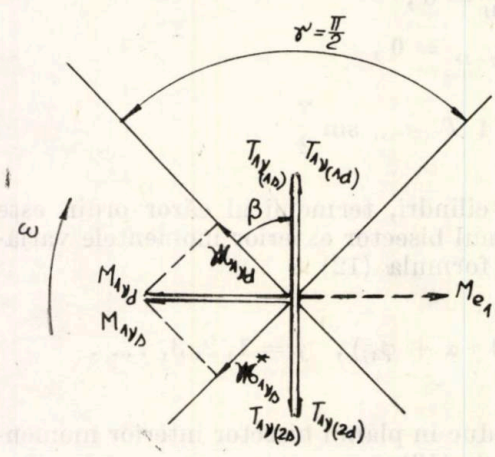


Fig. 3. Vectorii care interpretează termenii de ordinul întîi și momentele acestor vectori pentru soluția din figura 2 a cu $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

În continuare se determină masele care asigură echilibrarea momentului $\mathfrak{M}_1^*$. Aceste mase pot fi precizate numai din condiția echilibrării momentului $\mathfrak{M}_{1_v}^*$, deoarece ele participă la mișcarea arborelui cotit și prin urmare sînt animate de accelerația unghiulară θ, împrejurare care asigură și echilibrarea momentului $\mathfrak{M}_{1_\tau}^*$; deoarece echilibrarea — odată realizată — subzistă la orice moment de timp, condiția de echilibrare poate fi pusă în orice poziție a arborelui cotit.

În figura 3 s-au reprezentat vectorii T_{1_v} într-o poziție oarecare a arborelui cotit și momentele $M_{1_{v_s}}$ și $M_{1_{v_d}}$ ale acestor vectori, respectiv pentru linia din stînga și pentru linia din dreapta. Vectorii $M_{1_{v_s}}$ și $M_{1_{v_d}}$ sînt perpendiculari pe planul în care acționează forțele care îi produc, deci și pe planul în care se află cele patru manivele; în consecință acești vectori moment sînt în fază. Notînd cu d distanța dintre axele cilindrilor dintr-o linie se poate scrie

$$M_{1_{v_s}} = M_{1_{v_d}} = d\, T_{1_v},$$

și

$$\mathfrak{M}_{1_{v_s}}^* = M_{1_{v_s}} \cos \beta = \mathrm{d}\, T_{1_v} \cos \beta,$$

$$\mathfrak{M}_{1_{v_d}}^* = M_{1_{v_d}} \sin \beta = d\, T_{1_v} \sin \beta,$$

Momentul rezultant al componentelor normale ale termenilor de ordinul întîi are deci mărimea

$$\mathfrak{M}_{1_v}^* = \sqrt{\mathfrak{M}_{1_{v_s}}^{*\,2} + \mathfrak{M}_{1_{v_d}}^{*\,2}} = d\, T_{1_v};$$

el este reprezentat printr-un vector perpendicular pe planul manivelelor, deci acționează în planul manivelelor.

Pentru echilibrarea momentului M_{1_v} este necesar să se atașeze arborelui cotit mase ale căror forțe normale să producă un moment egal M_{1_e} și de sens contrar cu momentul de echilibrat (fig. 3); deoarece $\mathfrak{M}_{1_v}^*$ acționează în planul manivelelor și M_{1_e} trebuie să acționeze în planul manivelelor.

Există o infinitate de posibilități de echipare a arborelui cotit cu mase care echilibrează momentul $\mathfrak{M}_{1_v}^*$. În figura 4 s-a considerat soluția cu două mase plasate pe brațele extreme, în care caz masele de echilibrare au valoarea minimă. Fiindcă există numai două mase, centrele lor trebuie să se afle în planul manivelelor.

Notînd cu m_{e1} mărimea uneia din masele de echilibrare, cu ρ_{e1} distanța de la centrul masei m_{e1} la axa de rotație a arborelui cotit și cu f distanța dintre planele în care se mișcă centrele maselor m_{e1} se poate scrie

$$M_{e1} = m_{e1}\, \rho_{e1}\, \omega^2 f.$$

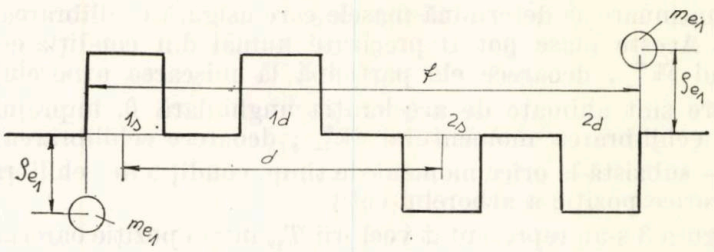


Fig. 4. Arborele cotit al motorului în doi timpi cu patru cilindri intercalați care asigură echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul intîi ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație cu mase atașate arborelui cotit.

Condiția de echilibrare devine

$$\mathrm{d}\, T_{1_v} = m_{e1}\, \varrho_{e1}\, \omega^2 f\,. \tag{25}$$

Se alege valoarea uneia din masele m_{e1} sau ϱ_{e1}, iar din (25) rezultă valoarea celeilalte mărimi.

Notînd cu F_r forța de inerție normală a maselor cu mișcare de rotație pentru un cilindru, momentul forțelor F_r pentru întregul motor este

$$M_r = 2\, d\, F_r\,.$$

Dacă acest moment este echilibrat tot cu două mase de mărime m_{er} atașate arborelui cotit, ale căror centre sînt situate la distanța ϱ_r de axa de rotație și în planele în care se află centrele maselor m_{e1}, momentul produs de forțele de inerție normale ale acestor mase este

$$M_{er} = m_{er}\, \varrho_r\, \omega^2 f\,.$$

Dacă este îndeplinită condiția

$$2\, d\, F_r = m_{er}\, \varrho_r\, \omega^2 f\,,$$

momentul M_r este echilibrat dacă M_{er} este de sens contrar cu M_r.

★

Dacă motorul este în V normal cu aprinderi uniform repartizate, potrivit formulei (11) unghiul dintre liniile de cilindri poate lua valorile $\frac{\pi}{2}$ și π. Acestor valori le corespund din (10) numerele $k = 2$ și $k = 3$; deoarece k nu poate fi decît un număr par, rezultă o singură soluție; $\gamma = \frac{\pi}{2}$ și $k = 2$, caz analizat anterior.

4. Motorul cu șase cilindri în doi timpi

Pentru realizarea repartiției uniforme a aprinderilor decalajul dintre aprinderile consecutive este $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Fiindcă motorul este în doi timpi aprinderile sînt uniform repartizate și în fiecare linie de cilindri; arborele cotit al oricărei linii de cilindri are deci trei manivele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație.

Unghiul dintre arborii cotiți este $\gamma - \frac{\pi}{3}$; pentru cele trei valori posibile ale numărului k se obțin soluțiile din figura 5 dacă cei doi arbori cotiți sînt identici, sau soluțiile din figura 6 dacă arborii cotiți sînt simetrici în oglindă.

Fig. 5

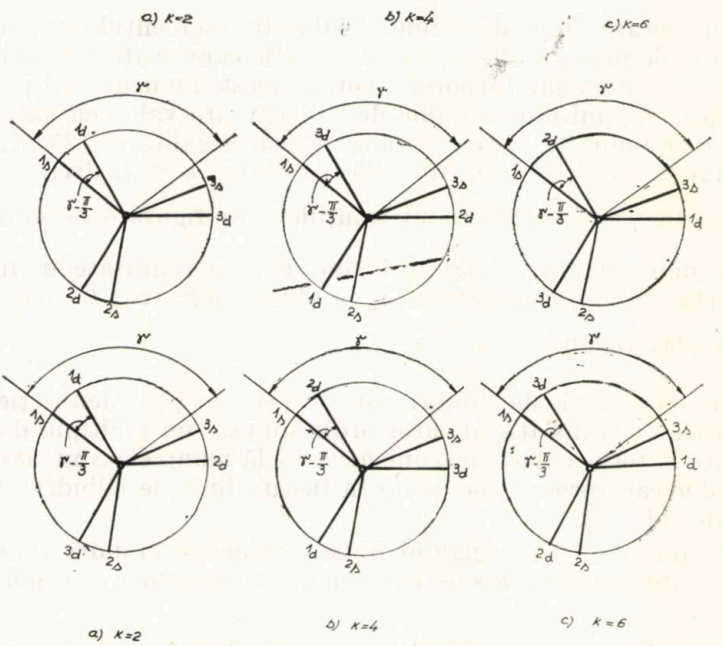


Fig. 6

Fig. 5. Steaua manivelelor care asigură repartiția uniformă a aprinderilor la motorul în V în doi timpi cu șase cilindri intercalați și arbori cotiți identici pentru fiecare linie de cilindri.

Fig. 6. Steaua manivelelor care asigură repartiția uniformă a aprinderilor la motorul în V în doi timpi cu șase cilindri intercalați, arborii cotiți ai celor două linii de cilindri fiind simetrici în oglindă.

În fiecare linie de cilindri manivelele fiind uniform distrbuite în jurul axei lor de rotație, forțele de inerție ale maselor cu mișcare de rotație se echilibrează reciproc.

Din relația (6) rezultă că în fiecare linie de cilindri subzistă numai termenii forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație ale căror

ordine sînt multiplu de trei dacă mecanismele bielă-manivelă sînt dezaxate, sau numai termenii ale căror ordine sînt multiplu de şase dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate. Pentru $\gamma = \pi$, sînt echilibraţi termenii al căror ordin satisface condiţia (8), deci toţi termenii al căror ordin este multiplu de şase. Prin urmare, din punctul de vedere al echilibrajului forţelor de inerţie, la motorul considerat este indicat să se folosească mecanisme bielă-manivelă axate şi să se adopte soluţia $\gamma = \pi$; în acest caz toate forţele de inerţie sînt complet echilibrate.

Din cauza decalării liniilor de cilindri, termenii al căror ordin este un multiplu de şase produc în planul bisector exterior momente variabile, a căror mărime — conform relaţiei (12) — este

$$\mathfrak{M}_{6j_y} = 3\,\Delta\,T_{6j}\,\sin\frac{\gamma}{2}\cos\left(6\,j\alpha + \varphi_{6j}\right),\quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

În fiecare linie de cilindri subzistă momentul extern al forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de rotaţie care poate fi întotdeauna echilibrat cu mase ataşate arborelui cotit. Acest moment mai poate fi echilibrat dacă unghiul dintre liniile de cilindri are valoarea dată de formula (24) în care numărul k trebuie să satisfacă inegalitatea (25). În cazul soluţiilor din figura 5, $a = 0$, din (25) se obţine $k < 4$, deci $k = 6$, iar din (24) rezultă $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. În cazul soluţiilor din figura 6 se obţine $\xi_1 = \frac{\pi}{3}$, valoare determinată în figura 7 conform celor arătate în lucrarea [5]; la această valoare a unghiului ξ_1 se obţine din (25) $k < 5$, deci $k = 6$, iar din (24) rezultă $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

În fiecare linie de cilindri, toţi termenii forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie al căror ordin nu este un multiplu de trei produc momente externe; dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, ordinele termenilor care produc momente în fiecare linie de cilindri sînt $p = 1, 2, 4, 8, 10, 14, 16\ldots$

Adoptînd pentru unghiul dintre liniile de cilindri valoarea $\gamma = \pi$, pot fi echilibrate momentele externe ale termenilor care îndeplinesc condiţia (19).

În cazul soluţiilor din figura 5, la care $a = 0$, se obţine $p = 6\rho$ pentru $k = 2$ şi $k = 6$, şi $p = 2\rho$ pentru $k = 4$. Astfel, numai în varianta din figura 5 b există momente externe care pot fi echilibrate şi anume toate momentele de ordin par; în acest caz subzistă numai momentul extern al termenilor de ordinul întîi .

Pentru soluţiile din figura 6, $a = 1$. Se observă că există trei stele distincte ale vectorilor care interpretează termenii de diferite ordine ale forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie : una pentru ordinele $p = 3\rho + 1$, alta pentru ordinele $p = 3\rho + 2$ şi a treia pentru ordinele $p = 3\rho$ ($\rho = 0, 1, 2, 3, \ldots$) (fig. 8); ultima nu prezintă interes, deoarece termenii al căror ordin este un multiplu de trei nu produc momente în liniile de cilindri.

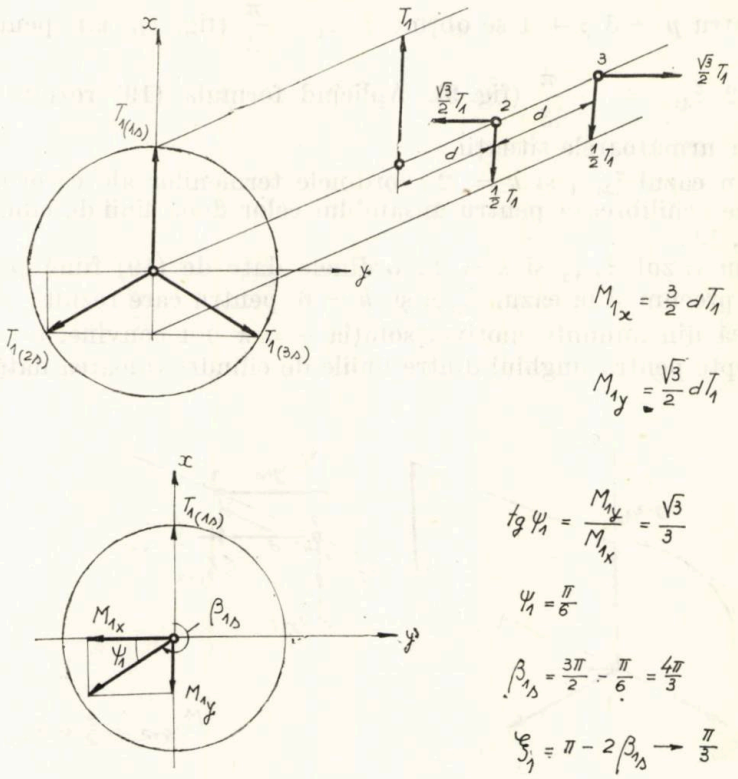


Fig. 7. Determinarea unghiului ξ_1 la motorul în 2 timpi cu șase cilindri intercalați și aprinderi uniform repartizate.

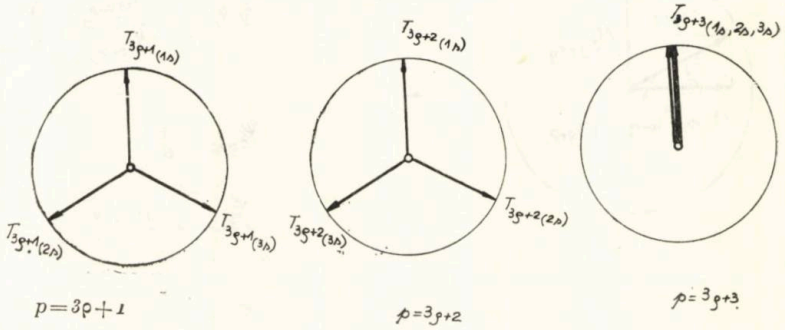


Fig. 8. Stelele vectorilor care interpretează termenii de diferite ordine ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație în linia din stînga a unui motor în V în doi timpi cu șase cilindri intercalați și aprinderi uniform repartizate ($p = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Pentru $p = 3\rho + 1$ se obține $\xi_{3\rho+1} = \frac{\pi}{3}$ (fig. 7), iar pentru $p = 3\rho + 2$ $\xi_{3\rho+2} = -\frac{\pi}{3}$ (fig. 9). Aplicînd formula (19) rezultă numere întregi în următoarele situații:

— în cazul $\xi_{3\rho+1}$ și $k = 2$, ordinele termenilor ale căror momente externe se echilibrează pentru ansamblul celor două linii de cilindri fiind $p = 1, 7, 13\ldots$

— în cazul $\xi_{3\rho+1}$ și $k = 2$, ordinele date de (19) fiind $p = 5, 11, 17, \ldots$, precum și în cazul $\xi_{3\rho+2}$ și $k = 6$ pentru care rezultă $p = 1$.

Dacă din anumite motive, soluția $\gamma = \pi$ nu convine, este indicat să se adopte pentru unghiul dintre liniile de cilindri valoarea dată de (20)

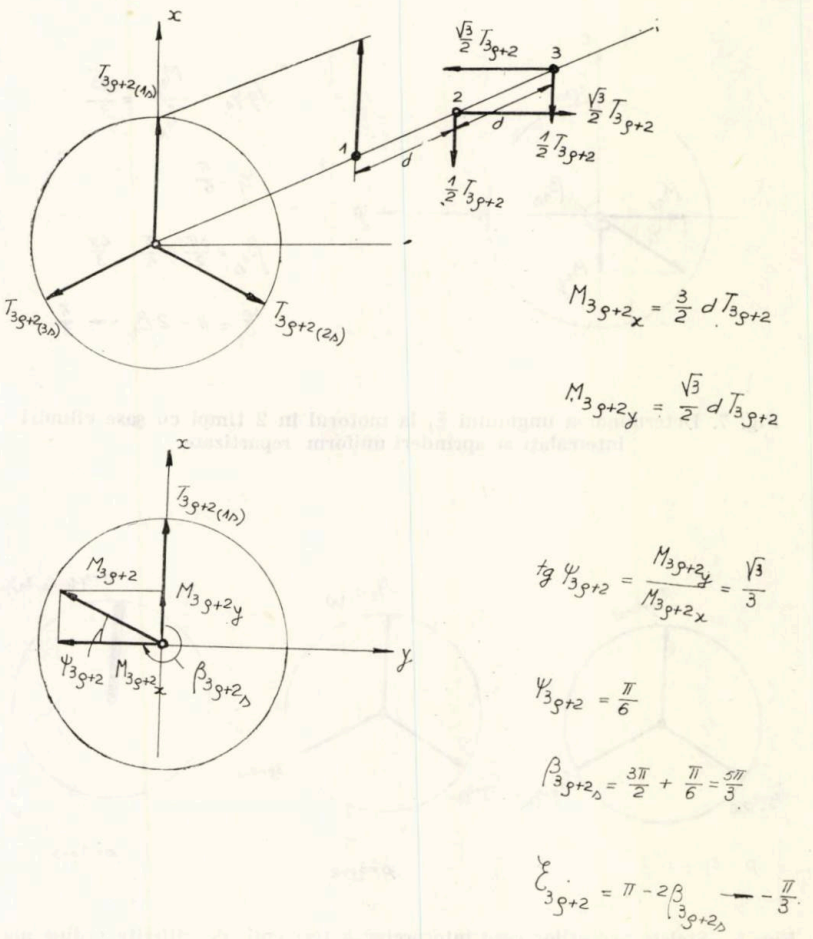


Fig. 9. Determinarea unghiului $\xi_{3\rho+2}$ la motorul în doi timpi cu șase cilindri intercalați și aprinderi uniform repartizate ($\rho = 0, 1, 2, \ldots$)

spre a se echilibra momentul extern al termenilor de ordinul întîi. Rezultă astfel $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ în cazul soluțiilor din figurile 5 a și 5 c, și $\gamma = \frac{\pi}{3}$ în cazul soluțiilor din figurile 6b și 6c; pentru celelalte soluții se obțin valorile neconvenabile $\gamma = 0$ sau $\gamma = \pi$.

Din cele de mai sus rezultă că cel mai bun echilibraj al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație și al momentelor acestor forțe se obține pentru $\gamma = \pi$ (în care caz forțele de inerție sînt complet echilibrate) și adoptînd soluțiile de arbori cotiți din figurile 6a și 6c, care echilibrează momentul extern M_1 al termenilor de ordinul întîi. Soluția din figura 5b, care echilibrează momentele externe ale termenilor de ordin par, poate fi adoptată dacă motorul se echipează cu un dispozitiv mecanic pentru echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi; în acest caz, prevăzînd totodată și mase pentru echilibrarea momentului M_r, toate forțele de inerție și momentele lor sînt complet echilibrate.

Dacă soluția $\gamma = \pi$ nu este convenabilă trebuie adoptate soluțiile care permit echilibrarea momentului M_1 cu mase atașate arborelui cotit și anume soluțiile din figurile 5 a și 5 c cu $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ și soluțiile din figurile 6b și 6c cu $\gamma = \frac{\pi}{3}$; se observă că mai avantajoase sînt soluțiile 5c și 6 c, care asigură și echilibrarea momentului M_r fără mase atașate arborelui cotit.

Determinarea maselor cu care trebuie echipat arborele cotit în vederea echilibrării momentului M_r și a momentului M_1 (cînd acest ultim moment poate fi echilibrat pe această cale) se determină după metoda arătată la motorul cu 4 cilindri.

★

Dacă motorul este în V normal cu aprinderi uniform repartizate, valorile posibile ale unghiului dintre liniile de cilindri, calculate din formula (11) sînt $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ și π. Acestor valori le corespund din (10) numerele $k = 2$, $k = 3$ și $k = 4$. Fiindcă numărul k nu poate lua decît valori pare, două situații sînt posibile: $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $k = 2$ și $\gamma = \pi$ și $k = 4$. Echilibrajul motorului în aceste două situații este precizat de formulele precedente în care se înlocuiește și condiția $\xi_p = 0$.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Bărănescu G., Silvestru C.*, Echilibrajul forţelor de inerţie la motorul în V cu cilindri intercalaţi. Studii şi cercetări de mecanică aplicată,

2. *Bărănescu G., Silvestru C.*, Echilibrajul momentelor foreţelor de inerţie la motorul în V cu cilindri intercalaţi. Studii şi cercetări de mecanică aplicată,

3. *Bărănescu G., Apostolescu N., Grünwald B.*, Solutions de vibrequins pour les moteurs polycylindriques en ligne optima du point de vue de l'équilibrage. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti 3 1959

4. *Bărănescu G.*, Interpretări vectoriale ale forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie a arborelui cotit. Studii şi cercetări de mecanică aplicată 6/1969

5. *Bărătescu A. R., Manole A., Silvestru C.*, Soluţii constructive optime din punct de vedere dinamic pentru motorul în V în patru timpi, cu cilindri intercalaţi. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti nr. ·/1973.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

UTILAJ CHIMIC

C.Z. : 66

STAREA DE EFORTURI UNITARE ÎN ÎNVELIŞUL CILINDRIC CU PERETE SUBŢIRE ÎN PROCESUL DE RIDICARE*

Z. MANOLACHE

1. Introducere

După operaţia de calibrare a virolelor cilindrice, operaţie prin care se urmăreşte realizarea preciziei de formă cerute, pentru degajarea piesei de pe maşina de calibrat este necesară prinderea, ridicarea şi transportul acesteia pentru depozitare.

O problemă care se pune cu această ocazie, este realizarea unei astfel de prinderi, încît deformaţia virolei, fie chiar şi local, să nu intre în domeniul deformaţiei remanente, deoarece aceasta duce la anularea rezultatelor operaţiei de calibrare.

În lucrarea de faţă se analizează starea de eforturi unitare în cazul prinderii virolei cilindrice cu perete subţire $\left(\beta = \frac{De}{Di} \leqslant 1{,}2\right)$ pe generatoare, aşa cum se reprezintă schematic în figura 1, solicitarea fiind dată de greutatea proprie q.

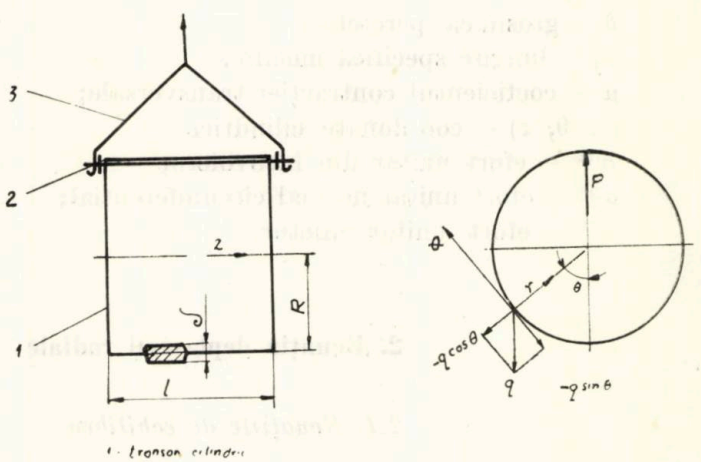


Figura 1. Solicitarea tronsonului cilindric.

* Manuscris predat redacţiei la data de 26 iunie 1972

Se va folosi sistemul de coordonate cilindrice (r, θ, z).

Presupunînd că bara-suport de prindere a tronsonului cilindric în mijlocul de ridicare este suficient de rigidă, reacţiunea P (raportată la unitatea de lungime a generatoarei) va fi aceeaşi în orice secţiune transversală, deci nu va depinde de coordonata z. De asemenea, încărcarea fiind dată numai de greutatea proprie, solicitările şi deformaţiile vor fi simetrice faţă de planul diametral vertical.

Notaţii folosite

$D = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea cilindrică;
De — diametrul exterior al tronsonului;
Di — diametrul interior;
E — modul de elasticitate;
M — moment încovoietor;
q — greutatea ce revine unităţii de suprafaţă mediană;
Q — efort tăitor;
R — raza suprafeţei mediane;
T — efort inelar;
v — deplasare pe direcţie tangenţială;
w — deplasare pe direcţie radială;
α — unghi la centru;
$\beta = \dfrac{De}{Di}$ — raportul diametrelor tronsonului cilindric;
δ — grosimea peretelui;
ε_0 — lungire specifică inelară;
μ — coeficientul contracţiei transversale;
(r, θ, z) — coordonate cilindrice;
$\sigma^{(M)}$ — efort unitar din încovoiere;
$\sigma^{(T)}$ — efort unitar normal circumferenţial;
$\tau^{(Q)}$ — efort unitar tăietor;

2. Ecuaţia deplasării radiale

2.1. Ecuaţiile de echilibru

Se izolează un element din suprafaţa mediană prin două secţiuni plane — normale la axa cilindrului — la distanţa unitate şi prin alte două secţiuni plane radiale, adiacente, de deschidere $d\theta$ (fig. 2).

Scriindu-se ecuaţiile de echilibru ale elementului de suprafaţă, se obţine următorul sistem de ecuaţii diferenţiale :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ}{d\theta} + T + Rp_r = 0 \\ &\frac{dT}{d\theta} - Q + Rp_\theta = 0 \\ &\frac{dM}{d\theta} - QR = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

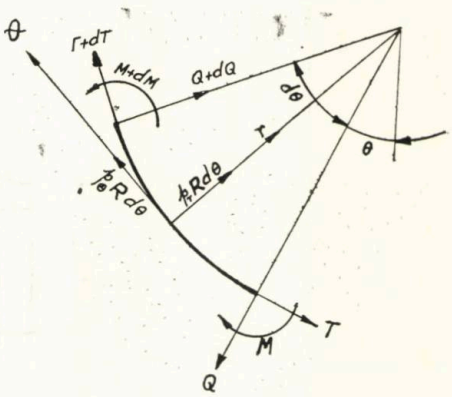


Fig. 2. Încărcarea elementului de înveliş.

unde p_r şi p_θ sînt componentele solicitărilor — distribuite — pe direcţie radială, respectiv tangenţială, şi care, pentru problema de faţă au provenienţele :

$$p_r = p_r^{(q)} + p_r^{(P)}\,;\quad p_\theta = p_\theta^{(q)} + p_\theta^{(P)} \tag{2}$$

cu semnificaţiile :

$p_r^{(q)}$ şi $p_\theta^{(q)}$ — componentele solicitărilor pe direcţie radială şi tangenţială date de greutatea proprie ;
$p_r^{(P)}$ şi $p_\theta^{(P)}$ — componentele solicitărilor pe direcţie radială şi tangenţială date de reacţiunea de pe reazem P.

Componentele solicitărilor date de greutatea proprie sînt (fig. 1)

$$p_r^{(q)} = -\,q\cos\theta\,;\quad p_\theta^{(q)} = -\,q\sin\theta \tag{3}$$

2.2. *Funcţia încărcării pe generatoare.*

Reacţiunea de pe reazem P (fig. 1) se va înlocui cu o solicitare distribuită pe suprafaţa mediană a peretelui cilindric, prin dezvoltarea sa în serie Fourier. Deoarece reacţiunea P acţionează numai pe direcţie radială,

$$p_\theta^{(P)} = 0 \tag{4}$$

Pentru început, se va considera sarcina P uniform distribuită pe arcul $2R\alpha$, corespunzător unghiului la centru 2α, astfel încît

$$-P = p_r^{(P)} \cdot 2R\alpha, \text{ adică } p_r^{(P)} = -\frac{P}{2R\alpha}$$

S-a considerat reacţiunea P negativă, deoarece are sensul invers sensului pozitiv ales pentru coordonata r. În figura 3 este reprezentată, pe desfăşurata suprafeţei mediane a cilindrului, diagrama solicitării dată de reacţiunea P, în funcţie de unghiul θ.

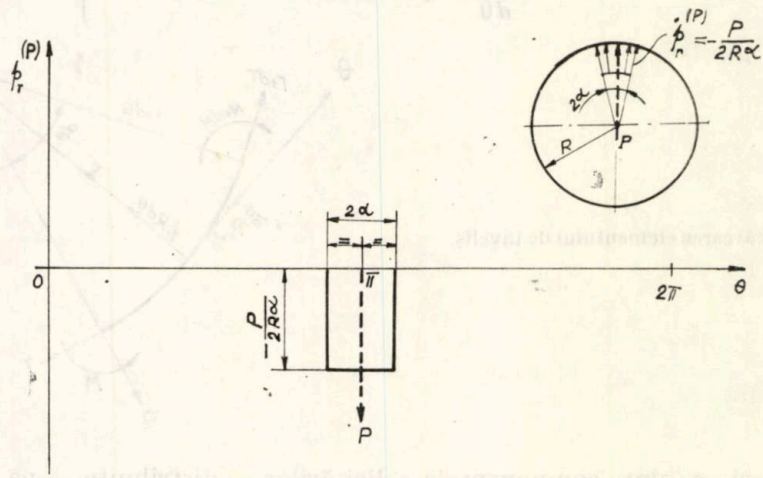


Figura 3. Înlocuirea sarcinii concentrate P, cu o sarcină distribuită $p_r^{(P)}$.

Definirea funcţiei $p_r^{(P)}$

Potrivit reprezentării din figura 3, funcţia $p_r^{(p)}$ este definită astfel:

$$p_r^{(P)} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \theta \in (0, \pi - \alpha) \cup (\pi + \alpha, 2\pi) \\ -\dfrac{P}{2R\alpha} \text{ pentru } \theta \in [\pi - \alpha, \pi + \alpha] \end{cases}$$

Seria sa Fourier are forma

$$p_r^{(P)} = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos n\theta + \sum_1^\infty b_n \sin n\theta,$$

ai cărei coeficienţi, după calculare, au expresiile:

$$a_0 = -\frac{P}{2\pi R}; \quad a_n = -\frac{P}{\pi R} \times \frac{(-1)^n \sin n\alpha}{n\alpha}; \quad b_n = 0.$$

Cu $P = 2\pi qR$, determinat din condiția de echilibru a întregului tronson, seria Fourier a funcției $p_r^{(P)}$ devine

$$p_r^{(P)} = -q - 2q \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \cos n\theta. \tag{5}$$

2.3. Integrarea sistemului de ecuații diferențiale.

Prin eliminarea eforturilor T și Q din sistemul (1) se obține ecuația diferențială liniară, cu coeficienți constanți, neomogenă pentru momente.

$$\frac{d^3M}{d\theta^3} + \frac{dM}{d\theta} = R^2 p_\theta - R^2 \frac{d(p_r)}{d\theta} \tag{6}$$

Cu utilizarea relațiilor (3), (4) și (5) și după scoaterea de sub semnul de însumare al primului termen, expresiile pentru sarcinile p_r și p_θ devin

$$\left.\begin{aligned} p_r &= -q\left[1 + \left(1 - \frac{2\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos\theta + 2\sum_2^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\cos n\theta\right] \\ p_\theta &= -q\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Substituindu-se expresiile (7) în ecuația diferențială (6) soluția generală a acesteia este

$$\begin{aligned} M = A\cos\theta + B\sin\theta + C + qR^2 + R^2\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\theta\sin\theta - \\ - 2qR^2 \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\alpha}{n\alpha(n^2-1)} \cos n\theta \end{aligned} \tag{8}$$

unde A, B și C sînt cele trei constante de integrare.

Pentru a se reveni la situația în care sarcina P este aplicată concentrat în punctul $\theta = \pi$, se efectuează trecerea la limită pentru $\alpha \to 0$ obținîndu-se

$$M = A\cos\theta + B\sin\theta + C + qR^2 - 2qR^2 \sum_2^{\infty} \frac{(-1^n}{n^2-1} \cos n\theta. \tag{9}$$

Deoarece la $\theta = 0$, efortul tăietor $Q = 0$, potrivit ultimei ecuații a sistemului (1) trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\frac{dM}{d\theta} = 0 \quad \text{pentru } \theta = 0,$$

prin utilizarea căreia rezultă constanta de integrare $B = 0$

Relaţia dintre momentul încovoietor şi variaţia curburii se exprimă, în modul cunoscut, sub forma

$$M = -\frac{D}{R^2}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\right) \tag{10}$$

în care D este rigiditatea cilindrică a învelişului, iar w este deplasarea unui punct curent al suprafeţei mediane pe direcţie radială, considerată pozitivă către centrul de curbură în punctul respectiv.

Substituind soluţia (9) pentru M în relaţia (10) se obţine ecuaţia diferenţială pentru deplasarea radială w

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{D}A\cos\theta - \frac{R^2}{D}(C + qR^2) + \frac{2qR^4}{D}\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos n\theta \tag{11}$$

cu soluţia generală

$$w = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta - \frac{R_2}{2D}A\theta\sin\theta - \frac{R^2}{D}(C + qR^2) - \\ - \frac{2qR^4}{D}\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-1)^2}\cos n\theta \tag{12}$$

Deoarece deformaţia este simetrică faţă de planul diametral vertical, iar sprijinirea se face pe generatoarea corespunzătoare unghiului $\theta = \pi$, condiţiile la limită pentru w şi derivata întîia a acesteia sînt :

$$w = 0 \qquad \text{pentru } \theta = \pi$$
$$\frac{dw}{d\theta} = 0 \qquad \text{pentru } \theta = 0 \text{ şi } \theta = \pi \tag{13}$$

cu utilizarea cărora soluţia (12) devine

$$w = -\frac{R^2}{D}(C + qR^2)(\cos\theta + 1) - \frac{2qR^4}{D}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}[\cos\theta + \\ + (-1)^n\cos n\theta]. \tag{14}$$

Solicitarea învelişului cu perete subţire este lipsită de simetrie axială, iar marginile tronsonului fiind libere, suprafaţa mediană poate fi considerată inextensibilă, astfel încît

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{dv}{d\theta} - w\right) = 0 \tag{15}$$

unde cu v s-a notat deplasarea pe direcţie inelară a punctului curent al suprafeţei mediane, iar cu ε_0 lungirea specifică inelară.

Dacă se substituie soluţia (14) în ecuaţia (15) şi se efectuează integrarea se obţine soluţia pentru v

$$v = -\frac{R^2}{D}(C + qR^2)(\sin\theta + \theta) + C_3 - \frac{2qR^4}{D}\sum_2^\infty \frac{1}{n(n^2-1)^2}[n\sin\theta + (-1)^n \sin n\theta] \tag{16}$$

Condiţiile la limită pentru deplasarea inelară v sînt:

$$v = 0 \quad \text{pentru} \quad \theta = 0 \quad \text{şi} \quad \theta = \pi$$

care dau constantele de integrare $C = -qR^2$ şi $C_3 = 0$

Cu acestea, relaţia (14) pentru deplasarea radială w, devinè

$$w = -\frac{2qR^4}{D}\sum_2^\infty \frac{1}{(n^2-1)^2}[\cos\theta + (-1)^n \cos n\theta] \tag{17}$$

cu ajutorul căreia se determină expresia pentru momentele încovoietoare M, şi de aici, expresiile eforturilor T şi Q:

$$M = -2qR^2 \sum_2^\infty (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n^2-1}; \tag{18}$$

$$Q = 2qR \sum_2^\infty (-1)^n \frac{n \sin n\theta}{n^2-1}; \tag{19}$$

$$T = qR\left[1 - 2\cos\theta - 2\sum_2^\infty (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n^2-1}\right]. \tag{20}$$

Forma pe care o capătă virola rezemată după schema reprezentată în figura (1) este cea redată în figura (4)

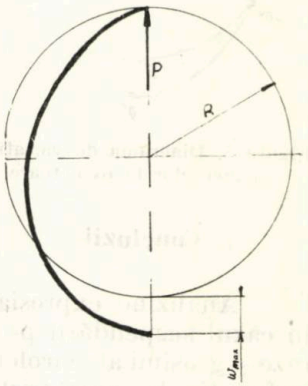


Figura 4. Forma suprafeţei mediane

3. Determinarea eforturilor unitare

Eforturile unitare date de momentele încovoietoare M și de eforturile T și Q calculate cu relațiile (18), (19) și (20) au expresiile :

$$\sigma^{(M)} = \pm \frac{6M}{\delta^2} = \mp \frac{12qR^2}{\delta^2} \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cos n\theta ; \tag{21}$$

$$\sigma^{(T)} = \frac{T}{\delta} = \frac{qR}{\delta}\left[1 - 2\cos\theta - 2\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cos n\theta ; \right. \tag{22}$$

$$\tau^{(Q)} = \frac{Q}{\delta} = \frac{2qR}{\delta} \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} n \sin\theta \cdot \tag{23}$$

Se poate verifica cu ușurință că pentru învelișurile cu perete subțire de gabarit mare, la care raza relativă $\rho = \frac{R}{\delta} \geqslant 20$ eforturile $\sigma^{(T)}$ și $\tau^{(Q)}$ sînt cu mult inferioare celor din încovoiere, astfel încît ipoteza suprafeței mediane inextensibile este justificată, motiv pentru care se vor lua în considerație în continuare numai eforturile unitare $\sigma^{(M)}$.

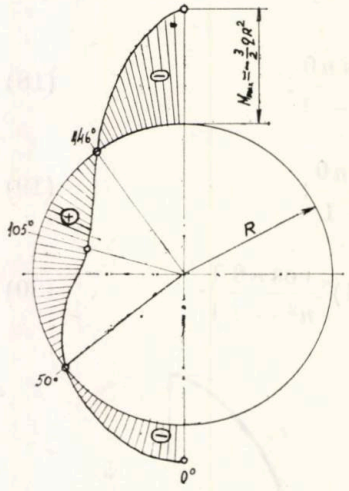


Figura 5. Diagrama de variație a momentelor încovoietoare

Modul de variație a momentelor încovoietoare M în funcție de θ este redat în figura 5, din care se vede că acestea sînt maxime pentru $\theta = \pi$, adică de-a lungul generatoarei de sprijin, astfel încît cu $q = \gamma\delta = 7{,}8 \cdot 10^{-3}\ \delta$, din relația (21) se obține

$$\sigma^{(M)}_{\max} = 7 \cdot 10^{-2} \frac{R^2}{\delta} = 7 \cdot 10^{-2}\ \rho R \tag{24}$$

Din relația (24) se vede că efortul unitar din încovoiere crește cu creșterea razei virolei și cu scăderea grosimii peretelui. În figura 6 este redat modul de variație a efortului unitar $\sigma^{(M)}_{\max}$ în funcție de rază, pentru diferite valori uzuale ale razei relative ρ.

4. Concluzii

Analizînd expresia (24) și graficele din figura 6 se vede că chiar și în cazul suspendării pe întreaga lungime a generatoarei, pentru anumite raze și grosimi ale virolei, eforturile unitare sînt importante, putînd depăși, în funcție de caracteristicile mecanice ale materialului, limita de curgere, rezultînd astfel deformații remanente cu influență negativă asupra preci-

ziei şi, evident, anularea efectelor operaţiei de calibrare. Se mai menţionează că şi eforturile unitare remanente, corespunzătoare, pot avea consecinţe nefavorabile în exploatare.

De exemplu, pentru o virolă cu $R = 150$ cm şi $\delta = 0{,}6$ cm efortul unitar maxim are valoarea $\sigma_{max}^{(M)} = 2560$ daN/cm².

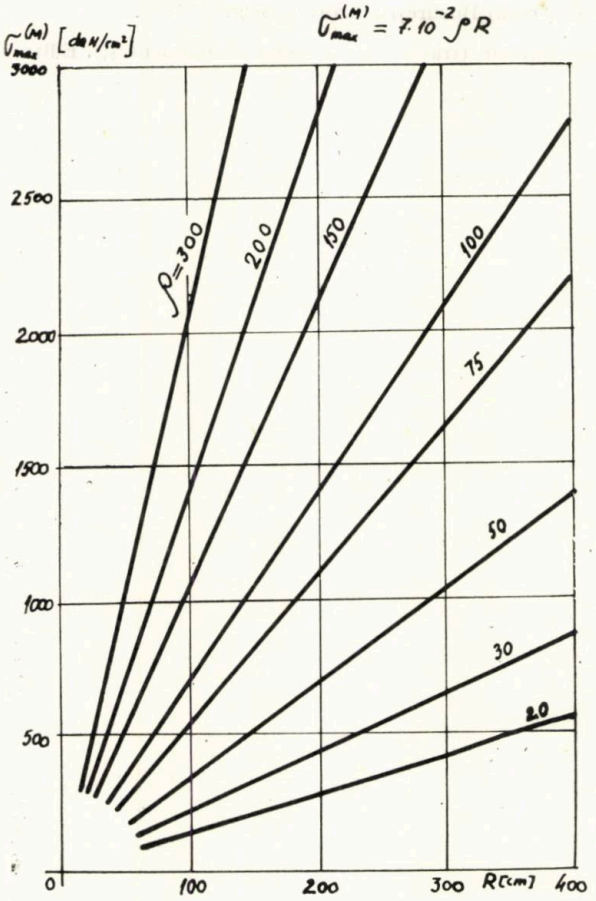


Figura 6. Variaţia eforturilor unitare $\sigma_{max}^{(M)}$ în funcţie de R, pentru cîteva valori uzuale ale razei relative ρ

Pentru acest motiv este necesară luarea unor măsuri de rigidizare a virolei în timpul ridicării de pe maşina de calibrat, astfel încît eforturile unitare să se situeze sub valoarea limitei de curgere.

Catedra de utilaj chimic

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Renert*, Calculul şi construcţia utilajului chimic, Vol. 1, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1971.

2. *S. Timoshenko şi J. Gere*. Teoria stabilităţii elastice, (traducere din limba engleză) Bucureşti, Editura tehnică. 1967.

3. *S.D. Ponomariov şi a.*, Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini, vol. 1 (traducere din limba rusă) Bucureşti, Editura tehnică 1960.

4. *Tolstov G. P.*, Serii Fourier, (traducere din limba rusă) Bucureşti, Editura tehnică, 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

AVIAȚIE

C.Z.: 629.135

MANEVRA OPTIMĂ DE ÎNTÎLNIRE CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL PE ORBITE ELIPTICE *

AL. MARINESCU, ȘT. STAICU

1. Notații

$O\,X\,Z\,Y$ — sistem de axe de coordonate inerțial planetocentric

$A\,x\,z\,y$ — sistem de axe de coordonate legat de aparatul urmărit (ținta)

$x,\ z,\ y$ — coordonate ale aparatului urmăritor în sistemul $A\,xzy$

$r_0\,(t)$ — raza vectoare a țintei

r_{op} — raza vectoare la perigeu

p — parametrul focal al orbitei țintei

μ — parametrul gravitațional

ε — excentricitatea orbitei țintei

$\varphi\,(t)$ — anomalia adevărată a țintei

t — timpul

τ — durata combustiei

$V_x,\ V_z,\ V_y$ — componente ale vitezei relative a aparatului urmăritor în sistemul $A\,xzy$

$a_x,\ a_z,\ a_y$ — componente ale accelerației datorită tracțiunii în sistemul $A\,xzy$

$g_x,\ g_z,\ g_y$ — componente ale accelerației gravitaționale în sistemul $A\,zxy$

$a_{xr},\ a_{zr},\ a_{yr}$ — componente ale accelerației relative (totale) în sistemul $A\,xzy$

$r_{01},\ \varphi_1$ — coordonatele țintei la începutul manevrei

$r_{02},\ \varphi_2$ — coordonatele țintei la sfîrșitul manevrei (la joncțiune)

* Manuscris predat redacției la data de 22 iulie 1971

$r_{om} = \frac{r_{01} + r_{02}}{2}$; $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ — coordonatele medii ale ţintei

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ — multiplicatori lagrangeeni.

2. Introducere

În studiul manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice folosind calculul variaţional obţinerea unor soluţii analitice este foarte dificilă.

Formulînd diferit problema variaţională a manevrei de întîlnire pe aceste orbite, puţini autori [1], [3], au reuşit să obţină soluţii analitice care să exprime legile optime de variaţie ale parametrilor mişcării aparatului urmăritor.

În ceea ce priveşte rezultatele numerice de interes practic în acest sens, ele lipsesc din publicaţii.

În lucrarea de faţă folosind formularea generală a problemei variaţionale, pentru manevra de întîlnire pe orice fel de orbită conică, dată de Al. Marinescu [1], vom prezenta un studiu succint dar cuprinzător asupra manevrei de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice. Pe baza unei analize critice lucrarea îşi propune să indice soluţiile cele mai avantajoase pentru mişcarea optimă a aparatului urmăritor, soluţii pe baza cărora s-au obţinut rezultate numerice de interes practic.

Ipotezele şi aproximaţiile care stau la baza obţinerii ecuaţiilor diferenţiale ale extremalelor folosind formularea susamintită, sînt cele descrise în lucrările [1], [2]. Menţionăm în plus că precizia este cu atît mai bună cu cît excentricitatea orbitei este mai mică, durata combustiei, cu alte cuvinte a manevrei putînd fi luată cu atît mai mare cu cît excentricitatea este mai mică.

Deaceea rezultatele pot fi aplicate în baza aproximaţiilor făcute în faza de joncţiune pentru excentricităţi mari ($\varepsilon \geqslant 0{,}1$) şi pentru ambele faze la joncţiune şi apropiere în cazul excentricităţilor mici ($\varepsilon < 0{,}1$).

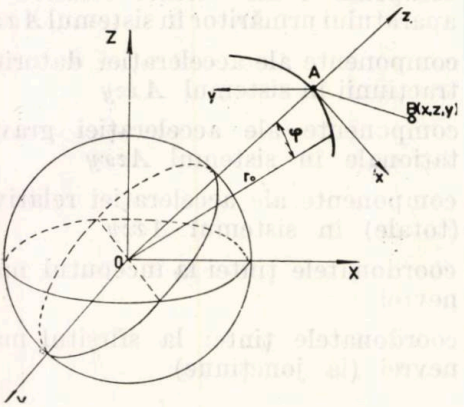


Fig. 1

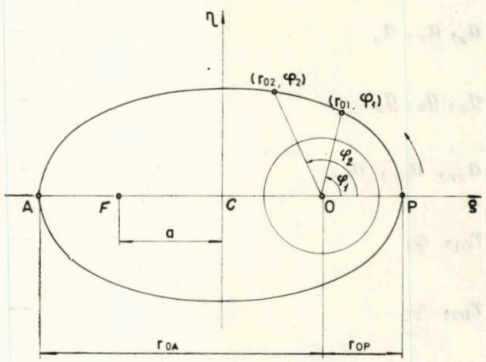


Fig. 2

3. Studiul manevrei optime de întîlnire considerînd ecuațiile liniare de mișcare ale aparatului urmăritor (teoria liniară)

După cum s-a arătat în [1] în cadrul teoriei liniare problema variațională a manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice ($0 < \varepsilon < 1$) revine la a găsi minimul integralei

$$J = \int_0^\tau (a_x^2 + a_z^2 + a_y^2)\, dt\,, \tag{1}$$

cu condițiile

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{dx}{dt} - V_x = 0\,,\\
\Phi_2 &= \frac{d\,V_x}{dt} - \alpha_1 x + \alpha_2 z - \alpha_3 V_z - a_x = 0\,,\\
\Phi_3 &= \frac{dz}{dt} - V_z = 0,\\
\Phi_4 &= \frac{d\,V_z}{dt} - \alpha_2 x - \beta_1 z + \alpha_3 V_x - a_z = 0\,,\\
\Phi_5 &= \frac{dy}{dt} - V_y = 0,\\
\Phi_6 &= \frac{dV_y}{dt} + \gamma_1 y - a_y = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

în care s-a notat

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\mu p}{r_{om}^4} - \frac{\mu}{r_{om}^3}\,,\\
\alpha_2 &= \frac{2\mu\,\varepsilon}{r_{om}^3} \sin \varphi_m\,,\\
\alpha_3 &= 2\,\frac{\sqrt{\mu p}}{r_{om}^2}\,,\\
\beta_1 &= \frac{\mu\, p}{r_{om}^4} + \frac{2\,\mu}{r_{om}^3}\,,\\
\gamma_1 &= \frac{\mu}{r_{om}^3}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

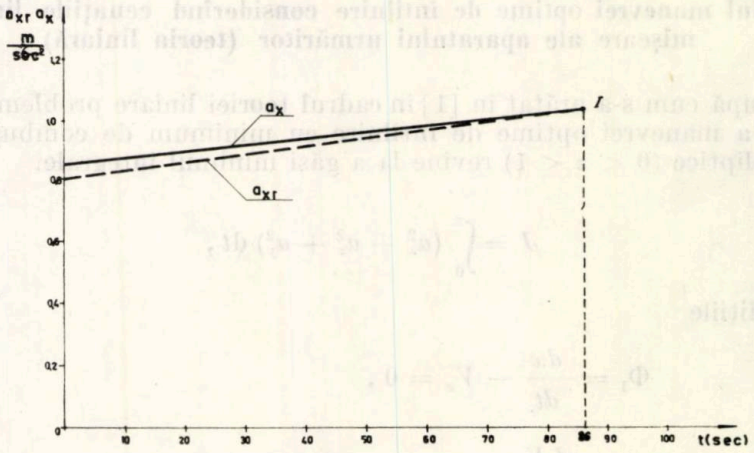


Fig. 3

Urmînd calea din [1], [2] se ajunge la următorul sistem de ecuaţii diferenţiale ale extremalelor

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_4 ,$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + \alpha_3 \lambda_4 ,$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \alpha_2 \lambda_2 - \beta_1 \lambda_4 ,$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\alpha_3 \lambda_2 - \lambda_3 ,$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = \gamma_1 \lambda_6 , \qquad (4)$$

$$\frac{d\lambda_6}{dt} = -\lambda_5 ,$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x ,$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \alpha_1 x - \alpha_2 z + \alpha_3 V_z + a_x ,$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z ,$$

$$\frac{d V_z}{dt} = \alpha_2 x + \beta_1 z - \alpha_3 V_x + a_z ,$$

$$\frac{d y}{d t} = V_y , \tag{4}$$

$$\frac{d V_y}{dt} = - \gamma_1 y + a_y ,$$

şi la ecuaţiile algebrice

$$\begin{aligned} 2 a_x - \lambda_2 &= 0, \\ 2 a_z - \lambda_4 &= 0, \\ 2 a_y - \lambda_6 &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

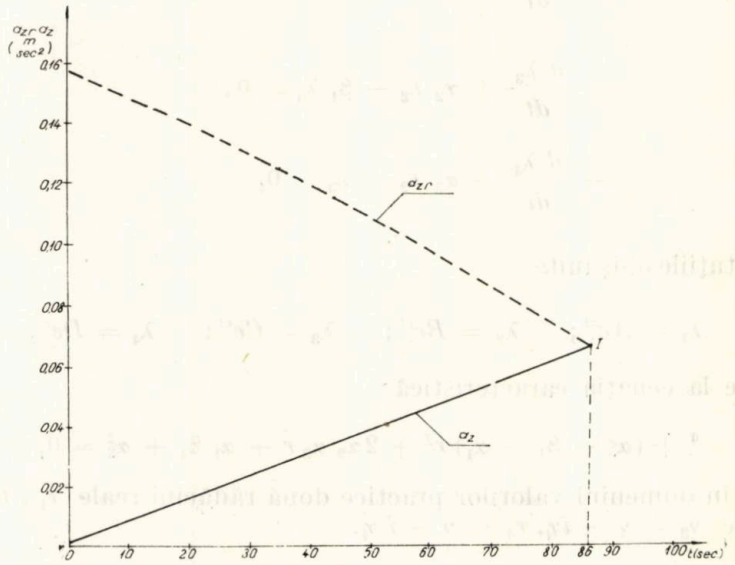


Fig. 4

Soluţiile sistemelor (4) şi (5) reprezintă legile optime de variaţie ale parametrilor mişcării aparatului urmăritor ce caracterizează manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice.

3.1. Soluţii exacte

Pentru integrarea exactă a sistemului de ecuaţii diferenţiale (4) trebuie remarcat mai întîi faptul că cea de-a cincia şi a cea de a şasea ecuaţie conduc la

$$\frac{d^2 \lambda_6}{dt^2} + \gamma_1 \lambda_6 = 0, \tag{6}$$

iar a unsprezecea şi a douăsprezecea la

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma_1 y = a_y, \tag{7}$$

ale căror soluţii se pot găsi fără dificultăţi. Celelalte ecuaţii pot fi grupate în două sisteme separate, pentru integrarea exactă a cărora aplicăm metoda clasică.

Pentru sistemul alcătuit din primele patru ecuaţii:

$$\begin{aligned}
-\frac{d\lambda_1}{dt} - \alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_4 &= 0, \\
-\frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_1 + \alpha_3 \lambda_4 &= 0, \\
-\frac{d\lambda_3}{dt} + \alpha_2 \lambda_2 - \beta_1 \lambda_4 &= 0, \\
-\frac{d\lambda_4}{dt} - \alpha_3 \lambda_2 - \lambda_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

cu substituţiile obişnuite

$$\lambda_1 = Ae^{rt}; \quad \lambda_2 = Be^{rt}; \quad \lambda_3 = Ce^{rt}; \quad \lambda_4 = De^{rt},$$

se ajunge la ecuaţia caracteristică

$$r^4 + (\alpha_3^2 - \beta_1 - \alpha_1) r^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 r + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2^2 = 0, \tag{9}$$

care are în domeniul valorilor practice două rădăcini reale r_1, r_2 şi două imaginare $\nu_3 = \nu + i\eta$, $r_4 = \nu - i\eta$.

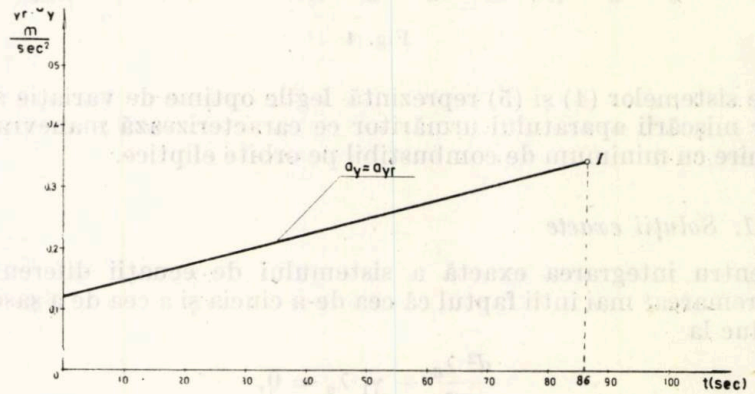


Fig. 5

Soluțiile sistemului (8) obținute pe această cale sînt

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= m_{11} C_1 e^{r_1 t} + m_{12} C_2 e^{r_2 t} + (a_1 \cos \eta t - b_1 \sin \eta t) C_3 e^{\nu t} + \\
&\quad + (a_1 \sin \eta t + b_1 \cos \eta t) C_4 e^{\nu t}, \\
\lambda_2 &= m_{21} C_1 e^{r_1 t} + m_{22} C_2 e^{r_2 t} + (a_2 \cos \eta t - b_2 \sin \eta t) C_3 e^{\nu t} + \\
&\quad + (a_2 \sin \eta t + b_2 \cos \eta t) C_4 e^{\nu t}, \\
\lambda_3 &= m_{31} C_1 e^{r_1 t} + m_{32} C_2 e^{r_2 t} + (a_3 \cos \eta t - b_3 \sin \eta t) C_3 e^{\nu t} + \\
&\quad + (a_3 \sin \eta t + b_3 \cos \eta t) C_4 e^{\nu t}, \\
\lambda_4 &= m_{41} C_1 e^{r_1 t} + m_{42} C_2 e^{r_2 t} + (a_4 \cos \eta t - b_4 \sin \eta t) C_3 e^{\nu t} + \\
&\quad + (a_4 \sin \eta t + b_4 \cos \eta t) C_4 e^{\nu t},
\end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$\begin{aligned}
m_{11} &= - r_1^3 + (\beta_1 - \alpha_3^2) r_1 - \alpha_2 \alpha_3, \\
m_{21} &= r_1^2 - \beta_1, \\
m_{31} &= \alpha_2 r_1 + \beta_1 \alpha_3, \\
m_{41} &= - \alpha_3 \gamma_1 - \alpha_2, \\
m_{12} &= - r_2^3 + (\beta_1 - \alpha_3^2) r_2 - \alpha_2 \alpha_3, \\
m_{22} &= r_2^2 - \beta_1, \\
m_{32} &= \alpha_2 r_2 + \beta_1 \alpha_3, \\
m_{42} &= - \alpha_3 r_2 - \alpha_2, \\
a_1 &= - \nu^3 + 3 \nu \eta^2 + (\beta_1 - \alpha_3^2) \nu - \alpha_2 \alpha_3, \\
b_1 &= - 3 \nu^2 \eta + \eta^3 + (\beta_1 - \alpha_3^2) \eta, \\
a_2 &= \nu^2 - \eta^2 - \beta_1, \\
b_2 &= 2 \nu \eta, \\
a_3 &= \alpha_2 \nu + \beta_1 \alpha_3, \\
b_3 &= \alpha_2 \eta, \\
a_4 &= - \nu \alpha_3 - \alpha_2, \\
b_4 &= - \alpha_3 \eta.
\end{aligned} \tag{11}$$

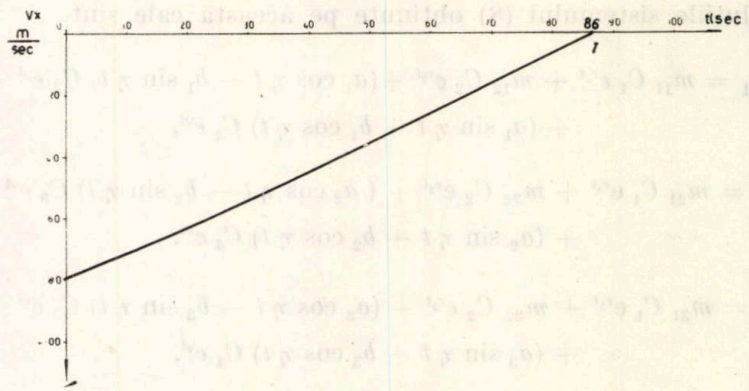


Fig. 6

Pentru sistemul fără parte dreaptă

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} - V_x = 0\,,\\
&\frac{d\,V_x}{dt} - \alpha_1 x + \alpha_2 z - \alpha_3 V_z = 0\,,\\
&\frac{dz}{dt} - V_z = 0\,,\\
&\frac{d\,V_z}{dt} - \alpha_2 x + \alpha_3 V_x - \beta_1 z = 0\,,
\end{aligned} \tag{12}$$

cu substituţiile

$$x = \bar{A}e^{\bar{r}t}; \quad V_x = \bar{B}e^{\bar{r}t}; \quad z = \bar{C}e^{\bar{r}t}; \quad V_z = \bar{D}e^{\bar{r}t},$$

se ajunge la ecuaţia caracteristică

$$\bar{r}^4 + (\alpha_3^2 - \beta_1 - \alpha_1)\,\bar{r}^2 - 2\alpha_2\,\alpha_3\,\bar{r} + \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2^2 = 0\,. \tag{13}$$

Deoarece ecuaţia caracteristică (13) diferă de ecuaţia caracteristică (9) numai prin semnul coeficientului lui $\bar{r}$, rezultă după teoria ecuaţiilor algebrice

$$\begin{aligned}
&\bar{r}_1 = -r_1\,,\\
&\bar{r}_2 = -r_2\,,\\
&\bar{r}_3 = -\nu - i\,\eta\,,\\
&\bar{r}_4 = -\nu + i\,\eta\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

astfel că soluţiile sistemului (12) sînt

$$
\begin{aligned}
x &= n_{11} C_5 e^{-r_1 t} + n_{12} C_6 e^{-r_2 t} + (c_1 \cos \eta t + d_1 \sin \eta t) C_7 e^{-\nu t} + \\
&\quad + (-c_1 \sin \eta t + d_1 \cos \eta t) C_8 e^{-\nu t}, \\
V_x &= n_{21} C_5 e^{-r_1 t} + n_{22} C_6 e^{-r_2 t} + (c_2 \cos \eta t + d_2 \sin \eta t) C_7 e^{-\nu t} + \\
&\quad + (-c_2 \sin \eta t + d_2 \cos \eta t) C_8 e^{-\nu t}, \\
z &= n_{31} C_5 e^{-r_1 t} + n_{32} C_6 e^{-r_2 t} + (c_3 \cos \eta t + d_3 \sin \eta t) C_7 e^{-\nu t} + \\
&\quad + (-c_3 \sin \eta t + d_3 \cos \eta t) C_8 e^{-\nu t}, \\
V_z &= n_{41} C_5 e^{-r_1 t} + n_{42} C_6 e^{-r_2 t} + (c_4 \cos \eta t + d_4 \sin \eta t) C_7 e^{-\nu t} + \\
&\quad + (-c_4 \sin \eta t + d_4 \cos \eta t) C_8 e^{-\nu t},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
n_{11} &= -r_1^3 - (\alpha_3^2 - \beta_1) r_1 - \alpha_2 \alpha_3, \\
n_{21} &= \alpha_1 r_1^2 - \alpha_2 \alpha_3 r_1 - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2^2), \\
n_{31} &= -r_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2, \\
n_{41} &= r_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 r_1, \\
n_{12} &= -r_2^3 - (\alpha_3^2 - \beta_1) r_2 - \alpha_2 \alpha_3, \\
n_{22} &= \alpha_1 r_2^2 - \alpha_2 \alpha_3 r_2 - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2^2), \\
n_{32} &= -r_2 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3, \\
n_{42} &= r_2^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 r_2, \\
c_1 &= a_1, \\
d_1 &= b_1, \\
c_2 &= \alpha_1 \nu^2 - \alpha_1 \eta^2 - \alpha_2 \alpha_3 \nu - \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2^2, \\
d_2 &= 2\nu\eta\alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3 \eta, \\
c_3 &= -\nu \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3, \\
d_3 &= -\eta \alpha_2, \\
c_4 &= \alpha_2 \nu^2 - \alpha_2 \eta^2 + \alpha_1 \alpha_3 \nu, \\
d_4 &= 2\nu\eta\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 \eta.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Ţinînd seama de soluţia ecuaţiei (6)

$$\lambda_6 = C_9 \cos \omega t + C_{10} \sin \omega t, \tag{17}$$

unde

$$\omega = \sqrt{\gamma_1},$$

de soluţiile (10) şi de ecuaţiile algebrice (5), avem

$$a_x = \frac{1}{2}[m_{21}C_1 e^{r_1 t} + m_{22}C_2 e^{r_2 t} + (a_2 \cos \eta t - b_2 \sin \eta t)\, C_3 e^{\nu t} + (a_2 \sin \eta t + b_2 \cos \eta t)\, C_4 e^{\nu t}],$$

$$a_z = \frac{1}{2}[m_{41}\, C_1 e^{r_1 t} + m_{42}C_2 e^{r_2 t} + (a_4 \cos \eta t - b_4 \sin \eta t)\, C_3 e^{\nu t} + (a_4 \sin \eta t + b_4 \cos \eta t)\, C_4 e^{\nu t}], \tag{18}$$

$$a_y = \frac{1}{2} C_9 \cos \omega t + \frac{1}{2} C_{10} \sin \omega t,$$

care pot fi folosite acum ca părţi drepte ale celei de a doua şi a patra ecuaţii din sistemul (12) precum şi pentru ecuaţia omogenă corespunzătoare ecuaţiei (7).

Soluţiile ecuaţiilor neomogene, ţinînd seama de soluţiile ecuaţiilor omogene, se obţin prin metoda variaţiei constantelor. Calculele, efectuate de autorii acestei lucrări sînt foarte complicate încît practic soluţiile găsite nu pot fi uşor urmărite.

În ce priveşte determinarea constantelor de integrare vom remarca faptul că calculul este extrem de laborios. Pe de altă parte rezolvarea ecuaţiilor caracteristice pentru fiecare parametru schimbat adaugă calcule în plus.

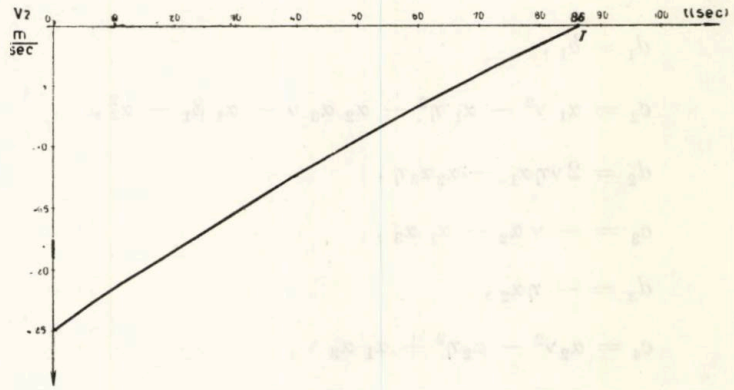


Fig. 7

Cîştigul de precizie urmînd această cale nu pledează în favoarea utilizării ei deoarece complexitatea calculelor poate duce la erori. Deaceea apreciem că metoda aproximativă de integrare dată în lucrarea [2] se impune.

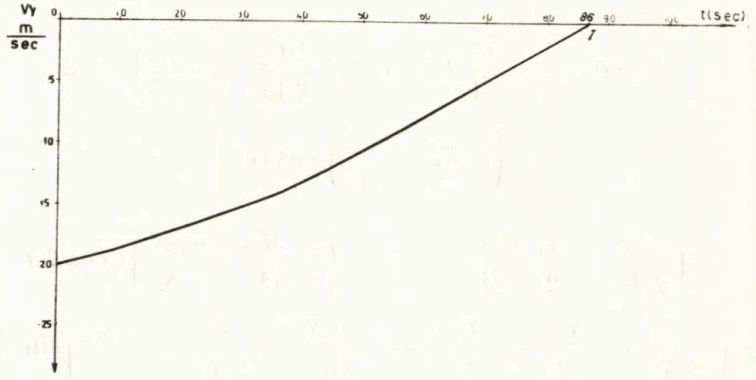


Fig 8

3.2.Soluţii aproximative

Cu această metodă în lucrarea de faţă s-au calculat noi soluţii pentru sistemele (4) şi (5) pe baza cărora s-au făcut noi aplicaţii numerice cu un calculator electronic. Fără a mai intra în detalii care pot fi luate din lucrarea [2] prin metoda aproximativă s-au găsit următoarele expresii noi pentru legile optime de variaţie ale parametrilor mişcării aparatului urmăritor :

$$a_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3 C_1}{K} - \frac{\alpha_2 C_2}{K^2}\right)\sin Kt - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3 C_2}{K} + \frac{\alpha_2 C_1}{K^2}\right)\cos Kt - \frac{C_3}{2}t + \frac{C_4}{2},$$

$$a_z = \frac{C_1}{2}\cos Kt + \frac{C_2}{2}\sin Kt,$$

$$a_y = \frac{C_5}{2}\cos \omega t + \frac{C_6}{2}\sin \omega t,$$

$$V_x = \left(\frac{\alpha_2 M}{2K^3} - \frac{\alpha_3 N}{2K^2}\right)t\sin Kt - \left(\frac{\alpha_2 N}{2K^3} + \frac{\alpha_3 M}{2K^2}\right)t\cos Kt +$$

$$+\left[\alpha_2\left(\frac{N}{K^4} - \frac{C_1}{2K^3} + \frac{C_{10}}{K^2}\right) + \alpha_3\left(\frac{M}{2K^3} - \frac{C_2}{2K^2} + \frac{C_9}{K}\right)\right]\sin Kt + \tag{19}$$

$$+\left[\alpha_2\left(\frac{M}{K^4} + \frac{C_2}{2K^3} + \frac{C_9}{K^2}\right) - \alpha_3\left(\frac{N}{2K^3} + \frac{C_1}{2K^2} + \frac{C_{10}}{K}\right)\right]\cos Kt -$$

$$-\frac{\alpha_2\,\alpha_3\,C_3}{12\,K^2}t^3 + \left(\frac{\alpha_2\,\alpha_3\,C_4}{4\,K^2} + \frac{\alpha_3^2\,C_3}{4\,K^2} - \frac{C_3}{4}\right)t^2 - \left(\alpha_2 C_{11} + \frac{\alpha_3^2 C_4}{2\,K^2} - \frac{C_4}{2}\right)t + C_{12},$$

$$V_z = \frac{M}{2K} t \sin Kt - \frac{N}{2K} t \cos Kt + C_9 \cos Kt + C_{10} \sin Kt + \\ + \frac{\alpha_3 C_3}{2K^2} t - \frac{\alpha_3 C_4}{2K^2},$$

$$V_y = \frac{C_5}{4} t \cos \omega t + \frac{C_6}{4} t \sin \omega t + \left(\frac{C_5}{4\omega} - \omega C_7\right) \sin \omega t + \\ + \left(\omega C_8 - \frac{C_6}{4\omega}\right) \cos \omega t,$$

$$x = -\left(\frac{\alpha_2 N}{2K^4} + \frac{\alpha_3 M}{2K^3}\right) t \sin Kt - \left(\frac{\alpha_2 M}{2K^4} - \frac{\alpha_3 N}{2K^3}\right) t \cos Kt + \\ + \left[\alpha_2\left(\frac{3M}{2K^5} + \frac{C_2}{2K^4} + \frac{C_9}{K^3}\right) - \alpha_3\left(\frac{N}{K^4} + \frac{C_1}{2K^3} + \frac{C_{10}}{K^2}\right)\right] \sin Kt - \\ - \left[\alpha_2\left(\frac{3N}{2K^5} - \frac{C_1}{2K^4} + \frac{C_{10}}{K^3}\right) + \alpha_3\left(\frac{M}{K^4} - \frac{C_2}{2K^3} + \frac{C_9}{K^2}\right)\right] \cos Kt - \\ - \frac{\alpha_2 \alpha_3 C_3}{48K^2} t^4 + \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3 C_4}{12K^2} + \frac{\alpha_3^2 C_3}{12K^2} - \frac{C_3}{12}\right) t^3 - \\ - \left(\frac{\alpha_2 C_{11}}{2} + \frac{\alpha_3^2 C_4}{4K^2} - \frac{C_4}{4}\right) t^2 + C_{12} t + C_{13}, \tag{19}$$

$$z = -\frac{Nt}{2K^2} \sin Kt - \frac{Mt}{2K^2} \cos Kt + \left(\frac{M}{2K^3} + \frac{C_9}{K}\right) \sin Kt - \\ - \left(\frac{N}{2K^3} + \frac{C_{10}}{K}\right) \cos Kt + \frac{\alpha_3 C_3}{4K^2} t^2 - \frac{\alpha_3 C_4}{2K^2} t + C_{11},$$

$$y = \frac{C_5}{4\omega} t \sin \omega t - \frac{C_6}{4\omega} t \cos \omega t + C_7 \cos \omega t + C_8 \sin \omega t,$$

unde

$$K = \sqrt{\alpha_3^2 - \beta_1},$$

$$\omega = \sqrt{\gamma_1}, \tag{20}$$

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3^2 C_2}{K} + \frac{\alpha_2 \alpha_3 C_1}{K^2} + K C_2\right),$$

$$N = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3^2 C_1}{K} - \frac{\alpha_2 \alpha_3 C_2}{K^2} + K C_1\right).$$

Expresiile (19) ale legilor optime de variaţie a parametrilor mişcării aparatului urmăritor conţin 13 constante arbitrare C_1, $C_2 \ldots C_3$ care se determină din condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \quad ; \quad V_x(0) = V_{x0}, \\ z(0) &= z_0 \quad ; \quad V_z(0) = V_{z0}, \\ y(0) &= y_0 \quad ; \quad V_y(0) = V_{y0}, \end{aligned} \tag{21}$$

condiţiile de acostare

$$\begin{aligned} x(\tau) &= 0 \quad ; \quad V_x(\tau) = 0, \\ z(\tau) &= 0 \quad ; \quad V_z(\tau) = 0, \\ y(\tau) &= 0 \quad ; \quad V_y(\tau) = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

şi din condiţia suplimentară

$$\frac{\alpha_3 C_3}{2K^2} = \alpha_2 C_{13} + \beta_1 C_{11} - \alpha_3 C_{12}, \tag{23}$$

care rezultă din condiţia ca soluţiile obţinute să verifice a zecea ecuaţie (4) care a fost derivată [2].

Din condiţiile (21), (22), şi (23) se obţin următoarele expresii ale celor 13 constante

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\delta_1}{\delta_0}, \\ C_2 &= \frac{\delta_2}{\delta_0}, \\ C_3 &= \frac{\delta_3}{\delta_0}, \\ C_4 &= -\frac{1}{B_7}(B_4 C_1 + B_5 C_2 + B_6 C_3 - B_8), \\ C_5 &= \frac{B_3}{A_{19}}, \\ C_6 &= 4\,\omega\left(\omega \frac{B_2}{B_1} - V_{y0}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

$$C_7 = y_0 ,$$

$$C_8 = \frac{B_2}{B_1} ,$$

$$C_9 = V_{z0} + \frac{\alpha_3}{2 K^2} C_4 ,$$

$$C_{10} = - V_{z0} \operatorname{ctg} K \tau - \frac{A_{17}}{\sin K \tau} C_1 - \frac{A_{18}}{\sin K \tau} C_2 - \frac{\alpha_3 \tau}{2 K^2 \sin K \tau} C_3 + \\ + \frac{\alpha_3}{2 K^2} \operatorname{tg} \frac{K \tau}{2} C_4 ,$$

$$C_{11} = Z_0 - A_3 C_1 + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4 K_5} C_2 + \frac{1}{K} C_{10} ,$$

$$C_{12} = V_{x0} - \frac{\alpha_2}{K^2} V_{z0} - A_4 C_1 - A_{16} C_2 - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{2 K^4} C_4 + \frac{\alpha_3}{K} C_{11} ,$$

$$C_{13} = \frac{\frac{\alpha_3}{2 K^2} C_3 - \beta_1 C_{11} + \alpha_3 C_{12}}{\alpha_2} .$$

În expresiile constantelor de mai sus s-au folosit notaţiile

$$\delta_0 = D_1 D_6 D_{11} + D_2 D_7 D_9 + D_3 D_5 D_{10} - D_1 D_7 D_{10} - D_2 D_5 D_{11} - D_3 D_6 D_9 ,$$

$$\delta_1 = D_2 D_7 D_{12} + D_3 D_8 D_{10} + D_4 D_6 D_{11} - D_2 D_8 D_{11} - D_3 D_6 D_{12} - D_4 D_7 D_{10} ,$$

$$\delta_2 = D_1 D_8 D_{11} + D_3 D_5 D_{12} + D_4 D_7 D_9 - D_1 D_7 D_{12} - D_3 D_8 D_9 - D_4 D_5 D_{11} ,$$

$$\delta_3 = D_1 D_6 D_{12} + D_2 D_8 D_9 + D_4 D_5 D_{10} - D_1 D_8 D_{10} - D_2 D_5 D_{12} - D_4 D_6 D_9 ,$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= B_7 B_9 - B_4 B_{12} , \\ D_2 &= B_7 B_{10} - B_5 B_{12} , \\ D_3 &= B_7 B_{11} - B_6 B_{12} , \\ D_4 &= B_7 B_{13} - B_8 B_{12} . \\ D_5 &= B_7 B_{14} - B_4 B_{17} , \\ D_6 &= B_7 B_{15} - B_5 B_{17} , \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$D_7 = B_7 B_{16} - B_6 B_{17},$$

$$D_8 = B_7 B_{18} - B_8 B_{17},$$

$$D_9 = B_7 B_{19} - B_4 B_{22},$$

$$D_{10} = B_7 B_{20} - B_5 B_{22},$$

$$D_{11} = B_7 B_{21} - B_6 B_{22},$$

$$D_{12} = B_7 B_{23} - B_8 B_{22},$$

$$B_1 = A_{19}(\omega\tau\cos\omega\tau - \sin\omega\tau) + \tau\sin\omega\tau\left(\omega A_{20} + \frac{\cos\omega\tau}{4}\right),$$

$$B_2 = A_{19}\cos\omega\tau(\tau V_{y0} + y_0) + \tau\sin\omega\tau\left(V_{y0} A_{20} + \frac{y_0\sin\omega\tau}{4}\right),$$

$$B_3 = -\omega\frac{B_2}{B_1}(\cos\omega\tau + 4\omega A_{20}) + 4\omega V_{y0} A_{20} + \omega y_0\sin\omega\tau,$$

$$B_4 = A_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_2}A_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}A_4 + \frac{A_{17}}{\sin K\tau}\left(\frac{\alpha_2}{K^3} + \frac{\beta_1}{\alpha_2 K} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 K}\right),$$

$$B_5 = -\frac{\alpha_3\beta_1}{4K^5} - A_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}A_{16} + \frac{A_{18}}{\sin K\tau}\left(\frac{\alpha_2}{K^3} + \frac{\beta_1}{\alpha_2 K} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 K}\right),$$

$$B_6 = \frac{\alpha_3}{2\alpha_2 K^2} + \frac{\alpha_3\tau}{2K^2\sin K\tau}\left(\frac{\alpha_2}{K^3} + \frac{\beta_1}{\alpha_2 K} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 K}\right),$$

$$B_7 = -\frac{\alpha_3^2}{K^4} - \frac{\alpha_3}{2K^2}\left(\frac{\alpha_2}{K^3} + \frac{\beta_1}{\alpha_2 K} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 K}\right)\operatorname{tg}\frac{K\tau}{2},$$

$$B_8 = x_0 + \frac{\beta_1}{\alpha_2}z_0 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}V_{x0} + \frac{2\alpha_3}{K^2}V_{z0} - V_{z0}\left(\frac{\alpha_2}{K^3} + \frac{\beta_1}{\alpha_2 K} - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 K}\right)\operatorname{ctg} K\tau,$$

$$B_9 = A_5 + A_3\left(\frac{\alpha_2\tau^2}{2} + \frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) - A_4\left(\tau + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) + \frac{A_{17}}{\sin K\tau}\left(A_{10} + \frac{\alpha_2\tau^2}{2K} - \frac{K}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3\tau}{K}\right),$$

$$B_{10} = A_6 - \frac{\alpha_2\,\alpha_3}{4\,K^5}\left(\frac{\alpha_2\,\tau^2}{2} + \frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) - A_{16}\left(\tau + \frac{\alpha_3}{2}\right) + \frac{A_{18}}{\sin K\tau}\left(A_{10} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_2\,\tau^2}{2\,K} - \frac{K}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3\tau}{K}\right),$$

$$B_{11} = A_7 + \frac{\alpha_3}{2\,\alpha_2\,K^2} + \frac{\alpha_3\tau}{2\,K^2\sin K\tau}\left(A_{10} + \frac{\alpha_2\tau^2}{2\,K} - \frac{K}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3\tau}{K}\right),$$

$$B_{12} = A_8 + \frac{\alpha_3}{2\,K^2}\,A_9 - \frac{\alpha_2\,\alpha_3}{2\,K^4}\left(\tau + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) -$$
$$- \frac{\alpha_3}{2\,K^2}\left(A_{10} + \frac{\alpha_2\tau^2}{2\,K} - \frac{K}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3\tau}{K}\right)\operatorname{tg}\frac{K\tau}{2},$$

$$B_{13} = -\,V_{z0}\,A_9 + z_0\left(\frac{\alpha_2\tau^2}{2} + \frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) - \left(\tau + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\left(V_{x0} - \frac{\alpha_2}{K^2}\,V_{z0}\right) -$$
$$- V_{z0}\left(A_{10} + \frac{\alpha_2\tau^2}{2\,K} - \frac{K}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3\tau}{K}\right)\operatorname{ctg} K\tau,$$

$$B_{14} = A_{11} - A_3 - \frac{A_{17}}{\sin K\tau}\left(\frac{1}{K} - \frac{\cos K\tau}{K}\right),$$

$$B_{15} = A_{12} + \frac{\alpha_2\,\alpha_3}{4\,K^5} - \frac{A_{18}}{\sin K\tau}\left(\frac{1}{K} - \frac{\cos K\tau}{K}\right),$$

$$B_{16} = \frac{\alpha_3\tau^2}{4\,K^2} - \frac{\alpha_3\tau}{2\,K^2\sin K\tau}\left(\frac{1}{K} - \frac{\cos K\tau}{K}\right),$$

$$B_{17} = -\frac{\alpha_3\tau}{2\,K^2} + \frac{\alpha_3\sin K\tau}{2\,K^3} + \frac{\alpha_3}{2\,K^2}\left(\frac{1}{K} - \frac{\cos K\tau}{K}\right)\operatorname{tg}\frac{K\tau}{2},$$

$$B_{18} = -\,z_0 - \frac{V_{z0}\sin K\tau}{K} + V_{z0}\left(\frac{1}{K} - \frac{\cos K\tau}{K}\right)\operatorname{ctg} K\tau,$$

$$B_{19} = A_{13} + \alpha_2\tau\,A_3 - \frac{A_{17}}{\sin K\tau}\left(K\,A_9 - \frac{\alpha_2\tau}{K}\right) - A_4 - \frac{\alpha_3}{K}\,\frac{A_{17}}{\sin K\tau},$$

$$B_{20} = A_{14} - \frac{\alpha_2^2\,\alpha_3\tau}{4\,K^5} - \frac{A_{18}}{\sin K\tau}\left(K\,A_9 - \frac{\alpha_2\tau}{K}\right) - A_{16} - \frac{\alpha_3}{K}\,\frac{A_{18}}{\sin K\tau},$$

$$B_{21} = -\,A_8 - \frac{\alpha_3\tau}{2K^2\sin K\tau}\left(K\,A_9 - \frac{\alpha_2\tau}{K}\right) - \frac{\alpha_3^2\,\tau}{2K^3\sin K\tau},$$

$$B_{22} = A_{15} + \frac{\alpha_3}{2K} A_{10} + \frac{\alpha_3}{2K^2}\left(K A_9 - \frac{\alpha_2 \tau}{K}\right) \operatorname{tg} \frac{K\tau}{2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{2K^4} + \frac{\alpha_3^2}{2K^3} \operatorname{tg} \frac{K\tau}{2},$$

$$B_{23} = \alpha_2 \tau z_0 - K A_{10} V_{z0} + V_{z0}\left(K A_9 - \frac{\alpha_2 \tau}{K}\right) \operatorname{ctg} K\tau +$$

$$+ \frac{\alpha_3}{K} V_{z0} \operatorname{ctg} K\tau - V_{x0} + \frac{\alpha_2}{K^2} V_{z0},$$

$$A_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{4K^6} + \frac{5\alpha_2}{4K^4},$$

$$A_2 = \frac{3\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^7} + \frac{\alpha_3^3}{2K^5},$$

$$A_3 = \frac{\alpha_3^2}{4K^4} + \frac{1}{4K^2},$$

$$A_4 = \frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{2K^6} + \frac{\alpha_3^3}{4K^4} - \frac{\alpha_3}{4K^2},$$

$$A_5 = \frac{\alpha_2}{4K^3} \tau \sin K\tau - \left(\frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^6} + \frac{\alpha_3^3}{4K^4} + \frac{\alpha_3}{4K^2}\right) \tau \cos K\tau +$$

$$+ \left(\frac{3\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^7} + \frac{\alpha_3^3}{2K^5}\right) \sin K\tau + \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{4K^6} + \frac{5\alpha_2}{4K^4}\right) \cos K\tau,$$

$$A_6 = -\left(\frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^6} + \frac{\alpha_3^3}{4K^4} + \frac{\alpha_3}{4K^2}\right) \tau \sin K\tau - \frac{\alpha_2}{4K^3} \tau \cos K\tau +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{4K^6} + \frac{5\alpha_2}{4K^4}\right) \sin K\tau - \left(\frac{3\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^7} + \frac{\alpha_3^3}{2K^5}\right) \cos K\tau,$$

$$A_7 = -\frac{\alpha_2 \alpha_3}{48K^2} \tau^4 + \left(\frac{\alpha_3^2}{12K^2} - \frac{1}{12}\right) \tau^3,$$

$$A_8 = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{12K^2} \tau^3 - \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^2} - \frac{1}{4}\right) \tau^2,$$

$$A_9 = \frac{\alpha_2}{K^3} \sin K\tau - \frac{\alpha_3}{K^2} \cos K\tau,$$

$$A_{10} = \frac{\alpha_3}{K^2} \sin K\tau + \frac{\alpha_2}{K^3} \cos K\tau ,$$

$$A_{11} = \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^3} + \frac{1}{4K} \right) \tau \sin K\tau - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^4} \tau \cos K\tau +$$

$$+ \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^5} \sin K\tau + \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^4} + \frac{1}{4K^2} \right) \cos K\tau ,$$

$$A_{12} = - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^4} \tau \sin K\tau - \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^3} + \frac{1}{4K} \right) \tau \cos K\tau +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^4} + \frac{1}{4K^2} \right) \sin K\tau - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^5} \cos K\tau ,$$

$$A_{13} = \left(\frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^5} + \frac{\alpha_3^2}{4K^3} + \frac{\alpha_3}{4K} \right) \tau \sin K\tau + \frac{\alpha_2}{4K^2} \tau \cos K\tau -$$

$$- \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{4K^5} + \frac{\alpha_2}{K^3} \right) \sin K\tau + \left(\frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{2K^6} + \frac{\alpha_3^3}{4K^4} - \frac{\alpha_3}{4K^2} \right) \cos K\tau ,$$

$$A_{14} = \frac{\alpha_2}{4K^2} \tau \sin K\tau - \left(\frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{4K^5} + \frac{\alpha_3^3}{4K^3} + \frac{\alpha_3}{4K} \right) \tau \cos K\tau +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{2K^6} + \frac{\alpha_3^3}{4K^4} - \frac{\alpha_3}{4K^2} \right) \sin K\tau + \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{4K^5} + \frac{\alpha_2}{K^3} \right) \cos K\tau ,$$

$$A_{15} = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^2} \tau^2 - \left(\frac{\alpha_3^2}{2K^2} - \frac{1}{2} \right) \tau ,$$

$$A_{16} = \frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{4K^5} + \frac{\alpha_2}{K^3} ,$$

$$A_{17} = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^3} \tau \sin K\tau + \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^2} + \frac{1}{4} \right) \tau \cos K\tau ,$$

$$A_{18} = \left(\frac{\alpha_3^2}{4K^2} + \frac{1}{4} \right) \tau \sin K\tau - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4K^3} \tau \cos K\tau ,$$

$$A_{19} = \frac{\tau \cos \omega\tau}{4} + \frac{\sin \omega\tau}{4\omega} ,$$

$$A_{20} = \frac{\tau \sin \omega\tau}{4} - \frac{\cos \omega\,\tau}{4\,\omega}.$$

4. Studiul manevrei optime de întîlnire considerînd ecuațiile neliniare de mișcare ale aparatului urmăritor (teoria neliniară)

Pentru cazul în care se consideră ecuațiile neliniare de mișcare ale aparatului urmăritor (teoria neliniară) în lucrarea [2] s-a arătat că problema variațională a manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil revine la a găsi minimul integralei

$$J = \int_0^{\tau} (a_x^2 + \alpha_z^2 + a_y^2)\, dt, \tag{26}$$

cu condițiile

$$\Phi_1^* = \frac{dx}{dt} - V_x = 0,$$

$$\Phi_2^* = \frac{d\,V_x}{d\,t} - \frac{\mu\,p}{r_{om}^4}\,x - 2V_z\frac{\sqrt{\mu\,p}}{r_{om}^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_{om}^3}\,z\,\sin\varphi_m +$$

$$+ \mu\,\frac{x}{[x^2 + (r_{om} + z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_x = 0,$$

$$\Phi_3^* = \frac{dz}{dt} - V_z = 0, \tag{27}$$

$$\Phi_4^* = \frac{dV_z}{dt} - \frac{\mu}{r_{om}^2} - \frac{\mu\,p}{r_{om}^4}\,z + 2V_x\frac{\sqrt{\mu\,p}}{r_{om}^2} -$$

$$- \frac{2\,\mu\varepsilon}{r_{om}^3}\,x\sin\varphi_m + \mu\,\frac{r_{om} + z}{[x^2 + (r_{om} + z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_z = 0,$$

$$\Phi_5^* = \frac{dy}{dt} - V_y = 0,$$

$$\Phi_6^* = \frac{dV_y}{dt} + \mu\,\frac{y}{[x^2 + (r_{om} + z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_y = 0$$

După cum s-a arătat în [2], în acest caz legile optime de variaţie ale parametrilor mişcării aparatului urmăritor, se deduc printr-un procedeu de iteraţie, folosindu-se ca valori iniţiale ale multiplicatorilor lui Lagrange λ_{10}, λ_{20}, ... λ_{60} valorile date de teoria liniară.

Ca şi în cazul orbitelor circulare, teoria neliniară prezintă un interes deosebit numai pentru programul optim de conducere, deci pentru determinarea componentelor acceleraţiei datorită tracţiunii.

Pentru a putea compara valorile date de teoria neliniară cu cele date de teoria liniară, dăm mai jos după [1] expresiile componentelor acceleraţiei datorită tracţiunii în prima aproximaţie

$$a_x^{(1)} = \frac{\lambda_2^{(1)}}{2} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{20} + \left(-\lambda_{10} + 2\,\lambda_{40}\frac{\sqrt{\mu\, p}}{r_{om}^2}\right)t\right],$$

$$a_z^{(1)} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{2} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{40} - \left(2\,\lambda_{20}\frac{\sqrt{\mu\, p}}{r_{om}^2} + \lambda_{30}\right)t\right],$$

$$a_y^{(1)} = \frac{\lambda_6^{(1)}}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_{60} - \lambda_{50}\, t).$$

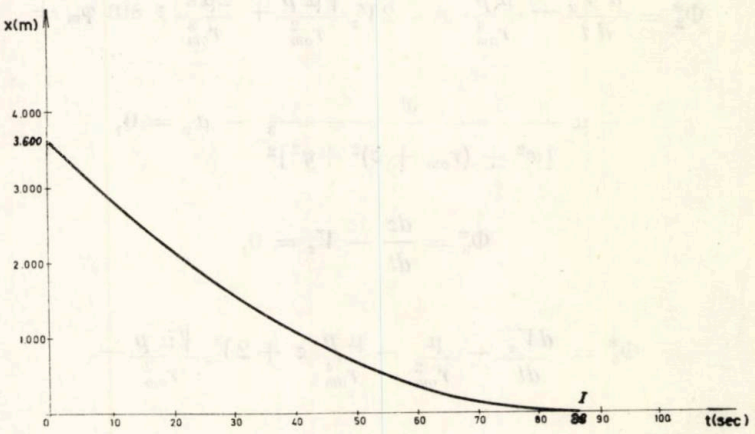


Fig. 9

5. Aplicaţie numerică

Cu următoarele date

$r_{0p} = 6{,}560.10^2$m.

$p = 6{,}495.10^2$m.

$\varepsilon = 0, 1.$

$\varphi_1 = 105°$
$\varphi_2 = 110°$
$\mu = 3{,}99.10^{14}\text{m}^3/\text{sec}^2$
$x_0 = 3{,}6.10^3\text{m}.$
$z_0 = 1{,}2.10^3$ m.
$y_0 = 1{,}0.10^3\text{m}.$
$V_{x0} = -80$ m/sec.
$V_{z0} = -25\text{m/sec}.$
$V_{y0} = -20$ m/sec.
$\tau = 86$ sec.,

s-au calculat cu ajutorul unui calculator electronic după teoria liniară componentele acceleraţiei datorită tracţiunii a_x, a_z, a_y înscrise cu linie plină în graficele din figurile 3, 4 şi 5 ca şi componentele acceleraţiei relative ale aparatului urmăritor a_{xr}, a_{zr}, a_{yr} înscrise în aceleaşi grafice cu linie punctată.

În ceea ce priveşte componentele acceleraţiei datorită tracţiunii în primă aproximaţie $a_x^{(1)}$, $a_z^{(1)}$ $a_y^{(1)}$ date de teoria neliniară, acestea diferă

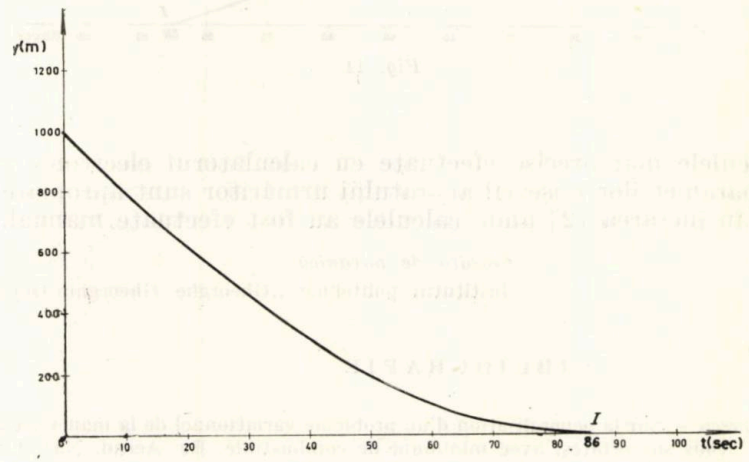


Fig. 10

foarte puţin de cele date de teoria liniară, astfel încît valorile lor n-au mai fost trecute în grafic. În baza aceleeaşi teorii liniare s-au calculat de asemenea componentele vitezei relative a aparatului urmăritor V_x, V_z, V_y ca şi coordonatele x, z, y ale acestuia înscrise în graficele din fig. 6 — 11.

6. Concluzii

Calculele numerice efectuate cu calculatorul electronic arată că pentru o durată relativ mică a combustiei componentele acceleraţiei dato-

rită tracţiunii au o variaţie liniară fiind apropiate ca valoare (cu excepţia componentei în direcţia Z) de componentele acceleraţiei relative fig. 3, 4, 5.

Componentele vitezei relative V_x, V_z, V_y, au deasemenea o variaţie aproape liniară în timp ce coordonatele aparatului urmăritor au o variaţie parabolică (fig. 6 — 11)

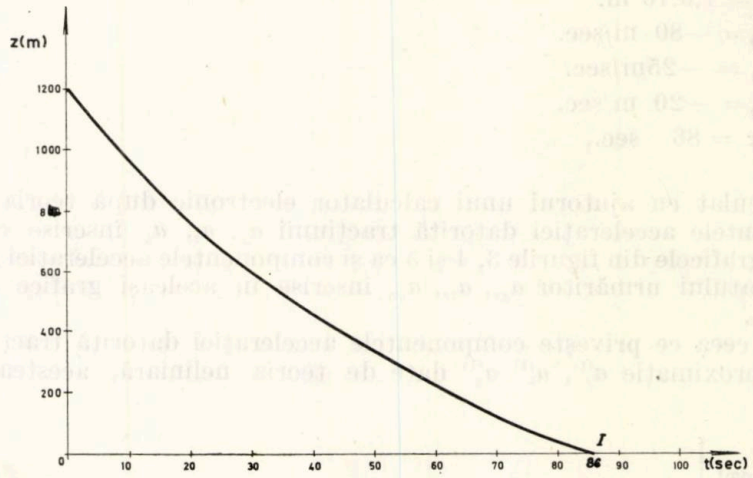


Fig. 11

Calculele mai precise efectuate cu calculatorul electronic arată că valorile parametrilor mişcării aparatului urmăritor sunt apropiate de cele obţinute în lucrarea [2] unde calculele au fost efectuate manual.

Catedra de mecanică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Marinescu* — Sur la generalisation d'un problème variationnel de la maneuvre de rendes-vous sur orbites, avec minimum de combustible. Rc. Accad. Naz. Lincei Serie VIII — XLV, 1 — 2, 1968.
2. *Al. Marinescu, L. Beiner* — On the Minimum Propellant Rendes-vous Maneuver on Elliptical Orbits. Astronautica Acta 15, 49 — 61 (1969).
3. *H. B. Billik*, Some Optimal Low-acceleration Rendez-vous Maneuvers, AIAA, Il 2,510—516 1964.
4. *Al. Marinescu, Şt. Staicu, V. Cardoş* — Neue Untersuchungen über das optimale Rendezvousmanöver von Raumfahrzeugen auf elliptischen Flugbahnen bei minimalem Treibstoffverbranch. Z. Flugwiss. 20(1972), Heft 4, Braunschweig.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIEI DE MAȘINI

C.Z.: 621

CONSIDERAȚII PRIVIND STAREA DE EFORTURI UNITARE ÎN CAZUL ASCHIERII METALELOR *

CONSTANTIN DUMITRAȘ

Multe lucrări de specialitate /1/, /2/, /3/, /4/, /5/, /6/ care tratează problema procesului de formare a așchiei arată că forma geometrică a zonei deformării plastice corespunde unui triunghi AOB (fig. 1) iar mări-

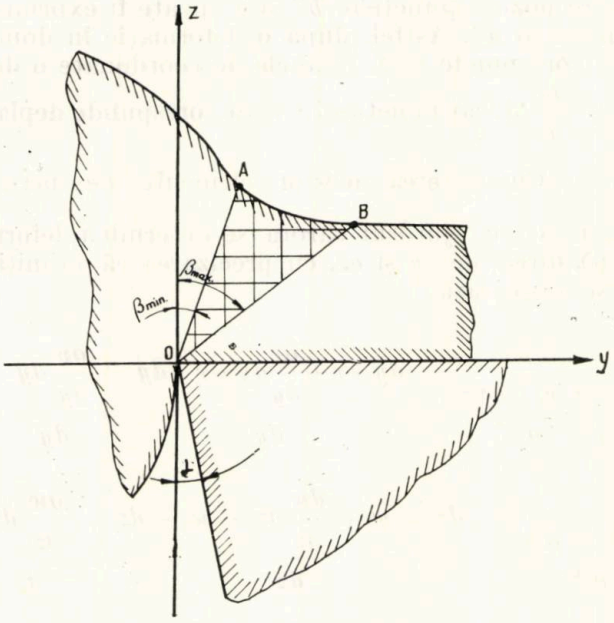


Fig. 1

mea unghiului AOB se obține prin diferența dintre unghiul principal de alunecare maxim (β_{max}) și cel minim (β_{min}) adică $\beta_{AOB} = \beta_{max} - \beta_{min}$ capătă valori între 20 și 30 grade pentru metalele tenace.

Datorită parametrilor geometriei care însoțesc partea activă a sculei, forța de așchiere acționează asupra stratului de metal așchiat, după

Manuscris predat redacției la data de 23 ctombrie 1972

o direcție oarecare în spațiu și crează în zona de deformare plastică AOB (fig. 1) o stare de eforturi unitare spațială de întindere după normală și tangentă la tăișul sculei și de compresiune după normala la suprafața de degajare.

Exprimarea ecuațiilor diferențiale de continuitate a procesului de deformare plastică în cazul așchierii, este posibil în condițiile admiterii că : deformarea plastică are loc în prezența stării de eforturi unitare spațiale iar legătura dintre eforturile de solicitare și deformare variază după curba caracteristică simplificată de solicitare a stratului așchiat, secțiunea transversală a așchiei capătă forma unui dreptunghi pentru $æ = 90°$, sau a unui paralelogram cînd $æ < 90°$, raportul dintre adîncimea de așchiere (t) și avansul de lucru (s) variază după relația : $20 < t/s < 4$, procesul de deformare are loc în condițiile de plasticitate stabilite de Mises, iar viteza variază după curbe politropice, temperatura așchiei rămîne constantă, iar forța de inerție și de frecare dintre așchie și sculă este neglijabilă.

Examinîndu-se proiecția $a'\ b'\ c'\ d'$ din planul yoz a suprafeței $abcd$ (fig. 2) care aparține paralelipipedului $abcda_1b_1c_1d_1$, se constată că după deformarea provocată de scula așchietoare proiecția $a'b'c'd'$ capătă forma $a''b''c''d''$ în care poziția punctelor b'' și c'' poate fi exprimată în funcție de aceia a punctului a''. Astfel, după o deformație în domeniul plastic, punctului b'' îi corespunde față de axele de coordonate o deplasare, $v + \frac{\partial v}{\partial z} dz$ și $w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$ iar punctului c' îi va corespunde deplasarea $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ și $w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$. Cunoașterea acestor elemente ne permite stabilirea ecuațiilor (1) și (3) cu ajutorul cărora se determină deformațiile liniare (ε_y) și (ε_z) după direcțiile oy și oz, cu precizarea că infiniții mici de ordin superior se neglijează.

$$\varepsilon_y = \frac{a''c'' - a'c'}{a'c'} = \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\varepsilon_z = \frac{a''b'' - a'b'}{a'b'} = \frac{dz + w + \frac{dw}{dz} dz - w - dz}{dz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial z} dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2}$$

În mod analog se stabilește și ecuația (3) care exprimă deformația liniară (ε_x) a volumului elementar dat, după direcția ox (fig. 2).

Ca atare se poate scrie :

$$\varepsilon_x = \frac{c_1''c'' - c_1'c'}{c_1'c'} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3}$$

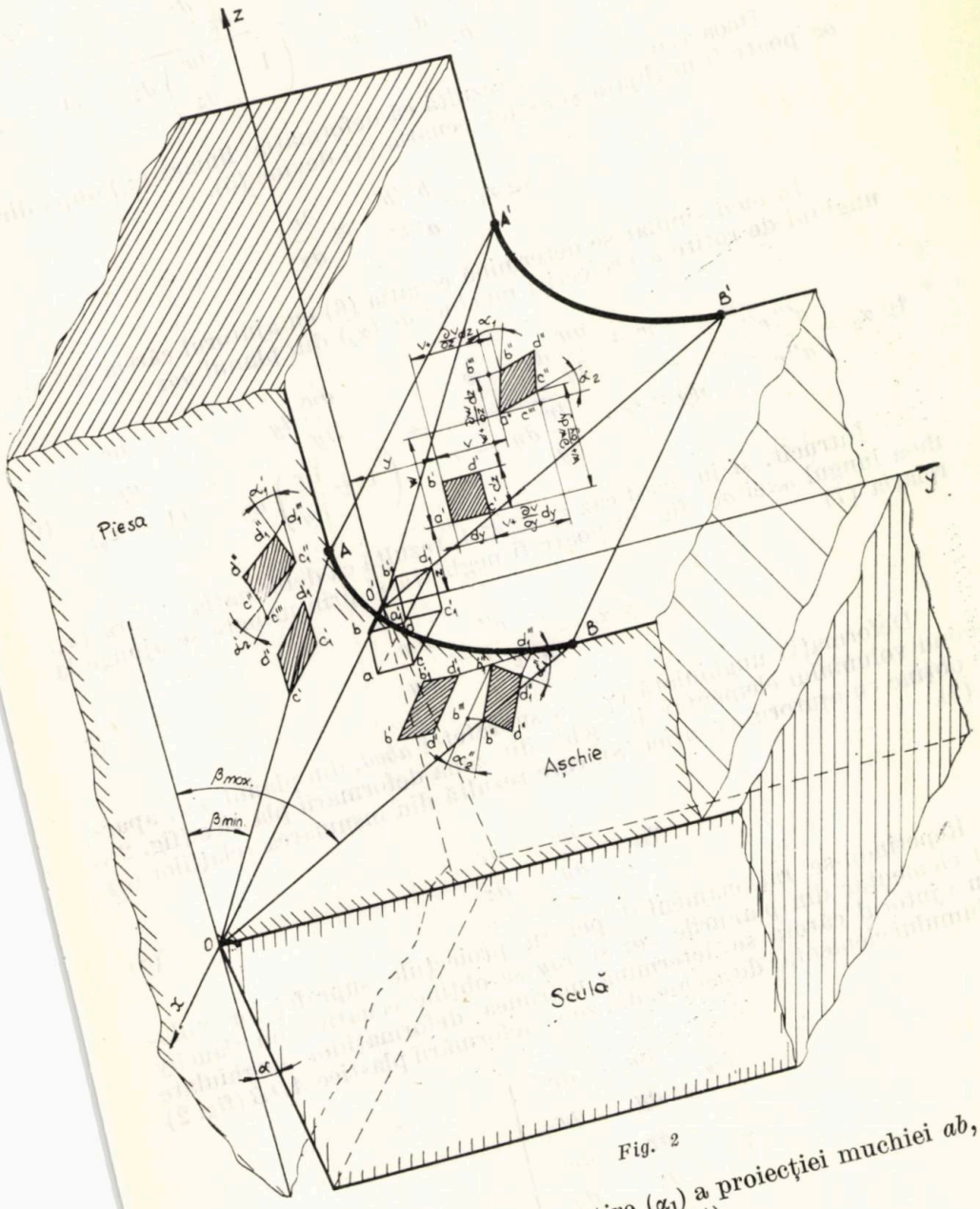


Fig. 2

Cît privește unghiul de rotire (α_1) a proiecției muchiei ab, din planul yoz (fig. 2) acesta rezultă din ecuația (4)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{b'''b''}{a''b'''} = \frac{v + \dfrac{\partial v}{\partial z}\,dz - v}{dz + w + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,dz - w} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}\,dz}{\left(1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)dz} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}}{(1 + \varepsilon_z)} \tag{4}$$

Deoarece $\varepsilon_z << 1$, rezultă că deformația liniară (ε_z) după direcția oz poate fi neglijată și astfel, ecuația (4) devine (5).

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{b'''b''}{a''b'''} \cong \frac{\partial v}{\partial z} \tag{5}$$

În mod similar se determină ecuația (6) cu ajutorul căreia se obține unghiul de rotire a proiecției muchiei ac (α_2) din planul yoz:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{c'''c''}{a''c'''} = \frac{w + \dfrac{\partial w}{\partial y}\,dy - w}{dy + v + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dy - v} = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial y}\,dy}{\left(1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dy} = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \varepsilon_y)} \tag{6}$$

Întrucît, și în acest caz $\varepsilon_y << 1$, rezultă că deformația liniară (ε_y) de-a lungul axei oy (fig. 2) poate fi neglijată și prin urmare se ajunge la relația (7)

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{c'''c''}{a''c'''} \cong \frac{\partial w}{\partial y} \tag{7}$$

Deformația unghiulară (γ_{yz}) a suprafeței $abcd$, din planul yoz, aparținînd volumului elementar de așchie din zona deformării plastice (fig. 2), se obține cu ajutorul ecuației (8), care rezultă din însumarea relațiilor (5) și (7).

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{8}$$

Repetîndu-se raționamentul pentru proiecțiile suprafețelor volumului elementar din planurile xoz și xoy se obține ecuațiile lui Cauchy (9), cu ajutorul cărora se determină mărimea deformațiilor unghiulare ale volumului elementar de așchie, din zona deformării plastice AOB (fig. 2)

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Literatura /7/, /8/ arată că prin derivarea parțială a ecuațiilor (9), de două ori în raport cu x; y și z se ajunge la expresiile (10) care exprimă legătura nemijlocită dintre deformațiile liniare (ε_x); (ε_y); (ε_z) și unghiulare (γ_{xy}); (γ_{xz}) și (γ_{zx}) și reprezintă totodată condiția ce trebuie satisfăcută de către ε_x; ε_y; ε_z; și γ_{xy}; γ_{yz}; γ_{zx} pentru a putea fi asigurată existența funcțiilor u, v și w în procesul așchierii metalelor.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^3 v}{\partial z^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\,\partial z} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Întrucît s-a demonstrat, că : $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ și $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$, rezultă că prin înlocuirea acestora în ecuațiile (10) se obțin relațiile (11).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Prin efectuarea integralelor asupra relațiilor (11) rezultă ecuațiile (12)

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \iint \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right] dx\,dy \\
\gamma_{yz} &= \iint \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \right] dy\,dz \\
\gamma_{zx} &= \iint \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \right] dz\,dx
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Literatura /7/ de specialitate arată că în cazul prelucrării prin deformare plastică la rece, condiție în care are loc și procesul de formare a elementului de așchie, în fiecare moment al deformării se constată că direcția deformării liniare principale coincide cu direcția de acțiune a efortului

principal de solicitare, cercul lui Mohr privind reprezentarea grafică de variație a eforturilor unitare de solicitare (σ) și (τ) este asemenea cu cercul lui Mohr referitor la reprezentarea grafică a variației deformației liniare (ε) și unghiulare (γ) iar volumul corpului deformat rămîne nemodificat ca mărime, pe toată durata procesului de deformare. De aici rezultă ecuațiile (13) :

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = 2G' \qquad (13)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

în care G' reprezintă modulul de plasticitate, transversal.

Din ecuațiile (13) rezultă (13')

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3G'}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3G'}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3G'}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

care reprezintă ecuațiile generalizate ale deformării liniare în domeniul plastic și sînt asemănătoare cu acelea a lui Hooke stabilite pentru deformările elastice.

Dacă se pleacă de la curba caracteristică simplificată din fig. 3, se constată că modulul de plasticitate longitudinal (D) reprezintă chiar panta

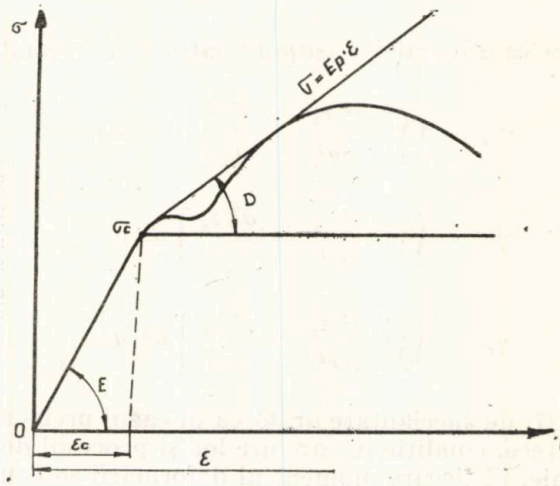


Fig. 3

curbei şi poate fi determinată pentru fiecare material prelucrat. Cunoscîndu-se ca între modulul transversal de plasticitate G' şi acela longitudinal există relaţia de legătură ; $D = 3G'$ atunci prin derivarea parţială a ecuaţiilor (13′) de două ori în raport cu x ; y şi z şi introducerea acestora în relaţiile (12) se obţin relaţiile (14) :

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{1}{D}\iint\left[\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)\right]dx\,dy\\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{D}\iint\left[\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right)\right]dy\,dz\\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{D}\iint\left[\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}\right)\right]dz\,dx
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Ecuaţiile (14) reprezintă pentru teoria aşchierii un interes deosebit, deoarece cu ajutorul acestora se poate stabili mărimea efortului unitar tangenţial pentru oricare punct material, aflat în zona deformării plastice AOB (fig. 2), întrucît în condiţiile existenţei unei proporţionalităţi între eforturile unitare de solicitare şi deformare, legătura dintre deformările unghiulare γ_{xy}; γ_{yz}; γ_{zx} şi eforturile unitare tangenţiale τ_{xy} ; τ_{yz} şi τ_{zx} poate fi exprimată cu ajutorul relaţiilor (15) :

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \frac{G}{D}\iint\left[\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)\right]dx\,dy\\
\tau_{yz} &= \frac{G}{D}\iint\left[\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right)\right]dy\,dz\\
\tau_{zx} &= \frac{G}{D}\iint\left[\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}\right)\right]dz\,dy
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Ecuaţiile (15) arată că eforturile unitare tangenţiale din zona deformării plastice a aşchiei AOB (fig. 1) variază după funcţii de gradul doi, fapt confirmat în parte, de rezultatele experimentale ale cercetărilor /9/, /10/, /11/.

După cum rezultă din cele arătate mai sus, cunoaşterea legăturii dintre deformaţia liniară (ε_x) ; (ε_y) ; (ε_z) a volumului elementar de aşchie, din zona deformării plastice (fig. 2) şi deformaţia unghiulară (γ_{xy}) ; (γ_{yz}) şi (γ_{zx}) a aceluiaşi volum elementar de aşchie, permite determinarea mărimii eforturilor unitare de forfecare τ_{xy} ; τ_{yz} şi τ_{zx} prin simpla măsurare a coeficientului de trasare a aşchiei după direcţiile x ; y ; z precum şi stabilirea legii de variaţie a acestora în funcţie de parametrii geometrici ai sculei, atunci cînd alegerea sistemului de coordonate ai sculei, se face de aşa manieră încît axa *ox* să fie normală la tăişul sculei şi conţinută în planul de degajare iar axa *oy* să fie tangentă la tăişul acesteia.

De asemenea, cunoașterea legăturii dintre cele două deformații menționate, permite efectuarea unor aprecieri mai raționale privind gradul de solicitare, a sistemului mașină-unealtă-piesă-sculă în funcție de proprietățile mecanice ale materialului prelucrat, care variază de regulă în raport cu regimul de așchiere și parametrii geometrici ai sculei.

Ecuațiile (15), permit calculul mărimii componentelor forței de așchiere atunci cînd se cunoaște mărimea coeficientului de tasare a așchiei, după trei direcții date și ține seama prin intermediul coeficientului de tasare de o serie de factori care influențează mărimea componentelor ca de exemplu : viteza de așchiere, parametrii geometrici ai sculei, proprietățile fizico-mecanice ale materialului sculei și piesei prelucrate, uzura sculei, temperatura și lichidul de răcire-ungere, etc. De asemenea, permit stabilirea mărimii componentelor cu o precizie mai mare, independent de factorii subiectivi, fapt ce va permite proiectantului de mașini unelte să dimensioneze mai rațional diversele elemente active ale acestora, iar tehnologului o exploatare mai eficientă, ceea ce face să se realizeze economii de metal și creșterea productivității muncii.

Catedra de tehnologia construcției de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *N. N. Zorev* Fragen der Mechanik und der Schneidprozess der Metalle (Russ) Maşchiz, Moscou, 1956.
2. *N. N. Zorev* Certein Repultp of Work in the Field of the Mechanics of the Metal Cutting Process. Conference on Technology of Engineering Manufactur (1958). Poper 54.
3. *D. G. Chritopherson W. B. Polmer P. L. B. Oxley* Orthogonal Cutting of a Workhardening Material. Ingineering, London, vol. 186 (1958) pp. 113 — 115.
4. *A. M. Rosenberg G. L. Konfarew* Bestimmung des plastischen. Verformungsgrades beim Spanen von Meşallen (Russ) Beirch dep Technologischen Institutes Tomak (1960)
5. *K. Okshima K. Hitomi* An Analysis of the Mechanism of Orthogonal Cutting and Its Application to Discontinuous Chip Formation. Transaction of the ASME vol. 83(1961) pp. 545 — 555.
6. *K. Hitomi* Fundamental Mechanahility Repearch in Japan. Transaction of the ASMF, vol. 83(1961) pp. 531 — 542.
7. *Storoschevl Popov* Grundlagen der Umformtechnik VEB Verlag Berlin 1968 pag. 93/98
8. *G. Stetiu* Tehnologia materialelor și ștanțării la rece I. P. Cluj 1969
9. *N. N. Zorev* Der Einfluss der Grundfoktaren auf den Span bildrungsprozes. Marz 1959 pag. 294 — 298
10. *H. Weber* Mechanik der Spanbildung 1968 T. H. Karl Marx-Stadt.
11. *C. Dumitraș* Contribuții cu privire la ecuațiile diferențiale pentru determinarea efortului unitar normal și tangențial din zona deformării plastice la așchierea metalelor Construcția de mașini nr. 11-1973 pag 646,649

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXXV — 1973. Numărul 6

MANAGEMENT

C.Z.: 65.012.4

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF THE PRODUCTION PROGRAMMING IN CERTAINTY AND UNCERTAINTY CONDITIONS III*

A. CARABULEA, GH. ANTON, GH. RUȘITORU

The production programming in certainly and uncertainly conditions implies the determination of the minimum expenses using the dynamic programming. The expenses may by written under the form;

$$(2-82) \qquad C^{d}_{ord} = \int_0^T f[x(t)]\,dt + c\int_0^T [P(t) - C(t) + S(0)]\,dt$$

where:

t = the production lauching period $(0 \ldots T)$
$f[x(t)]$ = the production expense function
$x(t)$ = the volume of the production launched.
$P(t)$ = the production performed
$C(t)$ = product requirement.
$S(o)$ = the stock at the initial moment
c = storage expenses.

The difference between the production $P(t)$ and the demand $C(t)$ represents the current stock at the considered moment.

The restrictions imposed for the solving of the oder problems in certainily conditions depend on the negativity of the values under the two intervals and besides the derivated of the first and second order of the function $f(x)$ which value had to be greater than zero.

The last restriction $[f'(x) < 0\,;\, f''(x) < 0]$ shows that the marginal expenses are positive.

The dynamic programming problems described by the relation (2 — 82) may be solved only if the optimum function of the production dynamics in time is determined.

To this end two methods may be applied i.e. one refers to the transformation of the integrals from (2 — 82) in sums applied on months or quarters. It is thus obtained a clasic problem of minimalization of the expenses expressed by a function of (n) variables, which can be solved by a differentual calculus. The second method consists of the direct solving of the dynamic programming problem by the variational calculus.

* Manuscript received 17 Iunie 1971.

One of the basic problem of the variational calculus consists in finding the function $P(t)$ of which integral has the form :

$$(2-83) \qquad I = \int_a^b F\,[P(t)\,;\,P'(t),t]\,dt = \text{minimum}$$

The function (F) under the integral has a special character, because it depends on $P(t)$ on its duration as well as of the time variable (t). Any integral of the form (2 — 83) is functional because its numeric value depends on the function under the integral. The extreme of this function is determined giving the function $P(t)$ a variation $\delta P(t)$.The function has an extreme only if $\delta P(t)=0$ which shows that the given variation does not modify the integral value. In these conditions the relation (2 — 83) may be written as follows :

$$(2-84) \qquad I + \delta I = \int_a^b F\ (P(t) + \delta P(r)\,;\ P'(t) + \delta P'(t)\,;\ t]\ dt$$

The variation (δI) of the integral can be written :

$$(2-85) \quad \delta I = \int_b^a \left[\frac{\partial F}{\partial p}\,\delta P(t) + \frac{\partial F}{\partial p}\,\delta P'\ (t)\right] dt = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial p}\,\delta\,(t)\,\mathrm{d}\,t +$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial F}{\partial p'}\,\delta\,p'\,(t)\ dt$$

Applying to the last integral the formula of integration through parts it is obtained :

$$(2-86) \qquad \delta\,I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial p}\,\delta P(t)\,dt - \frac{d}{dF}\cdot\frac{\partial F}{\partial P'}\,\delta P(t)\right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial p}\,\delta P(t)\right]_a^b$$

It may be considered that the last part in the relation (2 — 86) is zero because in the points ($t = a$) and ($t = b$) the function $P(t)$ is not modified. Putting the extreme condition the relation (2 — 86) takes the form ;

$$(2-87) \qquad \delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial P} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial P'}\right] \delta P\,(t)\,dt = 0$$

The expresion under the integral between brackets is a differential equation of Eulers' type which resolution gives the production function

$P(t)$. Taking into account the values intervening in the relation (2.82 — — 87) the Euler's differential equation may be written :

$$(2-88) \qquad c - \frac{d}{dt} f' [P'(t)] = 0 \text{ or } \qquad c = \frac{d}{dt} f'[P'(t)] = f'' [P(t)]P''(t)$$

The economic sens of the relation (2 — 88) comes off the fact that the derivate of $[P(t)]$ indicated the marginal production expenses, and the second derivate of the function $f(P(t)]$ indicated the storage expenses (c).

If the increase marginal expenses induced the production volum modification is less than (c) then the production modification is more economical.

When (c) is smaller than the marginal expenses caused by the production modification it is more profitable to store the exceeding.

To an optimum production programm condition (2 — 88) should be observed. The observing of this condition implies the total minimum expenses included in the relation (2—82) structure. This fact can be demonstrated also by the determining of the second variation of operation (2 — 82) using the variational calculus methods.

If the function $f[x(t)]$ under the integral (2 — 82) is a second order polynom, the derivate of the function $P(t)$ is linear and increasing and the production volume can be represented by discrete straight lines. If the function $f(x)$ is a third order polinim the integral of the production function derivate is a logarithmic curve. In this case the production plan can be represented by an horizontal line. The modification of the production volume is this case does not lead to savings but to material and pecuniary losses. If the part programmed to be executed can be obtained also from other factories in the country, the production program may be represented by a geometric place with a continuous character.

The production dynamic programming in uncertainly conditions implies the study of the mathematic appearance of the total expenses written under the form ;

$$(2-89) \qquad C_{ord}^{pr} = \int_0^T f\,[x(t)\,P[c(t)]\,dc(t) +$$

$$+ C_1 \int_{-\infty}^{P(t)+S(0)} [P(t) - C(t) + S(0)]\,P[c(t)]\,dc(t) +$$

$$+ C_2 \int_{P(t)+S(0)}^{+\infty} [C(t) - P(t) - S(0)]\,P[c(t)]\,dc(t)$$

where :

C_1 = the specific expenses (in the unit of time) for the products storage,

C_2 = the specific expenses for the stock lack $Pc(t)$ = demand probability.

The ecuations function study (2—89) aims to determine a production programme $P(t)$ so as the probabilist mathematic model to present minimum extreme. In this case the methods of the variational calculus are applied and the minimum value of the functional (2 — 89) is found if the Euler's integral under the integral (2 — 87) is equal to zero.

This last condition is written;

$$(2-90) \qquad \frac{\partial F}{\partial P} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial P'} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial P'} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial P'}$$

Taking into account the function (F) signification the Euler's equation can be represented :

$$(2-91) \qquad \frac{d}{dt} f' [x(t)] = C_1 \int_{-\infty}^{P(t) - S(0)} P[c(t)]dc(t) - C_2 \int_{P(t) + S(0)}^{+\infty} P[C(t)]\, dc(t)$$

Solving the integrals in the relation (2 — 91) the risk optimum coefficient is obtained under the form (2 — 92);

$$(2-92) \qquad P_r[P(t) + S(0)] = \frac{C_1 - V_1}{C_1 - C_2} = \frac{C_1 - \frac{d}{dt} F'[x(t)]}{C_1 + C_2}$$

The existence of the derivate (V) in the relation (2 — 92) leads to the levelling of the production development and thus enables the stock forming. The demand fluctation can be more economically covered through the modification of the stockes than by that of the production structure modification.

In order to study the probability function, in the relation (2 — 89) it is supposed that the aleatory variable of the demand has an arbitrary repartition, and the demand probability repartition is found by studying the characteristic functions of which structure includes the integration of an exponential function. If the characteristic function of the aleatory variable is known we may calculate the probability repartition of this variable by Fourier's transformation.

The considerations on the production function will allow a larger investigation within the production order, by the application of the dynamic programming. This supposes the presentation of the mathematic models of the operating planning having in view, the priority conditions, the noninterferrence of the products and the observance of the fabrication duration which has been planned, especially by using the successive method of parts machining.

To show the way the above underlined aspects are introduced in computations the mathematic models of the order should be presented taking into account the efficiency function as well as the technologic and functional restrictions of equality and inequality type claimed by the succesion theory.

The production function may be written as follows :

$$(2-93)\quad F(x(t)] = \int_0^T f[x(t)]\,dt \simeq C_{ord}\,(t_p + t_r + t_{mt} + t_n)\ \text{(lei/year)}$$

where :

C_{ord} = the ordering specific expenses

t_p = processing time ;

t_r = adjustment time

t_n = unproductive time

t_{pnt} = manipulation and transport time plus the operation control time.

Taking into account the production ordering algorithms presented by Johnson, Fulskersen, Nemete, a. c., it can be represented the structure of a general algorithm which may be applied by particularization to the serial production planning.

The mathematic programming with logic conditions to construct a model of the production ordering has the form :

$$\text{a)}\quad F(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j\,x_j = \min\,;\quad (d_j = \text{real numbers}$$

$$(2-94)\ \text{b)}\quad X = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)\,;$$

$$\text{c)}\quad A(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_i\,j \cdot x_j - a_j) \geqslant 0\,;\ i = (1, 2, \ldots n)\ j = (1, \ldots n)$$

$$\text{d)}\quad B_k(x) = \sum_{j \in n}^{n} (b_{kj} \cdot x_j - b_k) \geqslant 0;\ (k = 1, 2, \ldots n)$$

$$\text{e)}\quad C_k(x) = \sum_{j \in n} (C_{kj} \cdot x_j - C_k) > 0\,;\ (k = 1, 2, \ldots n)$$

$$\text{f)}\quad x_j > 0\,; \qquad j = (1, 2, \ldots . n)$$

This general model is composed of the objective function (2 — 94) a) and the restrictions (2 — 94 b.c.d.e.f.) The resolution of such models is obtained using in a fisrt idea the relation (2 — 94 a) and the restriction

conditions (2 — 94 b, c, d, e.f.) If the other types of restriction are taken into account the difficulty degree of the problem resolution increases, because a series of relative minimum on the considered system subsets are searched and thus the calculus volume raises considerably.

The serial production ordering may be effected with or without buffer stocks. When such stocks exist the mathematic model of the production function may be written;

$$\text{a) } F(x) = \sum_{i \in N} C_j S_j = \min \; ; \quad C_j \geqslant 0; N = (1 \ldots n)$$

$$\text{b) } t_i^e \geqslant 0 \; ; \quad S_i > 0 \; ; \; (i \in N)$$

$$(2-95)\ \text{c) } (t_j^e - t_i^e) \geqslant (t_i^r + t_r^p)\ V\ (t_i^e - t_j^e) < (t_j^r + t_j^p) \; ; \; (i,j \in I)$$

$$\text{d) } (t_j^e - t_i^e) \geqslant t_i^{r+p} - \sum_{i \in N_K} (t_j^r + t_j^p) \; ; \quad N_K \in N; (ij) \in J)$$

$$\text{e) } (S_i\ t_j^p + t_j^e - t_i^e) \geqslant (t_i^r + t_r^p + t_i^{mt} - t_j^r)\ V\ (S_j \geqslant 1) \; ; \; (ij) \in N).$$

where:

C_j the ordering cost,

S_j = the machined stock to be processed;

$t_i^e = t_j^e$ = the starting moment of machine operation (i) (j) respectively;

N = the operation set that has to be carried out;

t_i^{r+p} = machine adjusting time (t_i^r) plus the proper operation processing $M = (1 \ldots m)$ the machine types set;

N_k = the operation sets which has to be carried out on the machine of the type (N) = the operation pairs set between which succesion technologic relations exist;

t_i^{mt} = transport and control time of the processed parts;

J = the operation pairs set which are carried out on the same machine;

I = the operation pairs set which are considered with respect to operating period of the a machine.

The restrictions (2 — 95 b, 95, c. 95 d, 95 e) have in the given order the following significations;

— the first relation renders the initial conditions or the non-negativity restrictions.

— the second relation indicated the condition of the processing period of the operations set.

— the third relation indicated the noninterference ce condition.

— the fourth relation shows the structure of the succession technological restrictions the continuity of operations processing respectively function of the buffer stock volume.

The mathematic model (2 — 95) can be solved through the „Branch and Bound" method. When more equipments of the same kind are present the period restrictions are modified in the sense that the last term on the right-hand acquires another structure, which should be also reflected in the economic function under optimization.

In this case the number of variants are increasing function of the operations set which are carried out on various types of machines. If it is not taken into account the buffer stock, then the mathematic model of the serial production ordering when each machine in the shop is of an other type it may be written :

$$(2-96)\ \text{a)}\ F(x) = \int_0^T f(x(t)] = \min.$$

$$\text{b)}\ (t_j^e - t_i^e) \geqslant tij\,;\ (ij) \in N$$

$$\text{c)}\ [t_j^e - t_i^e) \geqslant t_i]\ V\ (t_i^e - t_j^e \geqslant t_j)\,;\ (ij) \in J$$

$$\text{d)}\ (t_j^e - t_i^e) \geqslant t_i - T_P\,;\ (ij) \in J$$

$$\text{e)}\ T_P \geqslant (t_i^e - t_j^e) = \min.$$

$$\text{f)}\ x_i \geqslant x_j \geqslant 0\,;\ (ij) \in N$$

where :

t_i ; t_j = the execution periods of the operations (i) (j) respectively

The mathematic models of the ordering (2 — 95 — 96) may be solved by the methods applied for the optimum potential problems. As the production ordering algorithm implies the use of a heavy duty computers, and in some less complex situations, to great accuracy is not requested in carring out certain some activities, the production programming problem can be solved using aproximation methods for the mathematic models resolution.

An approximative method of solving the fabrication ordering is the succesive setting method (MAS) which can be applied in problem with (200 — 400) operations. This method makes possible the drawing up of the fabrication program for each machine having in view the technologic ordering of the operations and the operation starting time, with graph type formulas. Thus it is established the reference points processing duration and machine operating periods loading of each machine in the technologic line being afterwards calculated.

This method enables to develop each machine processing programme taking into account the operations technological order and of processing

starting times using the graphs. Thus, the parts processing duration is established further computing each machine loading in the technological line.

The MAS method supposes the existence of one or more technologic predecessor respective-technologic successors. Each computing stage of the MAS method includes two steps. In the first step the operations row is determined and in the second one are programmed one by one the row term so that the down-times to be minimum, and the machine running duration to be continuous. The computers use in resolving the mathematic models of the ordering allows the practical utilisation of fabrication planning of matrix calculus by which the processing groups can be replaced the fabrication technology can be changed and the optimum solution can be established without difficulties.

The esential problems appearing when putting in practice the fabrication ordering algorithm refers to.

The accidental or planned interruptions intermissions in production are considered by a series of restrictions added to the general model.

— The determination of the parts execution times is made using either determinist or probabilist models of PERT-TIME

Shifts activity on coordination should be carried out so as the following shift should finish the uncompleated processes.

Machines trouble shooting plan may be taken into account when developing the ordering mathematic model, considering each repair of a machine as an operation to which are put the conditions of starting and finishing of the distribution operations.

— The calculus of the optimum lot, the operations merging and the rational informational flux, claims for a work economy which can be reflected in the initial model by the assigning it a new restrictions.

— The knowledge of the achievements with respect as to the production norms, the mean test of each type of machine and the number of operations which are composing the processing program.

The amortization and general expenses can be written in the form;

$$(2-96)\quad C_{AM+G} = p_G\, C_t^{d(pr)} + p_a\, I_t^{d(pr)} \text{ lei/year.}$$

The man power expenses have the following structure:

$$(2-97)\quad C_{FM}^{d} = X_h \cdot h_{\text{med}} \cdot S_{\text{med}}$$

$$(2-98)\quad C_{FM}^{pr} = \sum_{1}^{e} S_m \sum_{g} \sum_{b} n_{gb} X_{gb} \ (1 - p_m)$$

where :

p_a = the redemption quato ;

p_G = the percentile from the total expense

X_h = the whole number of staff ;

hm = working hours number ;

S_m = mean wages ;

n_{gb} = working norms of the section (g) and worker's category(b) :

X_{gb} = number of workers that are executing a volum of work.

$(1-p_m)$ = probability of dininution of the emplayees number, taking into account the work productivity.

Due to the great amount of informations requested by such an algorithm, the use of digital computers is necessary for collecting, storing, processing and transmitting the data to the central selection and decision point. On this data basis are drawn the ordering network graphs which can serve in practice for the production process control.

2.2. *The general determinist and probabilist mathematic model of the programming.*

The general algorithm of the operative planning in production, contains the general mathematic model and the specialized logic diagram intended for the activity optimization in the organization. The general mathematic model refers to the production total expenses and contains models and fields resulted from the application of the stock theory, waiting theory, ordering theory, wear and reliability theory, the theory of the decisions and expenses lagged — in the time which appear when the optimum solution is selected from several variants of execution of an industrial objective.

The general mathematic model of the expenses of an organization of which total mininmum is located in the restrictions area leads to the optimum solution, has the form ;

$$(2-99) \qquad Z_t^e = C_r^e + p_n I_r^e = Z_t\left(1 + \frac{V}{V_0}\right) = Z_t + Z_e = \min.$$

The restrictions refers t0 the variation limits of the quantities in the mathematical model (2 — 99). These variations are contained within the minimum and maximum values of the variables intervening in each considered domain.

In the mathematical model (2 — 99) are intervening the following values.

V_0 = the production volume in the basic variant.

V = the production volume in the other variant of calculus.

C_r^e = the equivalent reported expenses (lei/year)

I_r^e = the equivalent reported investments (lei)

The expenses (C_r^e) and the investments (I_r^e) can be determined by some relation of the form:

$$C_r^e = \frac{p_n \sum_1^{t_c} C_i (1 + p_n)^{(t_c - i)}}{(1 + p_n)^{t_c - i}} + C_e \tag{2-100}$$

$$I_r^e = \left[\sum_1^{t_c} I_i (1 + p_n)^{t_c - i} + I_e - V_n \right]$$

where:

$p_n = \frac{1}{t_{rn}}$ = the economic efficiency coefficient

C_i and I_i = represent the expenses, respectivelly the investments from the report year (i)

t_{rn} = the normalized recuperation term

t_c = the lagging duration of the expenses of the investments respectivelly.

V_n = the netto income brought by the installation partially entered into operation.

The general determinist and probabilist mathematical models may be written starting from the relations (2 — 1 — 100) to obtain:

a) The mathematic model with determinist structure:

$$Z_t^d = [E_c p_c^e + C_c p_c^e) + C_m p_c^m + C_{ad}^t] + h_f \left[C_1 \frac{\lambda}{\mu} + C_2 \left(n_s - \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] + \tag{2-101}$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{n} C_{ai} + \sum_{k=1}^{v'} \sum_{j=1}^{n'} C_{kj} + C_{SF} \right] + \left[\sum_{v=1}^{0} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{p'} t_{vijk} X_{vijk} C_{vijk} \right] +$$

$$+ [Y_h \cdot h_{\text{med}} \cdot S_{\text{med}}] + [p_e C_t^i + p_a I_t^i + p_n I_r^e + C_e] = \text{minimum}$$

b) The mathematic model with probabilist structure:

$$Z_t^{pr} = [(E_c p_c^e + C_c p_c^e)(1 - p f)] + \left[\left(t_c C_s \sum_{c=1}^{s} S - 0{,}5c \right) p(c) \right] + \tag{2-102}$$

$$+ \left[\frac{1}{2} C_2 S^2 \left(t \sum_{c>s}^{\infty} \frac{p(c)}{c} + \sum_{c>s}^{\infty} \frac{(c - S)^2}{2c} p(c) t_c p \right) \right] +$$

$$+ \left[p_1 \sum_{n=S+1}^{m} (n - S) p(c) + p_a \sum_{v=1}^{n} (S - n) p(c) \right] +$$

$$+\left[\sum_{v=1}^{0}\sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{n'}\sum_{k=1}^{p} t_{vijk}^{pr}\, X_{vijk}^{cvijk}\right]+\left[\sum_{f=1}^{p} mf\,(C_f+C_f')+C_{av}\right]$$

$$[1-pf]+\left[\sum_{a=1}^{0} S_a \sum_{g=1}^{e}\sum_{b=1}^{d} n_{gb}\, x_{gb}\,(1-p_m)\right]+\left[p_g C_i^i+C_e+\right.$$

$$\left.+p_a\, I_i^i\right]+\left[p_n\left(\sum_{i=1}^{t_c} I_i\right)(1+p_n)^{t_c-i}+I_e-V_n p_r\right]=\text{minimum}$$

where (p_m) is the probability of staff movement due to the introduction of the new technique and of the work productivity increase and $p_r=$ probability of achieving the net income (V_n).

The logic diagram to solve the mathematical models (2 — 101 — — 102) is given in Fig. 1. In the diagram appear the following calculus areas.

In the first area through the cycling operators (F = 0) are calculated the expenses caused by the stock theory by the application of the determinist methods. Then by the replacing the operator (F) the probabilist expenses are calculated function of the probabilities values which make possible the apparition of the events at the input and output of the resources in the stock. The calculus is made in the hypothesis $(C_p = 0)$ and are obtained the values $(C_{ST\,1(-4)}^{pr})$ and $(c^p = 0)$ and the expenses $(C_{ST(1-4)}^{pr2})$.

In the second area the waiting expenses are determined applying the determinist models (C_A^d) by the cycling operation (A) and the probabilist models $(C_{A_{1-4}}^{pr})$ function of the laws that are governing the arrivals and leavings of the units in the considered system.

In the third area are calculated the wear and reliability expenses using the cycling operator (F).

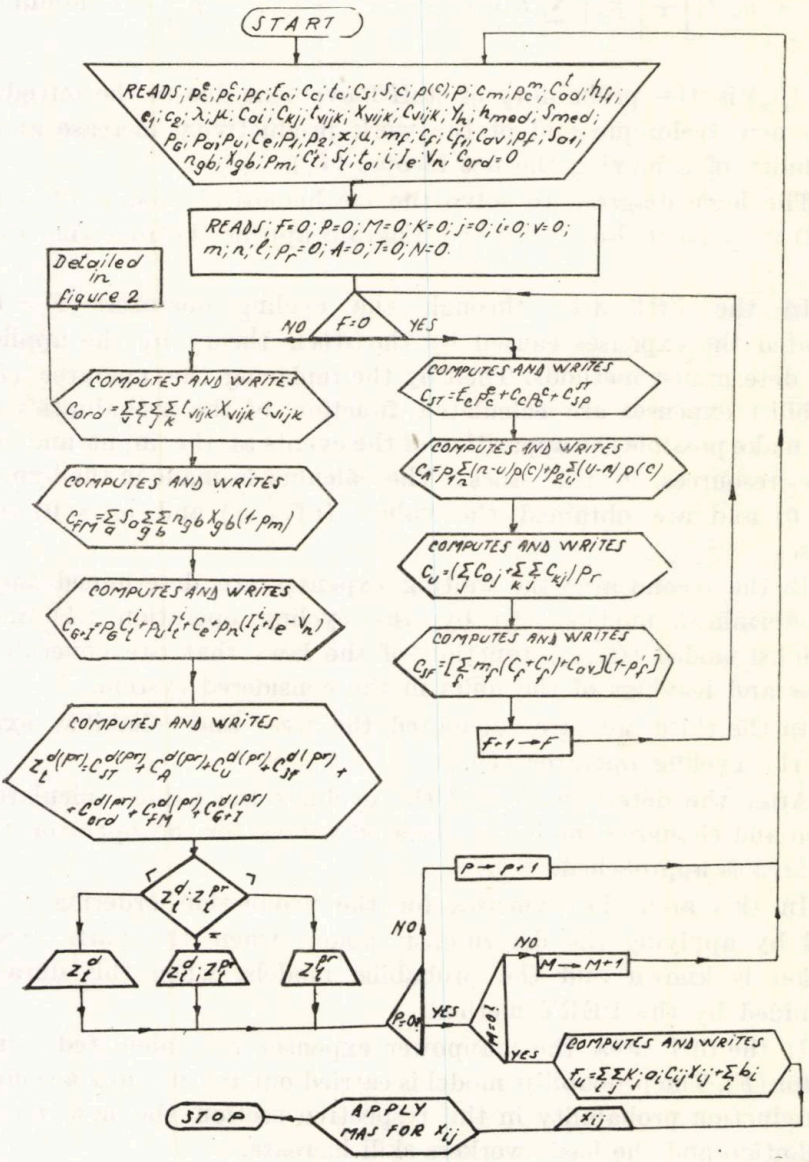
After the determination of the cyclings the values calculated are written and changing the initial declared values for the operator (F) the forth area is approached.

In this area the expenses for the production ordering are estimated by applying the determinist models when the parts execution duration is known and the probabilis models, when this duration is determined by the PERT method.

In the fifth area the manpower expenses are calculated using the operator (F). The probabilist model is carried out taking into account the staff reduction probability in the respective section the new technique contribution and the basic workers skill increase.

The sixth area allows the calculus of the general determi nist (C_{G+3}) and probabilist (C_{G+I}) expenses. The income of the installation which has partially started to work before the conclusion of the industrial objective designed is ($V_n\, p_r$).

LOGICAL DIAGRAM FOR THE STUDY OF OPERATIVE PLANNING IN SERIES-PRODUCTION MANUFACTURE



The last area enables the determination of the total expenses (Z_i^{id}) and (Z_i^{pr}) as well as the comparison of the calculated values to select the optimum variant leading to minimum expenses.

After the cycling conclusion the computer is transfered on the STOP position.

The algorithm which has been conceived contains the general mathematic models (2 — 101 — 102) and the logic diagram from the Fig. 1, and allows the use of the digital computers for the design and execution study of the industrial objectives for machine serial production.

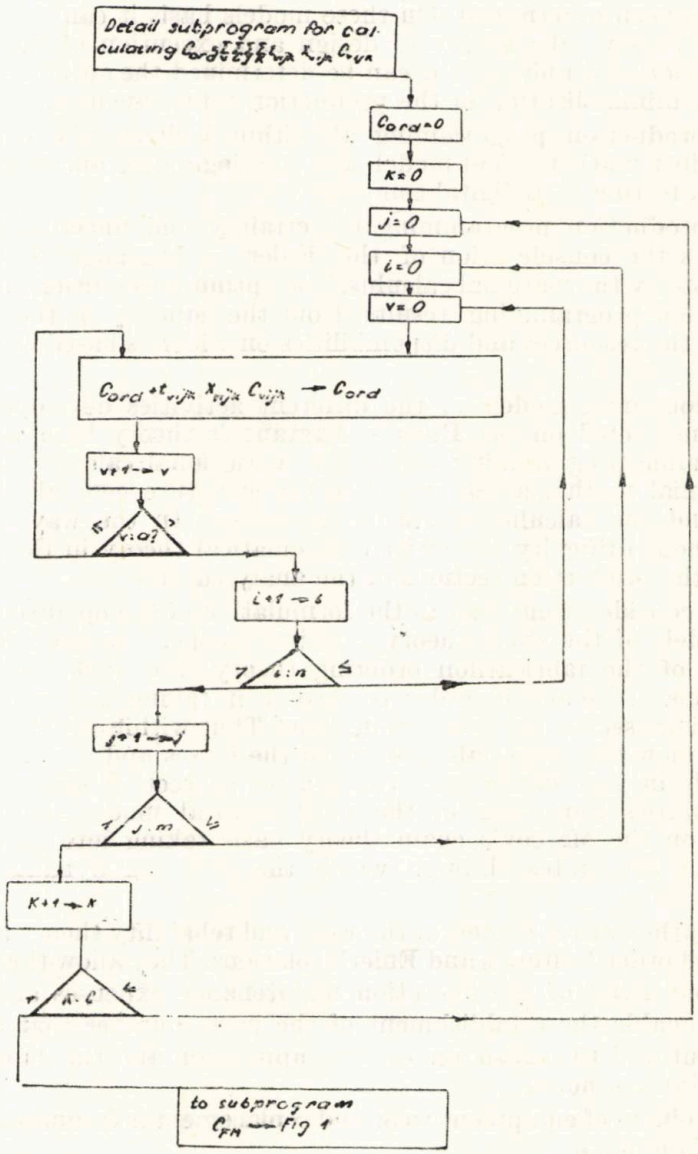


Fig. 2

3. Conslusions

The incursions made in the production programming mathematical theory in certainly and uncertainly conditions allowed the emphasizing of the production expenses determinist and probabilist models structure, taking into account the stock theory, waiting theory, wear and reliability theory of equipment and tehnologic lines, production ordering theory, man power theory and the lagged investments general theory. Thus domenial and general models have been built and the restrictions categories that are considered in the application of the production optimization models have been determined. On these models basis it can be conceived and calculated several variants of design and execution of the machine building section and units and it can be determined the optimum solution through the minimalization of the production total expenses.

The production programming algorithm includes the determinist and probabilist mathematical model and the logic diagram necessary for the program testing on a digital computer.

The production programming in certainly and uncertainly conditions implies the consideration of the Euler — Lagrange 's functions which operate by the marginal calculus. The optimum condition concerning the fabrication programming results from the equality of the marginal increases of the resources and disponibilities on which is based the production unit.

The domainial models of the different activities developed in the unit are constructed on the Euler — Lagrange's theory basis as well as on the dynamic programming and of the variational calculus basis. For each domainial mathematical model it the structure general relation is indicated and the calculus operative expression. In the way it can be applied without difficulty the strict mathematical theory in the practical activity of the production sections of the analysed unit.

These considerations lead to the formulation of the operative mathematical models of the stock theory, waiting theory, wear and reliability theory and of the fabricatilon ordering theory. For each model strict considerations are made in order to resolve it taking into account the restrictions imposed by the production plans. Thus within the stock theory we have in view the materials reserve in the stores and are coordinated the demands in accordance with the centres at section and unit level. The probabilities appearing in the mathematical model structure are established on the Marcov's chain theory basis taking into account the succession of the states through which the analysed dynamic system passes.

The mathematical models of the wear and reliability theory are based on the second order Voltera's and Enler's relations. They allow the determination on one hand of the operation maintenance expenses and on the other hand enable the establishment of the parts number that are aleatory worn out and the mean age of wear apparition and the damage rate using the Gauss's hood.

The problem of equipment wear and replacement is formulated on the Bellman's functional.

The reliability theory uses the Marcov's chains to define the transfer matrices from one state of the system to the other, the Carson. Laplace's transformation and Howard's algorithm to determine the equipment optimum operational strategy.

The variational calculus and Euler's equations enable the establishment of the mathematical aspects which are forming the mathematical model structure of the fabrication ordering.

For each situation characteristic to the serial production (with or without buffer stocks) a complete mathematical model is given where both the scope function and the restriction relations of the fabrication succession, the unterferrence and the innegativity conditions are appearing.

On these strict considerations basis are constructed the determinist and probabilist mathematical models for the production total expenses.

4. Example of calculus

For the determination of the optimum variant to which the calculus expense (Z_t^{pr}) have a minimum value is presented a testing example of the algorithm conceived for a digital computer. The computers refer only to a section including ten machines processing ten types of parts ($x_1 \ldots x_{10}$) and which is written:

$$(4-1)\ C_{ST}^{pr} = \left[(p_c^e E_c + C_e P_e^s)\ (1 - pf) + t_c \sum_{C=0}^{S} (S - 0{,}5\ c) p(c) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ C_s S^2 \sum_{C>0}^{\infty} \frac{p(c)}{c} \right] \text{lei year}$$

For the storage expenses calculus are considered $E_c = P_{it}$ the consumed electric energy $P_f\ 0.8$ = the operation probability, $C_s = 1000$ lei, t_c = operation duration in three shifts during a year, $a = (1 - 5)\ p(c)$ $C = (0.1 + 3)$; $c_p = 0$; p_c^s = the electric power consumed by the section receivers, considering the simultaneity factor for lamps $= 0.9$ and for motors $= 0.6$, p_c^e = cost price of the fuel consumed, it results;

$$C_{ST}^{pr} = 29.000 \text{ lei/yera.}$$

$$(4-2)\ C_A^{pr} = \left[p_1 \sum_{n=U+1}^{M} (n - S)\, p(c) + p_2 \sum_{n=1}^{u} (S - n)\ p(c) \right] \text{lei/year.}$$

For the calculus of the waiting expenses taking into account the practical experience is considered; $n = 100$, $u = 10$, $p_1 = 500$ lei, $p_2 = 1000$ lei, $p(c) = 0.2$ and the time for which is made the calculus is one year 8760 hours respectively.

$$(4-3) \qquad C_A^{pr} = S_0 p(c)\ (p_2 - p_1) = 9000 \text{ lei/year.}$$

weher: $S_0 = 90$; $p\ (c) = 0{,}2$; $(p_2 - p_1) = 50\ 0$;

The calculus of the expenses for parts and equipement reliability and wear is based in the relation :

$$(4-4)\quad C^{pr}_{U+SF} = \left[\sum_{f=1}^{P} n_f\,(cf + c'f) + C_{av}\right]\left[1 - pf\right] \text{ lei/year}$$

The spare parts are kapt in reserve in order to satisfy an aleatory demand. If a spare part costs about 1000 lei when purchased in normal conditions, then the production of the same parts in exceptional speed conditions claims 2000 lei/piece, due to the supplimentary expenses for control and transport in special conditions, Because of the part lacking in the stock the production loss through the installation down-time can be appreciated at 25,000 lei. It is evident that of for a number of (1 — 5) damages par year on a probability of the damage apparition of (0.5 — 0.01) and for the case of the leeping in stock of (0 — 3) spare parts, it is necessary an expense calculus, showing which is the most advantageous variant, with or without the parts in the stock.

$$(4-5)\qquad F^{(pr)}_{(z)} = \sum_{1}^{n}{}' F(z_k)\,P_z \quad \text{lei/year.}$$

By the application of the efficiency function (4 — 5) the data given in table below are resulting :

Table 4

Strategy	Spare parts	Number of damages and their probability				C_{u+SF} lei/year
		0	1	2	3	
		0.62	0.2	0.01	0.05	
1	0	0	27.000	82.500	135.000	10970
2	1	1000	1.000	55.000	109.000	4660
3	3	3000	3.000	3.000	54.000	3150

$F(1) = 0.0{,}62 + 27.10^3.0{,}2 + 82{,}5.10\ 0{,}05 + 135.10^3.0{,}01 = 10.970.10^3$ lei/year.

$F(2) = 10^3.0{,}62 + 10^3.0{,}2 + 55.10^3\ 0.05 + 109.10^3.0.01 = 4660$ lei/year.

$F(3)\ \ 3.10^3.0{,}62 + 3.10^3.0{,}2 + 3.10^3\ .0{,}05 + 54.1^3.0{,}001 = 3150$ lei/year.

In the first strategy, the expenses for a trouble shooting when no parts are available in the stock consist of the expenses for the undelivered production (25.10^3 lei) plus the cost of parts purchased in special conditions (2000 lei).

In the second strategy when three damahes are taling place (2 × × 25,000) it is added because at the damage for which parts in stock have been provided the minimum loss is 1000 lei.

To the 50,000 lei undelivered production in the two damages 2 × ×2000 = 4000 the cost of the parts purchased in exceptional conditions

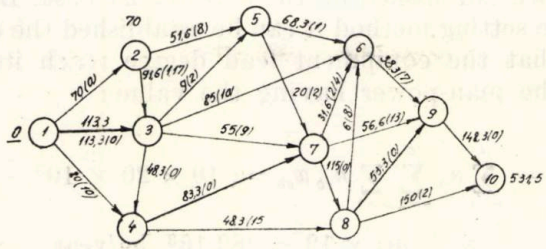


Fig. 3

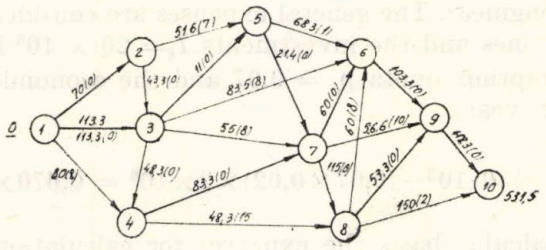


Fig. 4

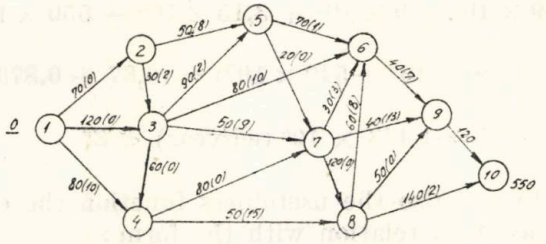


Fig. 5

plus 100 the cost of the part in stock. The same apples in the third strategy case.

Production ordering expenses are calculated with the relation :

$$(4-6)\quad C_{ord} = \sum_{v=1}^{0} \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{p'} tvijk\ Xvijk\ Cvijk\ (\text{lei/year}) = 550 \cdot 10^3\ (\text{lei/year})$$

To determine the ten products execution duration the graphs in figures 3, 4, 5 have been drawn up which show that each product can be

executed on probabilist durations contained between (531,5 — 550) hours/product, and this leads to a time of (5315 — 5500) hour/year. Considering the mean processing cost = 100 it result $C_{ord} = 550 \times 10^3$ lei/year.

In the graphs in Fig. (3) and (4) the durations are calculated with the probabilist relations used in the PERT method and in the graph (5) the durations are established on the determinist base. By the application of the succesive setting method it can be established the order of the parts hunching so that the equipment load degree reach its maximum. For expenses for the man-power having the value:

$$(4-7) \qquad C_{FM} = \sum_{a=1}^{t} s_a \sum_{g=1}^{c} \sum_{b=1} n_{gb} x_{gb} = (10 \times 20 \times 10^3 + 1 \times 10^3 + 1 \times$$

$$\times 2500) \times 12 = 282.10^3 \text{ lei/year}$$

it is considered that there are necessary 20 workers (10 per shift), a technician and an engineer. The general expenses are considered as being 15% from the total ones and the investments $I_i = 20 \times 10^6$ lei.

The redemption quota $p_a = 0.07$ and the economic efficiency coefficient $p_n = 0.2$ years,

$$(4-8) \quad C_{G+I} = 130 \cdot 10^3 + (0{,}07 \times 0{,}02) \times 2 \times 10^6 = 0{,}670 \times 10^6 \quad \text{lei/year.}$$

On the calculus basis the expenses for calculation proof have the following values:

$$(4-9) \; Z_i^{pr} = (29 \times 10^3 + 9 \times 10^3 + 3{,}15 \times 10^3 + 550 \times 10^3 + 282 \times$$

$$\times 10^3 + 150 \times 10^3 + 540 \times 10^3) = (0{,}67 + 0{,}873) \times 10^6;$$

$$Z_i^{pr} = 1{,}443 \times 10^6 \text{ (lei/year)} < Z_i^a$$

In order to use also the usefulness function the eficiency function (Z) is transformed in a relation with the form:

$$(4-10) \qquad F_v = \sum_i \sum_j k_j a_j C_{ij} x_j + \sum_i bi = \text{minimum}$$

To utilise the utility function the efficiency function (Z_i) is transformed in the relation (4 — 10).

For this transformation the efficiency function is written taken into account different optimization criteria.

These criteria refer for example to the minimum expenses for materials and man-power to the minimum calculus total expenses (Z_i). To transform this efficiency function in a function synthetising all these

aspects under the form (4 — 10) for each case the following equation systems are writtem and resolved :

$$\frac{\max. Fe}{\max Fe - \min Fe} + \frac{\min Fe}{\max Fe - \min Fe} = \frac{\max Fe + \min Fe}{\max Fe - \min Fe} = 1$$

(4—11)

$$\frac{\min Fe}{\max Fe - \min Fe} + \frac{\min Fe}{\max Fe - \min Fe} = \frac{2 \min Fe}{\max Fe - \min Fe} = 0$$

where :

Fe = the efficiency function determined taking into account the criteria imposed by the production process optimization.

The mathematical representation of the linear programming problem for the considered case leads to relations of the foll owing form ;

$$\sum_{1}^{10} X_i \leqslant 337 \; ; \; Fe = \sum_{1}^{10} c_j \, x_j \; ; \; t_i \leqslant F_{di} \, C_{mi} \; ; \; x_i \leqslant x_p \qquad (4—12)$$

where ;

X^i = number of products in the plan structure should not exceed the quantity (X_p) which can be processed by the industrial unit.

c_i = the product cost,

F_{di} = the available fund of each stock,

C_{mi} = the processing mean cost.

Taking into account the relation (4 — 10) and criteria (4 — 9) the utility function : may be writen as follows :

$$F_u = (47x_1 + 33x_2 \times_3 67x + 68x_4 + 78x_5 + 61x_6 + 77x_7 + 12x_8 + 17x_9 + 10x_{10}).10^2$$

(4—13) $= \text{minimum}$

By applying for resolution one of the linea programming methods or of the succcessive setting method the production plan structure on the period of time imposed by the restrictions is determined. Thus the ordering function structure is determined in the maximum load of the equipment within the technologic lines hypothesis.

Taking into account the whole categoiy of restrictions added to the utility functions and solving the mathematical model relations where in the utility function has the form (4 — 13) it outcomes the following values for the unknown quantities ($X_1 \; . \; . \; . \; . X_{10}$).

(4—14)

$X_1 = 43$ pieces	$X_5 = 33$ pieces	$X_9 = 49$ pieces
$X_2 = 6$ pieces	$X_6 = 44$ pieces	$X_{10} = 12$ pieces
$X_3 = 44$ pieces	$X_7 = 22$ pieces	
$X_4 = 22$ pieces	$X_8 = 36$ pieces	

Thus starting from the mathematical models of the calculus expenses applied to the entiere process of an industrial objective, production the utility functions enabling the determination of the production plan functional a prefered criterium can be obtained.

Management Chair
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *N. Ceauşescu* Raport la cel de al X-lea Congres al P.C.R. Editura Politică Bucureşti, 1969
2. *Manea Mănescu* ş.a. Metode matematice moderne aplicate în organizarea şi planificarea lucrărilor de construcţii şi montaje Editura Academiei R. S. România, 1969
3. *Birlea Ştefan* Entropia în sistemele cibrenetice industriale Comnicare la sesiunea cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 1970
4. *Penescu C.* ş.a. Procese optimale. Editura Academiei R. S. Română, Bucureşti 1970
5. *Oskar Longe* Decizii optimale. Batele programării Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1970.
6. *Onicescu Octav* Principiile teoriei probabilităţilor Academiei R. S. Română, Buc. 1970.
7. *Rusitoriu Gh.* şi *Costache N.* — Constricuţii la studiul aplicării sistemului PROMT în întreprinderile constructoare de maşini Comunicare la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic. .„Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti 1970
8. *Anton Gheorghe, A. Carabulea şi Gh. Rusitoriu* Contributions to the study of the premises of Decisional Informaties în Buletinul Institutului politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej Bucureşti nr. (1 — 2) 1971.
9. *A. Petrescu* „Calculatoare automate şi programare" Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti 1971.

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele şi iniţialele de prenume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

I.P.I. c. 3494

40 820

1974 MAR 3